Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Testat 4 vom 01.07.2008 zur MfN II

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Unter den folgenden Aussagen sind einige richtig und einige falsch. Kreuzen Sie die richtigen an!

Aussage 1. Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^3$ eine glatte parametrisierte Kurve

a) Die Bogenlänge von $\underline{u}$ ist gegeben durch

$$\int_a^b \left[u_1'(t)^2 + u_2'(t)^2 + u_3'(t)^2\right]^{\frac{1}{2}} dt.$$

b) Die Bogenlänge hängt nur von der Spur von $\underline{u}$ (d.h. der Bildmenge $\underline{u}\left([a, b]\right)$ in $\mathbb{R}^3$) ab.

c) Das Kurvenintegral $\int_a^b \langle \underline{f}\left(\underline{u}(t)\right), \underline{u}'(t)\rangle dt$ jedes Vektorfeldes $\underline{f}$, das in einer Umgebung der Spur von $\underline{u}$ definiert ist, hängt nur von $\underline{f}\left(\underline{u}(b)\right)$ und $\underline{f}\left(\underline{u}(a)\right)$ ab.

1a)	1b)	1c)
X		

Aussage 2. Es seien D und D' Integrationsbereiche in $\mathbb{R}^3$, $\underline{\varphi} : D' \to D$ und $\underline{\psi} : D \to D'$ zueinander inverse bijektive und stetig partiell differenzierbare Abbildungen und $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bzw $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ Koordinaten auf D bzw D'.

a) Für jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_D f\left(\underline{x}\right) d\underline{x} = \int_{D'} f\left(\underline{\varphi}\left(\underline{u}\right)\right) d\underline{u}.$$

b) Für jede stetige Funktion $g : D' \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\int_{D'} g\left(\underline{u}\right) d\underline{u}\right| = \left|\int_D g\left(\underline{\psi}\left(\underline{x}\right)\right) \cdot \det J_{\underline{\psi}}\left(\underline{x}\right) d\underline{x}\right|.$$

c) Ist $\underline{\varphi}$ eine Rotation in $\mathbb{R}^3$ (um eine gegebene Achse mit einem gegebenen Winkel), so ist mit g wie in (b)

$$\int_{D'} g\left(\underline{u}\right) d\underline{u} = \int_D g\left(\underline{\psi}\left(\underline{x}\right)\right) d\underline{x}.$$

2a)	2b)	2c)
	X	X

Aussage 3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $(*)$ die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = f(x, y).$$

a) Es gibt immer genau eine Lösung $y(x)$ von $(*)$, die $y(x_0) = y_0$ erfüllt und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

b) Die Menge der Lösungen y von $(*)$ (d.h. es gilt $y'(x) = f(x, y(x))$ in einer Umgebung von x_0, aber die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ braucht nicht erfüllt zu sein) bildet einen Vektorraum.

c) Hat $f(x, y)$ die Gestalt

$$f(x, y) = g(x) \cdot y,$$

so bildet die Lösungsmenge von $(*)$ einen Vektorraum der Dimension 1.

3a)	3b)	3c)
		X

Aussage 4. Es sei $(*)$ die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = g(x)y + h(x)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen g, h, die in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert sind.

a) In der Umgebung von x_0 gibt es immer genau eine Lösung y von $(*)$, die eine vorgegebene Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

b) Sind G bzw Φ Stammfunktionen von g bzw h, so ist die Lösung y mit $y(x_0) = y_0$ gegeben durch

$$y = (\Phi(x) + C) \cdot e^{G(x)}$$

mit einer geeigneten Konstanten C.

c) Sind G bzw Φ Stammfunktionen von $g(x)$ bzw $\frac{h(x)}{e^{G(x)}}$ mit $G(x_0) = 0$ und $\Phi(x_0) = y_0$, so ist die Lösung y mit $y(x_0) = y_0$ gegeben durch

$$y = \Phi(x) \cdot e^{G(x)}.$$

4a)	4b)	4c)
X		X