Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 7
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(5+5+5=15 Punkte)* Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen das Taylorpolynom ersten Grades zum angegebenen Entwicklungspunkt.

a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}, \quad (x_0, y_0) = (1,1).$

b) $g(x,y) = \ln\sqrt{\frac{2x+y}{3}}, \quad (x_0, y_0) = (0,1).$

c) $h(x,y,z) = e^{x-z} \cdot (2xy - y^2), \quad (x_0, y_0, z_0) = (-1,1,-1).$

Aufgabe 2. *(5+5=10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie zu der Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

das Taylorpolynom ersten Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$. Berechnen Sie damit näherungsweise den Wert von $\sqrt{1.1^2 + 1.9^2 + 1.95^2}$ und vergleichen Sie Ihre Näherung mit dem exakten Wert.

b) Bestimmen Sie eine Näherung von $\frac{e^{0.05}}{2.1^2}$. Verfahren Sie dabei analog zum Teil (a), wobei Sie zunächst eine Funktion und einen Entwicklungspunkt (mit ganzzahligen Koeffizienten) festlegen müssen. Vergleichen Sie auch hier Ihre Näherung mit dem exakten Wert.

Aufgabe 3. *(2+8+5=15 Punkte)* Eine Bahnkurve im $\mathbb{R}^3$ ist durch die folgenden beiden Gleichungen gegeben.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 33, \\ x - y + 2z &= 6. \end{aligned}$$

a) Überprüfen Sie, dass der Punkt $\underline{p} = (x_0, y_0, z_0) = (-2,2,5)$ zur Bahnkurve gehört.

b) Zeigen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen, dass eine Funktion

$$I \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (y(x), z(x))$$

auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $-2 \in I$ existiert, so dass die Punkte $(x, y(x), z(x))$ mit $x \in I$ alle zu der Bahnkurve gehören. Bestimmen Sie außerdem $y'(2)$ und $z'(2)$.

c) Ist es analog möglich, eine Funktion

$$J \to \mathbb{R}^2,\ z \mapsto (x(z), y(z))$$

auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $5 \in J$ zu finden, so dass die Punkte $(x(z), y(z), z)$ mit $z \in J$ alle zur Bahnkurve gehören? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: Dienstag den 10.06.08 (vor der Vorlesung)