

Vortrag 3: Ideale, Darstellungen und Automorphismen

Eva Molter

05.05.2015

1 Ideale

1.1 Definition

Ein Unterraum I einer Lie Algebra L heißt **Ideal** von L falls $[x,y] \in I$ für alle $x \in L$ und für alle $y \in I$.

Bemerkung: Da $[x,y] = -[y,x]$ benötigt man keine Unterscheidung zwischen Rechts- und Linksidealen.

Beispiele:

- Die trivialen Ideale einer Lie Algebra L sind 0 und L selbst.
- Das Zentrum $Z(L) := \{z \in L \mid [x,z] = 0 \forall x \in L\}$ ist ein Ideal von L .
 L ist abelsch genau dann, wenn $Z(L) = L$.
- Die derivierte Algebra von L , bezeichnet mit $[L,L]$ ist analog zum Kommutator Untergruppe einer Gruppe. Sie besteht aus allen Linearkombinationen von Kommutatoren $[x,y]$ und ist ein Ideal.
 L ist abelsch genau dann, wenn $[L,L] = 0$.

1.2 Lemma

(Aufgabe 1.9)

Für die klassischen Algebren gilt: $L = [L, L]$.

Beweis. Hier nur der Beweis für A_l , die restlichen Beweise funktionieren ähnlich.
z.z. $[L, L] \subseteq L$ und $L \subseteq [L, L]$

Der erste Teil $[L, L] \subseteq L$ ist klar. Bleibt zu zeigen $L \subseteq [L, L]$:

Für A_1 gilt:

$$\begin{aligned}e_{12} &= \frac{1}{2}[h, e_{12}] \\e_{21} &= \frac{1}{2}[e_{21}, h] \\h &= [e_{12}, e_{21}]\end{aligned}$$

Allgemein gilt für $A_l (l \geq 2)$:

$$\begin{aligned}e_{ij} &= [e_{ik}, e_{kj}] \text{ mit } k \neq i, j \text{ und } i \neq j \\h_i &= [e_{i, i+1}, e_{i+1, i}]\end{aligned}$$

□

1.3 Lemma

(Aufgabe 2.1)

Die Menge I aller inneren Derivationen $ad_x, x \in L$ ist ein Ideal von $Der L$.

Beweis. Zur Erinnerung:

- Derivation: $\delta : L \rightarrow L$ mit $\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$
- Innere Derivation: $ad_z[x, y] = [z[x, y]] = [[y, z]x] + [[z, x]y] = [x, ad_z(y)] + [ad_z(x), y]$
- I ist Ideal von $Der L$: $[\delta, ad_x] \in I$, falls $\delta \in Der L$ und $ad_x \in I$

Für ein $y \in L$ ist

$$[\delta, ad_x](y) = \delta(ad_x(y)) - ad_x(\delta(y)) \tag{1}$$

$$= \delta([x, y]) - [x, \delta(y)] \tag{2}$$

$$= [\delta(x), y] + [x, \delta(y)] - [x, \delta(y)] \tag{3}$$

$$= [\delta(x), y] \tag{4}$$

$$= ad_{\delta(x)}(y) \tag{5}$$

Also gilt $[\delta, ad_x] = ad_{\delta(x)}$ und $[Der(L), I] \subset I$.

□

1.4 Proposition

Seien I, J zwei Ideale einer Lie Algebra L , dann gelten:

- Die Summe $I + J := \{x + y | x \in I, y \in J\}$ ist ein Ideal.
- Das Produkt $[I, J] := \{\sum [x_i y_i] | x_i \in I, y_i \in J\}$ ist ein Ideal, Spezialfall $[L, L]$.
- Der Faktorraum L/I versehen mit der Lie Klammer $[x+I, y+I] = [x, y] + I$ ($x, y \in L$) wird zu einer Lie Algebra. Diese wird Faktor algebra von L nach I genannt. Die Lie Multiplikation ist wohlbestimmt.

Beweis. Seien $x + I = x' + I$ und $y + I = y' + I$ mit $x' = x + u, y' = y + v, u, v \in I$. Dann gilt für

$$[x', y'] = [x + u, y + v] \quad (6)$$

$$= [x, y] + ([x, v] + [u, y] + [u, v]) \quad (7)$$

Wegen $([x, v] + [u, y] + [u, v]) \in I$ folgt $[x', y'] + I = [x, y] + I$, d.h. die Lie-Multiplikation auf L/I ist wohlbestimmt. Die Lie-Algebren-Axiome für L/I folgen aus denen von L . \square

1.5 Definition

Eine Lie Algebra L heißt **einfach**, wenn L außer den beiden trivialen Idealen keine weiteren besitzt und zusätzlich $[L, L] \neq 0$ gilt.

Beispiel: $L = \mathfrak{sl}(2, F)$, $\text{char } F \neq 2$, mit F als Grundkörper.

Standardbasis für L : $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Die Multiplikationstafeln werden bestimmt durch: $[x, y] = h, [h, x] = 2x, [h, y] = -2y$

Sei $I \neq 0$ ein Ideal, und $ax + by + ch$ ein von 0 verschiedenes Element von I .

Zweimaliges anwenden von ad_x liefert:

$$ad_x(ax + by + ch) = [x, ax + by + ch] \quad (8)$$

$$= a[x, x] + b[x, y] + c[x, h] \quad (9)$$

$$= bh - 2cx \quad (10)$$

$$ad_x(bh - 2cx) = [x, bh - 2cx] \quad (11)$$

$$= b[x, h] - 2c[x, x] \quad (12)$$

$$= -b[h, x] \quad (13)$$

$$= -2bx \in I \quad (14)$$

Analog: $ad_y(ad_y(ax + by + ch)) = -2ay \in I$.

Wenn a und b ungleich 0 sind folgt, dass y und x Element von I sind und damit $I = L$.
Sei beispielsweise $a = 0$ und $b \neq 0$, dann sind $by + ch$ und $x \in I$, damit auch $y = \frac{1}{2c}[y, by + ch]$. Also ist $I = L$.

Wenn $a = b = 0$ folgt, dass $ch \neq 0$ also h Element von I ist und damit $x = -\frac{1}{2}[x, h]$ und $y = -\frac{1}{2}[y, h]$ also wieder $I = L$.

Daraus folgt, dass L einfach ist.

1.6 Definitionen

- Der **Normalisator** einer Unteralgebra K von L ist definiert durch $N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}$ und ist die größte Unteralgebra von L , die K als Ideal enthält.
- K wird **selbstnormalisierend** genannt, wenn $K = N_L(K)$.
- Der **Zentralisator** einer Teilmenge X von L ist $C_L(X) = \{x \in L \mid [x, X] = 0\}$ eine Unteralgebra von L .
Bsp.: $C_L(L) = Z(L)$

2 Homomorphismen und Darstellungen

2.1 Definition

Seien L, L' Lie Algebren über F . Eine lineare Abbildung $\Phi : L \rightarrow L'$ heißt **Homomorphismus** von Lie Algebren, wenn gilt:

$$\Phi([xy]) = [\Phi(x), \Phi(y)] \text{ für alle } x, y \in L.$$

- Φ heißt Monomorphismus, wenn $\text{Ker } \Phi = 0$;
- Φ heißt Epimorphismus, wenn $\text{Im } \Phi = L'$;
- Φ heißt Isomorphismus, wenn Φ Monomorphismus und Epimorphismus ist.

2.2 Lemma

- i) $\text{Ker } \Phi$ ist ein Ideal von L
- ii) $\text{Im } \Phi$ ist eine Unteralgebra von L'

Beweis.

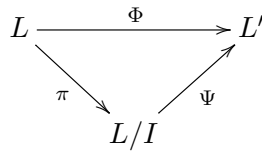
- i) Zu zeigen: Für alle $y \in I = \text{Ker } \Phi$ und alle $x \in L$ gilt: $[x,y] \in I$
Wähle ein $y \in I$ und ein $x \in L$, dann gilt:
$$\Phi([x,y]) = [\Phi(x), \Phi(y)] = [\Phi(x), 0] = \Phi(x) \cdot 0 - 0 \cdot \Phi(x) = 0$$
mit $\Phi(y) = 0$, da $y \in \text{Ker } \Phi$.
D.h. $[x,y] \in \text{Ker } \Phi$
- ii) Zu zeigen: Für alle $x, y \in \text{Im } \Phi$ ist $[x,y] \in \text{Im } \Phi$
Wähle $x, y \in \text{Im } \Phi$, dann gibt es a und $b \in L$ mit $\Phi(a) = x$ und ein $\Phi(b) = y$.
Dann gilt: $[x,y] = [\Phi(a), \Phi(b)] = \Phi([a,b])$.
D.h. $[x,y] \in \text{Im } \Phi$.

□

2.3 Satz

(Isomorphiesätze)

- i) Ist $\Phi : L \rightarrow L'$ ein Homomorphismus von Lie Algebren, so ist $L/\text{Ker}\Phi \cong \text{Im}\Phi$.
- ii) Ist $I \subseteq \text{Ker } \Phi$ ein beliebiges Ideal von L , so existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\Psi : L/I \rightarrow L'$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist (π = kanonische Abbildung)



- iii) Sind I und J Ideale von L , so dass $I \subset J$, dann ist J/I ein Ideal von L/I und $(L/I)/(J/I)$ ist isomorph zu L/J .
- iv) Sind I und J Ideale von L , dann existiert ein Isomorphismus von $(I+J)/J$ zu $I/(I \cap J)$

Beweis.

- i) Verwende (ii) mit $L/I = L/\text{Ker}\Phi$ und zeige noch $L/\text{Ker}\Phi$ ist isomorph zu $\text{Im}\Phi$

Monomorphismus: $\text{Ker}\Phi = 0$, da $\Psi(\bar{x}) = 0$ genau dann, wenn $\Phi(x) = 0$, daraus folgt, dass $x \in \text{Ker}\Phi$ und damit ist $\bar{x} = 0$.

Epimorphismus: Da L' bereits $\text{Im}\Phi$ ist, gibt es nichts zu zeigen.

- ii) Wohldefiniertheit: Sei $\bar{x} \in L/I$ die Klasse von $x \in L$. Definiere $\Psi(\bar{x}) := \Phi(x)$
Ist $x' \in L$ mit $x' = x + i$, $i \in I$, so ist $\Phi(x') = \Phi(x) + \Phi(i) = \Phi(x)$, also hängt $\Psi(\bar{x})$ nur von \bar{x} ab.

Eindeutigkeit: Ψ ist die einzige Abbildung, die $\Phi = \Psi \circ \pi$ erfüllt.

Homomorphismus: Es seien $\bar{x}, \bar{y} \in L/I$, $x, y \in L$
Dann gilt:

$$\Psi([\bar{x}, \bar{y}]) = \Psi(\overline{[x, y]}) \tag{15}$$

$$= \Phi([x, y]) = [\Phi(x), \Phi(y)] \tag{16}$$

$$= [\Psi(\bar{x}), \Psi(\bar{y})] \tag{17}$$

- iii) Sei Φ der gesuchte Isomorphismus, dann ist
 $\text{Ker}\Phi = J/I$
 $\text{Im}(\Phi) = L/J$, da die Abbildung surjektiv ist. Damit lässt sich (i) anwenden.
- iv) Sei π der kanonische Homomorphismus $\pi : L \rightarrow L/J$
Für $\pi|_I$ gilt: $\text{Im}(\pi|_I) = \{\bar{i} | i \in I\}/J = (I+J)/J$
Weiter gilt: $\text{Ker}(\pi|_I) = I \cap \text{Ker}\pi = I \cap J$
Damit lässt sich (i) anwenden.

□

2.4 Definition

Sei L eine Lie Algebra. Ein K -Vektorraum V mit einer K -bilinearen Abbildung

$$L \times V \rightarrow V, (x, v) \mapsto xv$$

mit der Eigenschaft:

$\forall x, y \in L, v \in V: [x, y]v = xyv - yxv$ heißt ein **L-Modul**.

Äquivalent zur Angabe einer L -Modulstruktur auf V ist die Angabe eines Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)(= \text{End}_V(V))$ mit $[f, g] = fg - gf$ durch $xv := f(x)(v)$. Ein derartiges φ heißt eine **Darstellung** von L auf V .

Beispiel: Die adjungierte Darstellung $ad : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L), x \mapsto ad_x$, denn es gilt für jedes $z \in L$:

$$[ad_x, ad_y](z) = ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z)) \quad (18)$$

$$= ad_x([y, z]) - ad_y([x, z]) \quad (19)$$

$$= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \quad (20)$$

$$= [x, [y, z]] + [[x, z], y] \quad (21)$$

$$= [[x, y], z] \quad (22)$$

$$= ad_{[x, y]}(z) \quad (23)$$

Bemerkung: (21) \rightarrow (22) mit Hilfe der Jacobi Identität.

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (24)$$

$$[x, [y, z]] - (-[[x, z], y]) = [[x, y], z] \quad (25)$$

Der Kern von ad_x besteht aus allen $x \in L$ für die $ad_x = 0$, das heißt für die $[x, y] = 0$ gilt. Deshalb ist der Kern von $ad : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L), x \mapsto ad_x$ gegeben durch $\text{Ker} ad := \{y \in L \mid [x, y] = 0 \forall x \in L\} = Z(L)$. Ist L einfach, so folgt $Z(L) = 0$, so dass die Abbildung $ad : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L)$ ein Monomorphismus ist. Das bedeutet, dass jede einfache Lie Algebra isomorph zu einer linearen Lie Algebra ist. Es genügt also einfache Lie Algebren zu betrachten. Die Sätze von Ado und Iwasawa besagen dass, jede endlich dimensionale Lie-Algebra isomorph zu einer linearen Lie Algebra ist.

3 Automorphismen

3.1 Definition

Es sei L eine Lie Algebra über F . Eine lineare Abbildung $\Phi : L \rightarrow L$ heißt ein Automorphismus $\text{Aut } L$, wenn Φ bijektiv und $\Phi[x, y] = [\Phi(x), \Phi(y)]$ ist.

Wichtige Beispiele folgen für $L \subset \mathfrak{gl}(V)$. Wenn $g \in \text{GL}(V)$ ein invertierbarer Endomorphismus von V ist und wenn weiter $gLg^{-1} = L$, dann ist die Abbildung $x \mapsto gxg^{-1}$ ein Automorphismus von L . Beispielsweise folgt für $L = \mathfrak{gl}(V)$ oder sogar $L = \mathfrak{sl}(V)$ direkt die Bedingung $gLg^{-1} = L$.

Beispiel: $(\exp(ad_x) : L \rightarrow L) \in \text{Aut } L$
Sei $\text{char } F = 0$.

Wähle ein $x \in L$ für das ad_x nilpotent ist. Das heißt: $(ad_x)^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist die Reihe für $\exp(ad_x)$ endlich. Und es gilt:

$$\exp(ad_x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(ad_x)^i}{i!} = 1 + ad_x + \frac{(ad_x)^2}{2!} + \dots + \frac{(ad_x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

und $\exp(ad_x)$ ist als Element von $\text{End}_K(L)$ invertierbar, seine Inverse ist $\exp(-ad_x)$.

Also gehört $\exp(ad_x)$ sogar zu $\text{GL}(L)$. Wir zeigen, dass es darüber hinaus erfüllt:

$$\exp(ad_x)([y, z]) = [\exp(ad_x)(y), \exp(ad_x)(z)]$$

für beliebige $y, z \in L$. Das heißt, $\exp(ad_x)$ ist ein Automorphismus von L .

Zuerst folgende Aussage:

Lemma:

Es sei A eine beliebige K -Algebra (nicht notwendig assoziativ und nicht notwendig eine Lie-Algebra; nur ein K -Vektorraum mit einer bilinearen Abbildung $A \times A, (x, y) \mapsto xy$) und δ eine Derivation von A , d.h. ein K -Endomorphismus $\delta : A \rightarrow A$, der $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ erfüllt für alle $x, y \in A$.

Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in A$:

$$\delta^n(xy) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \delta^i(x) \delta^{n-i}(y). \tag{26}$$

(Leibniz-Regel)

Beweis. Induktion nach n unter Verwendung der Derivationsregel. □

Wir können jetzt ausrechnen:

$$[(\exp(ad_x))(y), (\exp(ad_x))(z)] = \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(ad_x)^i(y)}{i!}, \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(ad_x)^j(z)}{j!} \right] \quad (27)$$

$$= \sum_{n=0}^{2k-2} \left(\sum_{i=0}^n \left[\frac{(ad_x)^i(y)}{i!} \frac{(ad_x)^{n-i}(z)}{(n-i)!} \right] \right) \quad (28)$$

$$= \sum_{n=0}^{2k-2} \frac{(ad_x)^n([y, z])}{n!} \quad (29)$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(ad_x)^n([y, z])}{n!} \quad (30)$$

$$= \exp(ad_x)([y, z]) \quad (31)$$

(28) \rightarrow (29) Anwendung der Leibniz-Regel.

(29) \rightarrow (30) es gilt: $(ad_x)^k = 0$.

D.h. $\exp(ad_x)$ ist ein Lie-Algebren-Endomorphismus von L , und da es bijektiv ist, ein Lie-Algebren-Automorphismus.

Allgemeiner gilt: Ist δ eine nilpotente Derivation der Lie-Algebra L , so ist $\exp \delta$ ein Automorphismus.

Automorphismen der Form $\exp(ad_x)$ mit nilpotenten ad_x heißen innere Automorphismen, die von ihnen erzeugte Untergruppe von $\text{Aut}(L)$ heißt $\text{Int}(L)$. Dies ist ein Normalteiler der Gruppe $\text{Aut}(L)$ also Automorphismus von L .

Wenn $\Phi \in \text{Aut } L$, $x \in L$ dann gilt:

$$\Phi ad_x \Phi^{-1} = ad_{\Phi(x)}$$

denn für $y \in L$ ist $(\Phi ad_x \Phi^{-1})(y) = \Phi[x, \Phi^{-1}(y)] = [\Phi(x), \Phi \Phi^{-1}(y)] = ad_{\Phi(x)}(y)$.

Also gilt auch:

$$\Phi \exp(ad_x) \Phi^{-1} = \exp(ad_{\Phi(x)})$$

Beispiel:

$L = \mathfrak{sl}(2, F)$ mit der Standardbasis (x, y, h) (vgl. Beispiel Seite 3)

Die dortige Rechnung zeigt, dass $(ad_x)^3 = 0 = (ad_y)^3$.

Definiere $\sigma = \exp ad_x \cdot \exp ad_{-y} \cdot \exp ad_x, \sigma \in \text{Int} L$.

Es gilt:

$$\exp ad_x(x) = (1 + ad_x + \frac{1}{2}(ad_x)^2)(x) = x \quad (32)$$

$$\exp ad_{-y}(x) = (1 + ad_{-y} + \frac{1}{2}(ad_{-y})^2)(x) \quad (33)$$

$$= x - [y, x] + \frac{1}{2}[y, [y, x]] \quad (34)$$

$$= x + h - y \quad (35)$$

$$\exp ad_x(x + h - y) = x + h - y + [x, x] + [x, h] - [x, y] \quad (36)$$

$$+ \frac{1}{2}([x, [x, x]] + [x, [x, h]] - [x, [x, y]]) \quad (37)$$

$$= x + h - y - 2x - h + x \quad (38)$$

$$= -y \quad (39)$$

Dann ist:

$$\sigma(x) = \exp ad_x \cdot \exp ad_{-y} \cdot \exp ad_x(x) \quad (40)$$

$$= \exp ad_x \cdot \exp ad_{-y}(x) \quad (41)$$

$$= \exp ad_x(x + h - y) \quad (42)$$

$$= -y \quad (43)$$

Analog folgt: $\sigma(y) = -x$ und $\sigma(h) = \sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)] = [-y, -x] = [y, x] = -h$

σ hat Ordnung 2 und $\exp(x), \exp(-y)$ sind wohldefinierte Elemente von $\text{SL}(2, F)$. Die Konjugation von Elementen in $\text{SL}(2, F)$ lassen L invariant.

Dadurch folgt, dass das Produkt $s = (\exp x)(\exp -y)(\exp x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

einen Automorphismus $z \mapsto szs^{-1}$ von L induziert.

Die Konjugation mit $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat denselben Effekt wie die Anwendung von σ .

$$sxs^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -y$$

Genauso $sys^{-1} = -x$ und $shs^{-1} = -h$.

3.2 Proposition

Sei $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine beliebige lineare Lie Algebra ($\text{char } F = 0$) und $x \in L$ nilpotent, dann gilt:

$$(\exp x)y(\exp x)^{-1} = \exp(ad_x(y)) \text{ für alle } y \in L.$$

Beweis. Sei $ad_x = \lambda_x + \rho_{-x}$, wobei λ_x die Links- und ρ_x die Rechtsmultiplikation mit x im Ring $\text{End}(V)$ sind (Diese sind nilpotent und kommutieren). Dann gilt:

$$\exp(ad_x) = \exp(\lambda_x + \rho_{-x}) = \exp \lambda_x \cdot \exp \rho_{-x} = \lambda_{\exp x} \cdot \rho_{\exp(-x)}$$

Und daraus folgt die Behauptung. □