Mathematik für Naturwissenschaftler II
Übungsblatt 9

Abgabetermin Donnerstag, den 16.6.2005 vor der Vorlesung.

1. Im $\mathbb{R}^3$ sei die Gerade g gegeben durch die Funktion $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$. (D.h. g ist die Bildmenge dieser Funktion.) Sei $p := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Finden Sie die Gleichung der Ebene e, die durch p geht und senkrecht zu g ist.

   (b) Finden Sie die beiden Rotationen ϕ und $\tilde{\phi}$ um 30° bzw. −30°, die jeweils die Gerade g fest lassen. (Stellen Sie diese Abbildungen als Matrizen dar.)
   Nehmen Sie an, Sie stehen im Ursprung und schauen in Richtung des Punktes p. Geben Sie an, welche Ihrer beiden Abbildungen dann die Rotation um 30° im Uhrzeigersinn beschreibt.

   (c) Sei $q := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und sei $q' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ der Punkt, den man erhält, wenn man q an g spiegelt. Beschreiben Sie x', y' und z' in Abhängigkeit von x, y und z.

   (**20 Punkte**)

(bitte wenden)

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x, y) := 3x^3 - 3x^2y + 2x^2 + y^2 + 4$ und sei P der Punkt $(1, 1)$.

   (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y im Punkte P.

   (b) Berechnen Sie den Gradienten $g = (\text{grad} f)(P)$ von f im Punkt P.

   (c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt P in der Richtung $(1, -1)$.

   (d) Bekanntlich wird $f(x, y) - f(P)$ in einer Umgebung von P durch $g\left((x, y) - (1, 1)\right)$ angenähert. Verifizieren Sie diese Tatsache im vorliegenden Fall, indem Sie die Grenzwerte
   $$\lim_{(x,y)\to P} \frac{|f(x, y) - f(P) - \langle g, (x - 1, y - 1)\rangle|}{\|(x, y) - P\|}$$
   und
   $$\lim_{(x,y)\to P} \frac{|f(x, y) - f(P) - \langle g, (x - 1, y - 1)\rangle|}{\|(x, y) - P\|^2}$$
   berechnen.
   Für diesen Teil dürfen Sie die auftretenden Grenzwerte $\lim_{(x,y)\to P}$ als $\lim_{x\to 1} \lim_{y\to 1}$ bzw. als $\lim_{y\to 1} \lim_{x\to 1}$ berechnen. Sie sollten sich aber darüber im Klaren sein, dass diese Art der Berechnung nur deshalb funktioniert, weil die Funktion f genügend oft stetig differenzierbar ist.

   (e) Berechnen Sie $f(2{,}08; 3{,}88)$ näherungsweise, indem Sie die obige Formel mit $P = (2, 4)$ verwenden. Berechnen Sie anschließend mit Hilfe eines Taschenrechners den exakten Wert und geben Sie den relativen Fehler Ihrer Näherung an.

(20 Punkte)