



# Färbungsprobleme am $n$ -dimensionalen Würfel

## Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades  
Bachelor of Science  
im Studiengang Mathematik  
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I  
-Mathematik und Informatik-  
der Universität des Saarlandes

von **Sebastian Bild**

Saarbrücken, August 2013

Angefertigt unter Betreuung  
von **Prof. Dr. E.-U. Gekeler**



## Eidesstaatliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 2. August 2013

---

Ort, Datum

---

Sebastian Bild



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Der <math>n</math>-dimensionale Würfel</b>	<b>9</b>
1.1	Visualisierung . . . . .	9
1.2	Die Automorphismengruppe des $n$ -dimensionalen Würfels . . . . .	10
1.3	Die Konjugationsklassen von $G_n$ . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Färbungsprobleme</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Berechnung des Zykelzeigers</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Färbungsprobleme am <math>n</math>-dimensionalen Würfel</b>	<b>26</b>
4.1	Färbungen des 3-dimensionalen Würfels . . . . .	26
4.1.1	Färbungen der Ecken des Würfels . . . . .	26
4.1.2	Färbungen der Kanten des Würfels . . . . .	28
4.1.3	Färbungen der Flächen des Würfels . . . . .	28
4.2	Asymptotische Betrachtungen . . . . .	29

## 0 Einleitung

### Vorwort

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Käsesorten auf einer drehbaren Servierplatte anzuordnen? Und wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn ich von jeder Sorte genau 3 Stück platzieren möchte? Fragestellungen dieser Art nennt man auch Färbungsprobleme, da man jede Käsesorte auch als Farbe (oder Nummer) interpretieren kann.

Ende des 19. Jahrhunderts gelang es William Burnside, eine geschlossene Formel für die Anzahl von Färbungen mit  $r$  vielen Farben einer Menge mit  $N$  Elementen anzugeben. Das Besondere hierbei ist, dass die Symmetrie des Objektes, welches man färben möchte, mit einbezogen werden kann. Dies ist sehr wichtig, da beispielsweise eine Rotation des gefärbten Objektes eine andere Färbung erzeugen kann (es spielt keine Rolle ob wir den Gouda auf die linke oder rechte Seite der Platte legen). Kennt man die Symmetrien eines Objektes, so kann man diese gruppentheoretisch erfassen. Die Darstellung der Gruppe spielt dabei keine Rolle. Einzig die Länge eines Zyklus  $\sigma$  fließt in die Berechnung mit ein. Dabei soll  $\sigma = (P_1, P_2, \dots, P_m)$  eine zyklische Permutation der Punkte  $P_1$  bis  $P_m$  sein. Heuristisch formuliert: Gibt es viele Symmetrien, so gibt es viele ähnliche Färbungen, die wir nicht mitzählen wollen. Sind die Zyklen insgesamt recht kurz, so sind unsere Symmetrien recht grob und weniger Färbungen sind ähnlich. Diese Zählweise ist allerdings sehr ungenau. Errechnen wir auf diese Weise alle Färbungen mit drei Farben, so zählen wir auch Färbungen mit, bei denen einzelne Farben nicht verwendet werden. Man nennt diese Art von Färbungen entartet.

Die Berechnung der  $r$  Färbungen läuft auf das Auswerten eines Polynoms an der Stelle  $r$  hinaus. Man nennt dieses Polynom auch den Zykelzeiger von einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $\mathcal{X}$ . Dieses enthält die Informationen über die Länge und Anzahl jedes Zykeltyps. Wobei ein Zykeltyp die Zusammenfassung mehrerer, disjunkter Zyklen ist, die alle Punkte aus  $\mathcal{X}$  enthalten (evtl. in Zykeln der Länge 1). George Pólya verfeinerte 1937 die Auswertung dieses Polynoms. Mit seinem Satz kann man die Anzahl von Färbungen berechnen, bei denen  $i_1$  mal die Farbe 1,  $i_2$  mal die Farbe 2, usw. verwendet wird. Er machte seine Formel in der Fachliteratur bekannt, indem er viele chemische Verbindungen mit dieser Methodik zählte. De Bruijn zeigt dies eindrucksvoll in einer Veröffentlichung [6], in der er alle einwertigen Alkohole und ihre Isomere zählt.

Besonders interessant wird das Zählen von Färbungen auf Objekten mit hoher Symmetrie. Typisch hierfür sind regelmäßige Vielecke oder Polygone.

Ein gleichmäßiges Dreieck kann nach Drehung um seinen Mittelpunkt oder Spiegelung entlang einer Winkelhalbierenden in Deckung gebracht werden. Hier ergeben sich sechs unterschiedliche Symmetrieeoperationen. Diese kann man sowohl auf der Menge der Ecken als auch auf der Menge der Kanten des Dreiecks sinnvoll interpretieren. In Kapitel 2 berechne ich die Symmetrien des 6-Ecks, um die Anzahl der Isomere von Trichlor-Phenol zu bestimmen.

Etwas komplexer ist die Bestimmung der Symmetrien von Polygonen. Im 3-dimensionalen stößt der Mensch oft schon an die Grenzen seiner Vorstellungskraft. Vollständig bestimmt ist diese Problematik allerdings schon bei den Platonischen Körpern. Diese sind regelmäßige, durch  $n$ -Ecke begrenzte Polyeder. Von diesen gibt es genau 5 verschiedene.

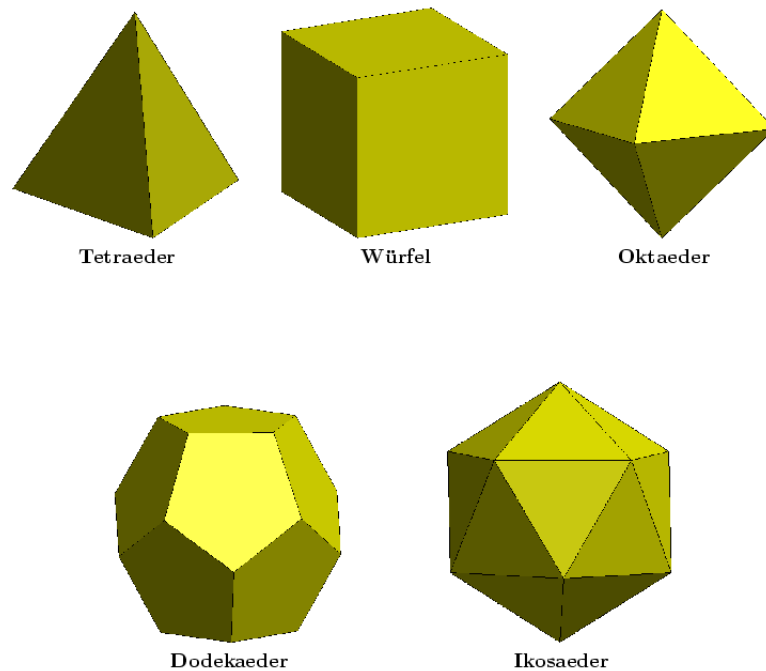


Abbildung 1: Die 5 platonischen Körper [10]

In der vorliegenden Arbeit untersuche ich den Würfel, um Färbungsprobleme berechnen zu können. Diesen fasse ich als Hülle seiner 8 Ecken mit Koordinaten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  auf. Eine Fläche wird durch Festlegen einer Koordinate exakt bestimmt. Man sieht auf diesem Wege wieder, dass ein Würfel 6 Flächen hat. Allgemein ist dann ein  $n$ -Würfel die Hülle seiner  $2^n$  Ecken im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum. Ein maximaler Unterwürfel ist eine Teilmenge des  $n$ -Würfels, welche alle Punkte - mit fester Koordinate  $+$  oder  $-1$  an einer Stelle - beinhaltet. Für die Menge  $\mathcal{W}_{-1}$  der maximalen Unterwürfel können wir die Färbungen recht schnell bestimmen. Um die Färbungen von anderen Teilmengen  $\mathcal{W}_{n,k}$  der Potenzmenge des  $n$ -Würfels zu berechnen, müssen wir die Symmetrien, die wir zunächst für die Menge  $\mathcal{W}_{-1}$  bestimmt haben werden, auf Symmetrien der Menge  $\mathcal{W}_{n,k}$  übertragen. Jede Symmetrie wird (für unsere Zwecke vollständig) durch ihre signierte Zykelstruktur (*SCT*, siehe Definition 1.16) beschrieben. Für jeden dieser *SCT* erhalten wir ein Polynom, welches die Zykelstruktur auf den Mengen  $\mathcal{W}_{n,k}$  trägt. Der Vorteil der Polynomschreibweise besteht darin, die Daten für alle  $\mathcal{W}_{n,k}$ 's nebeneinander speichern zu können. Wir können schließlich Tabellen mit den Zykeltypen und der Kardinalität der einzelnen *SCT*s ausgeben und dort direkt den Zykelzeiger ablesen. Somit ist die theoretische Grundlage zur Lösung von Färbungsprobleme am  $n$ -dimensionalen Würfel geschaffen.

Im letzten Kapitel werden einige Färbungsprobleme am 3-dimensionalen Würfel behandelt. Wir finden z.B. heraus, dass es drei unterschiedliche Möglichkeiten gibt, 2 Ecken des Würfels einzufärben. Diese sind durch den Abstand der Ecken eindeutig bestimmt: Zwei Ecken können benachbart sein, über genau zwei Kanten verbunden sein oder im Würfel diagonal gegenüber liegen.

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mir beim Verfassen dieser Arbeit zur Seite standen - den Kommilitonen, die diese Arbeit mehrfach lasen, besonders aber Wladimir Panfilenko, der mir bei der numerischen Berechnung mittels Java behilflich war. Besonderer Dank gilt auch Prof. Dr. E.U. Gekeler, der mich auf dieses Thema aufmerksam gemacht hat und mir, besonders bei der Formulierung der grundlegenden Theorie, behilflich war.

## Notationen

Wir bezeichnen mit

- $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen,
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  die Menge der natürlichen Zahlen,
- $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$  die Menge der ersten  $n$  natürlichen Zahlen und
- $II_n = \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\} = I_n \dot{\cup} -I_n$ .
- Mit  $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  bezeichnen wir den Körper mit zwei Elementen.

- Weiter sei zu einer Zahl  $i \in I_n$  der StandardEinheitsvektor  $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  mit einer 1 an der  $i$ -ten Stelle und Nullen sonst. Man kann diesen Vektor sowohl als Element von  $\mathbb{F}_2^n$  als auch von  $\mathbb{R}^n$  interpretieren.

- Zu den natürlichen Zahlen  $k_1 + \dots + k_n = n$  sei der Multinomialkoeffizient  $\binom{n}{k_1, \dots, k_n} := \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$ .
- $\sharp(M) = |M|$  = Anzahl der Elemente in einer Menge  $M$ .



# 1 Der n-dimensionale Würfel

## 1.1 Visualisierung

**Definition 1.1** (n-Würfel). Wir definieren einen  $n$ -dimensionalen Würfel  $W_n$  als Menge  $\{\pm 1\}^n$  mit einer Nachbarschaftsrelation. Elemente dieser Menge heißen Knoten (oder Ecken). Es seien zwei Knoten  $a, b \in W_n$  benachbart genau dann, wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden. Eine Nachbarschaftsrelation nennen wir Kante  $\{a, b\}$ .

Dies ist die einzige Struktur des Würfels, die wir für unsere Zwecke benötigen.

**Bemerkung 1.2.** Wir betrachten nun den  $n$ -Würfel  $W_n$  als Teilmenge des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raums  $\mathbb{R}^n$ . Die konvexe Hülle von  $W_n$  ist dann die Menge

$$B(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{sup} \leq 1\}.$$

Die Visualisierung davon ergibt im Fall von  $n = 2$  bzw.  $3$  das Quadrat bzw. den Würfel mit Seitenlänge 2. Ein  $n$ -Würfel lässt sich rekursiv aus einem  $(n-1)$ -dimensionalen Würfel konstruieren, indem man diesen kopiert und jede Ecke der Kopie durch eine Kante mit seinem Urbild verbindet. Dieses Konzept eignet sich allerdings nur bedingt zur Veranschaulichung, jedoch durchaus zum Zählen von Ecken, Kanten, Flächen, etc.

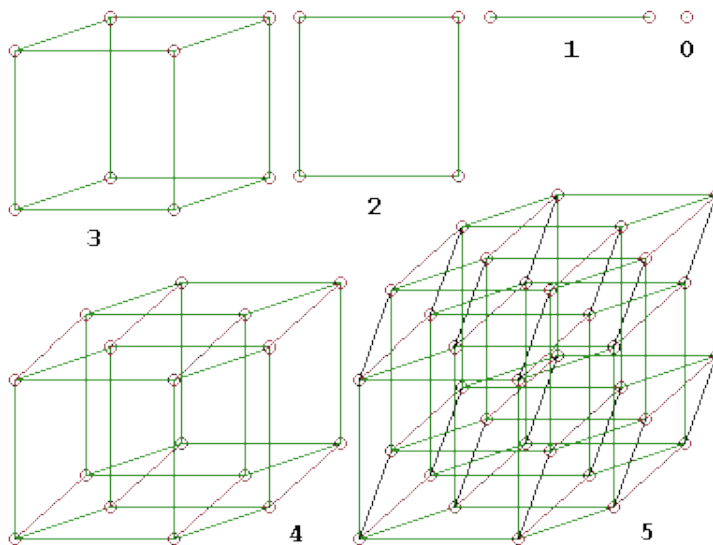


Abbildung 2: Würfelanaloge [9]

Die Menge  $\{\pm 1\}$  trägt eine multiplikative Struktur. Da ein kanonischer Gruppenisomorphismus in die Menge  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  versehen mit einer additiven Struktur existiert, kann man diese Mengen miteinander identifizieren. Entsprechend können wir  $W_n$  auch als Vektorraum der Dimension  $n$  über  $\mathbb{F}_2$  interpretieren. Wir nennen auch hier zwei Punkte  $a, b$  benachbart, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden. In  $\mathbb{F}_2^n$  ist dies äquivalent zu  $a + b = e_i$  für ein  $i \in I_n$ .

**Definition 1.3** (Unterwürfel). Sei  $N \ni k \leq n$ . Ein  $k$ -dimensionaler Unterwürfel  $U$  von  $W_n$  ist ein voller Untergraph, der isomorph zum  $k$ -dimensionalen Unterwürfel  $W_k$  ist. Mit

$\mathcal{W}_{n,k}$  bezeichnen wir die Menge der  $k$ -dimensionalen Unterwürfel von  $W_n$ ,

$$\mathcal{W}_{n,k} := \{U \mid U \text{ ist } k\text{-dim. Unterwürfel von } W_n\}.$$

Dabei ist  $\mathcal{W}_{n,n} = \{W_n\}$ .

Sind  $x = (x_1, \dots, x_n) \in W_n$  und  $S \subset I_n$  mit  $|S| = k$  fest, so können wir ein  $U \in \mathcal{W}_{n,k}$  als Menge:

$$U = U_{x,S} = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in W_n \mid a_i = x_i \ \forall i \in I_n \setminus S\}$$

schreiben.

#### Bemerkung 1.4.

- Sei  $S \subset I_n$  eine Menge mit  $k$  Elementen und  $V = \langle e_i \mid i \in S \rangle \subset \mathbb{F}_2^n$  ein achsenparalleler Untervektorraum der Dimension  $k$ , sowie  $x \in \mathbb{F}_2^n$ . Dann ist  $x+V$  ein  $k$ -dimensionaler Unterwürfel, und jedes Element von  $\mathcal{W}_{n,k}$  entsteht auf diese Weise. Wir identifizieren die Menge  $\mathcal{W}_{n,k}$  aus der Potenzmenge von  $W_n$  mit der Menge  $\{x+V \mid V = \langle e_i \rangle_{i \in S}, x \in \mathbb{F}_2^n\}$  von affinen Unterräumen in  $\mathbb{F}_2^n$ .
- Ein  $k$ -dimensionaler Unterwürfel  $U$  hängt nur in  $(n-k)$  Komponenten von  $x$  ab. Es ist -für einen festen Unterwürfel- der Vektor  $x$  nicht eindeutig bestimmt. Es gilt:

$$\#\mathcal{W}_{n,k} = \binom{n}{k} 2^{n-k} =: N_k. \quad (1)$$

Dabei ist der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  die Anzahl der  $k$ -dimensionalen achsenparallelen Untervektorräume von  $\mathbb{F}_2^n$ .

- Zu jeder Ecke  $x \in \mathbb{F}_2^n$  gibt es genau eine Ecke  $\tilde{x} := x + (1, 1, \dots, 1)^t$  mit maximalem Abstand. Diese hat die Eigenschaft: Es existiert kein  $k < n$ , sodass  $x, \tilde{x}$  in einem  $k$ -dimensionalen Unterwürfel enthalten sind. Bezeichnen wir Mengen der Form  $\{x\tilde{x}\}$  als Raumdiagonale, so folgt:

$$\#\text{(Raumdiagonalen von } W_n) = 2^n/2 = 2^{n-1}.$$

## 1.2 Die Automorphismengruppe des $n$ -dimensionalen Würfels

**Definition 1.5** (Semidirektes Produkt). [1, S. 115]

Es seien  $G, H$  Gruppen und  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(G)$  ein Gruppenhomomorphismus in die Automorphismengruppe  $\text{Aut}(G)$  von  $G$ . Dann ist die Menge  $P = G \times H$  mit der Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ : (G \times H) \times (G \times H) &\longrightarrow (G \times H) \\ (g_1, h_1) \quad , \quad (g_2, h_2) &\mapsto (g_1 \cdot \varphi(h_1)(g_2), h_1 \cdot h_2) \end{aligned}$$

eine Gruppe, das **semidirekte Produkt**  $G \rtimes_{\varphi} H$  von  $G$  und  $H$  bezüglich  $\varphi$ . Weiter ist

$$G \cong G \times \{e_H\} \subset G \rtimes_{\varphi} H \quad , \quad (e_H \text{ die Identitätsabbildung})$$

ein Normalteiler, und für die Quotientengruppe gilt

$$(G \rtimes_{\varphi} H)/G \cong H.$$

**Definition und Satz 1.6.** Für die Automorphismengruppe des  $n$ -dimensionalen Würfels gilt:

$$G_n := \text{Aut}(W_n) = C_2^m \rtimes_l S_n.$$

Diese Gruppe operiert von links auf den  $n$  Koordinaten der Knoten aus  $W_n$ . Ist  $R \subset I_n$  und  $|R| = r$ , so ist für ein Element  $a = (a_1, \dots, a_n) \in W_n$  und  $\tau = \tau_R \in C_2^n$

$$\tau(a) = \begin{cases} \tau(a_i) = -a_i, & \text{wenn } i \in R \\ \tau(a_i) = a_i, & \text{wenn } i \notin R \end{cases}.$$

Die symmetrische Gruppe  $S_n$  operiert auf den Knoten von  $W_n$  durch vertauschen der Koordinaten. Sind  $\sigma \in S_n$  und  $a = (a_1, \dots, a_n) \in W_n$  gegeben, so setzen wir

$$\sigma(a) = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}).$$

Die Verknüpfung 'o' wird gegeben durch:

$$\begin{aligned} \circ : (C_2^m \times S_n) \times (C_2^m \times S_n) &\longrightarrow (C_2^m \times S_n) \\ (\tau_1, \sigma_1) \quad , \quad (\tau_2, \sigma_2) &\longmapsto (\tau_1 \iota_{\sigma_1}(\tau_2), \sigma_1 \sigma_2), \end{aligned}$$

wobei  $\iota_{\sigma_1}(\tau_2) = \sigma_1 \tau_2 \sigma_1^{-1}$  ist.

*Beweis.* 1. Sei  $\tau = \tau_R \in C_2^n$  wie im Satz. So ist  $\tau$  nach Konstruktion eine Abbildung, welche die Menge  $W_n = \{\pm 1\}^n$  auf sich selbst abbildet, also ein Endomorphismus. Diese Abbildung ist als Produkt disjunkter Transpositionen sogar ein Automorphismus.

Analog findet man  $S_n \subset G_n$ .

2. Zeige:  $C_2^m \cap S_n = \{id\}$ .

Annahme: Es sei  $id \neq \pi \in C_2^m \cap S_n$ . Somit gibt es eine Teilmenge  $R \subset I_n$ , auf der  $\pi$  nicht trivial operiert. Es gilt:

$$\pi(1, \dots, 1) = \pi_R(1, \dots, 1) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \text{ mit } \epsilon_i = \begin{cases} \epsilon_i = -1, & \text{wenn } i \in R \\ \epsilon_i = 1, & \text{wenn } i \notin I_n \setminus R \end{cases},$$

wobei für mindestens ein  $i$  gilt  $\epsilon_i = -1$ . Aber für alle  $\sigma \in S_n$  gilt:

$$\sigma(1, \dots, 1) = (1, \dots, 1).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme  $\pi \neq id$ .

3. Die Gruppen  $C_2^m$  und  $S_n$  kommutieren nicht miteinander. Sei  $a = (a_1, \dots, a_n) \in W_n$ . Für Elemente  $\sigma \in S_n$  und  $\tau = \tau_R \in C_2^m$  gilt:

$$\sigma \tau \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(R)},$$

denn für  $\tau_R(a_1, \dots, a_n) = (\dots, \epsilon_i a_i, \dots)$ , mit  $\epsilon_i = \begin{cases} \epsilon_i = -1, & \text{wenn } i \in R \\ \epsilon_i = 1, & \text{wenn } i \notin I_n \setminus R \end{cases}$  gilt

$$\begin{aligned} (\sigma \tau_R \sigma^{-1})(a_1, \dots, a_n) &= \sigma \circ \tau_R(\dots, a_{\sigma^{-1}(i)}, \dots) \\ &= \sigma(\dots, \epsilon'_i a_{\sigma^{-1}(i)}, \dots) \\ &= (\dots, \epsilon'_i a_i, \dots) = \tau_{\sigma(R)}, \end{aligned}$$

mit  $\epsilon'_i \in \{\pm 1\}$ ,  $\epsilon'_i = -1 \Leftrightarrow i \in \sigma(R)$ .

Verknüpfen wir entsprechend zwei Elemente  $\tau_T \sigma_1, \tau_R \sigma_2 \in \langle C_2^n, S_n \rangle \subset G_n$  mit  $\sigma_j \in S_n$  und  $\tau_R, \tau_S \in C_2^n$  mit Teilmengen  $S, R \subset I_n$ , so gilt:

$$\tau_S \sigma_1 \tau_R \sigma_2(a_1, \dots, a_n) = \tau_S \sigma_1 \tau_R \sigma_1^{-1} \sigma_1 \sigma_2(a_1, \dots, a_n).$$

#### 4. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota: S_n &\rightarrow \text{Aut}(C_2^n) \\ \sigma &\mapsto \iota_\sigma: C_2^n \rightarrow C_2^n \\ &\tau_R \mapsto \tau_{\sigma(R)} \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus von  $S_n$  in die Automorphismengruppe von  $C_2^n$ . Mit ihr wird die Menge  $C_2^n \times S_n$  zu einer Gruppe; nämlich zum semidirekten Produkt  $C_2^n \rtimes_\iota S_n$ .

#### 5. Es bleibt zu zeigen, dass $G'_n := C_2^n \rtimes_\iota S_n = G_n := \text{Aut}(W_n)$ ist.

Wir bemerken zunächst, dass gilt:

(\*) Für alle  $n$  operiert  $G'_n$  transitiv auf der Menge  $\{\pm e_i | i \in I_n\}$  der signierten Basisvektoren.

Wir zeigen die Behauptung über Induktion nach  $n$ .

Die Aussage ist offenbar richtig für  $n = 1$ .

Es gelte  $G'_n = G_n$  für ein  $n \geq 1$ . Zeige die Behauptung für  $n + 1$ :

Wir fassen  $C_2^n$  als Untergruppe  $(*, \dots, *, 1)$  von  $C_2^{n+1}$  und  $S_n$  als Untergruppe von  $S_{n+1}$  auf, die den  $(n + 1)$ .ten Eintrag eines Elementes von  $W_{n+1}$  festhält. Dann ist  $G'_n = C_2^n \rtimes S_n \hookrightarrow C_2^{n+1} \rtimes S_{n+1} = G'_{n+1}$ , ebenso wie  $G_n \hookrightarrow G_{n+1}$  die Fixgruppe von  $e_{n+1}$ , wenn wir  $W_n$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  auffassen.

Sei nun  $\alpha \in G_{n+1}$ . Wegen (\*) existiert ein  $\beta \in G'_{n+1}$  mit  $\beta \alpha(e_{n+1}) = e_{n+1}$ . Dann ist  $\beta \alpha$  ein Element von  $G_n \hookrightarrow G_{n+1}$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $G'_n = G_n$ , d.h.  $\beta \alpha \in G'_n \hookrightarrow G'_{n+1} \hookrightarrow G_{n+1}$ , also  $\alpha \in G'_{n+1}$ . Deshalb ist  $G'_{n+1} = G_{n+1}$ . □

**Korollar 1.7.** Die Automorphismengruppe  $G_n$  von  $W_n$  operiert transitiv auf der Menge  $\mathcal{W}_{n,k}$ , wobei  $0 \leq k \leq n$  ist. Weiter gilt:

$$|G_n| = |\text{Aut}(\mathcal{W}_{n,k})| = 2^n n! .$$

*Beweis.* Jeder Automorphismus auf der Menge der Knoten lässt sich eindeutig zu einem Automorphismus auf der Menge  $\mathcal{W}_{n,k}$  fortsetzen.

Die Kardinalität erhält man aus den Kardinalitäten von  $C_2^n$  und  $S_n$ . □

**Beispiel 1.8.** Es gilt:

$$\text{Aut}(W_3) = C_2^3 \rtimes_\iota S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \rtimes_\iota \left( e_{\sigma(1)} \middle| e_{\sigma(2)} \middle| e_{\sigma(3)} \right) \middle| \sigma \in S_3 \right\}.$$

Dabei ist  $\iota$  wie oben. Zu einem Element  $\sigma \in S_n$  sei  $(e_{\sigma(1)} | e_{\sigma(2)} | e_{\sigma(3)})$  die Matrix mit Spaltenvektoren  $e_{\sigma(i)}$ . Diese ist eine Matrix, mit genau einer 1 in jeder Zeile und Spalte und Nullen sonst. Man bezeichnet solche Matrizen als Permutationsmatrizen.

Diese Gruppe hat entsprechend  $2^3 \cdot 3! = 48$  Elemente.

Hält man bei einem Würfel zwei gegenüberliegende Ecken fest und dreht um die entsprechende Raumdiagonale, so erhält man einen Automorphismus des Würfels. Dieser entspricht einer 3-zähligen Permutation aus  $S_3$ , etwa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Permutation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

liefert eine Drehung entlang einer weiteren Raumdiagonalen. Auf diese Weise kann man alle Elemente der Automorphismengruppe des Würfels finden.

**Satz 1.9.** *Die Automorphismengruppe von  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  hat folgende Darstellung:*

$$\text{Aut}(W_n) \cong \text{Aut}(B(0, 1)) = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \times_{\iota} \left( e_{\sigma(1)} \mid \cdots \mid e_{\sigma(n)} \right) \mid \sigma \in S_n \right\} \quad (2)$$

Hierbei sei  $e_i$  der Spaltenvektor mit einer 1 an der  $i$ -ten Stelle und Nullen sonst.

*Beweis.* Dies ergibt sich direkt aus den Definitionen in 1.6. □

Man kann entsprechend dieser Darstellung auch eine Zerlegung der Automorphismengruppe von  $\mathbb{F}_2^n$  angeben. Hierbei überträgt sich die multiplikative Struktur der Menge  $\{\pm 1\}$  auf die additive Struktur der Menge  $\mathbb{F}_2$ . Entsprechend überträgt sich eine Multiplikation eines Elementes  $\tau \in C_2^n$  auf eine Addition mit einem Vektor  $x \in \mathbb{F}_2^n$ .

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels arbeite ich analog zu dem Artikel "Polya Theory of Hypercubes" von P.W.H Lemmens [4]. Insbesondere betrachte ich im Folgenden die Wirkung von  $G_n$  ausschließlich auf der Menge  $\{\pm e_i\}$  der signierten Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^n$ .

Die Angabe eines Elements  $\tau \in C_2^n$  ist äquivalent zur Angabe der Teilmenge

$$R = \{i_1, \dots, i_r\} \subset I_n,$$

für die gilt:

$$R = \{i \in I_n \mid \tau(a_i) = -a_i\}$$

(vgl. 1.6). Betrachten wir die Operation von  $\tau$  auf  $\{\pm e_i \mid i \in I_n\}$  so gilt

$$\tau = \tau_R = (e_{i_1}, -e_{i_1}) \cdots (e_{i_r}, -e_{i_r}) =: (i_1, -i_1) \cdots (i_r, -i_r)$$

ist Produkt aus disjunkten Transpositionen.

Ein Element  $\sigma \in G_n/C_2^n \cong S_n$  operiert auf der Menge

$$II_n = \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\} = I_n \dot{\cup} -I_n$$

durch vertauschen der Koordinaten (vgl. 1.6). Hierbei identifizieren wir  $I_n$  mit der Menge  $\{e_i, i \in I_n\}$  und entsprechend  $-I_n$  mit der Menge  $\{-e_i, i \in I_n\}$ .

Es lässt sich jedes Element aus  $G_n = C_2^n \rtimes S_n$  als Komposition von Zykeln mit Einträgen  $\pm e_i, i \in \{1, \dots, n\}$  schreiben. Dabei können für jedes  $i$  die Elemente  $e_i$  und  $-e_i$  in demselben Zykel oder in disjunkten Zykeln einer Permutation auftreten.

**Satz 1.10.** *Für eine Permutation  $\pi$  auf der Menge  $\{\pm e_i\}_{i=1, \dots, n}$  der Einheitsvektoren gilt*

$$\pi \in G_n \Leftrightarrow \pi(-i) = -\pi(i), \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

*Beweis.* “ $\Rightarrow$ ” Jedes Element aus  $G_n$  entspricht nach 1.9 einer linearen Abbildung in  $\mathbb{R}^n$ . “ $\Leftarrow$ ”: Die Abbildung  $\pi : II_n \rightarrow II_n$  lässt sich zu einer linearen Abbildung  $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fortsetzen durch  $\tilde{\pi}(e_i) = e_{\pi(i)}$ , wobei für  $i \in I_n$  gelte:  $e_{-i} = -e_i$ . Also ist  $\pi$  ein Automorphismus von  $W_n$ . □

**Definition 1.11.** [Twins und Doubles]

1. In  $G_n$  nennen wir ein Paar aus zwei disjunkten Zykeln  $(i_1, \dots, i_m)(j_1, \dots, j_m)$  der Länge  $m$ , ein  $m$ -*Paar* oder **m-Twin**, falls  $i_l = -j_l$  für alle  $l = 1, \dots, m$  ist.
2. Einen Zykel  $(i_1, \dots, i_{2m})$  der Länge  $2m$  nennen wir **m-Double**, wenn  $i_l = -i_{m+l}$  für alle  $l = 1, \dots, m$  ist.

**Satz 1.12.** *Die Gruppe  $G_n = C_2^n \rtimes S_n$  wird erzeugt von der Menge der  $m$ -Twins und  $m$ -Doubles,  $m \leq n$ .*

*Beweis.* Wir haben bereits gesehen (Satz 1.9), dass gilt

$$G_n := \text{Aut}(W_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \times_{\iota} \left( e_{\sigma(1)} \mid \dots \mid e_{\sigma(n)} \right) \mid \sigma \in S_n \right\}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass jeder Erzeuger der Gruppe aus 1.9 ein  $m$ -*Twin* oder  $m$ -*Double* ist.

1. Sei  $\tau \in C_2^n$  von der Form

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

und  $i_1, \dots, i_r$  die Koordinaten, auf denen  $\tau$  nicht trivial operiert, d.h. die Stellen mit dem Eintrag  $-1$ .

Dann gilt, dass  $\tau = (i_1, -i_1) \dots (i_r, -i_r)$  ein Produkt von  $r$  vielen Doubles ist.

2. Weiter sei

$$G_n \ni \sigma \left( e_{\sigma'(1)} \mid \dots \mid e_{\sigma'(n)} \right)$$

mit  $\sigma'$  aus  $S_n$ .

Ohne Einschränkung sei nun  $\sigma' = (1, \dots, r) \in S_n$ .

Dann ist  $\sigma = (1, \dots, r)(-1, \dots, -r) \in G_n$  ein  $r$ -Twin. □

### 1.3 Die Konjugationsklassen von $G_n$

**Definition 1.13** (Zykeltyp). Es sei  $\sigma = (i_1, \dots, i_{r_1}) \dots (j_1, \dots, j_{r_t}) \in S_n$  Produkt disjunkter Zyklen und  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_t \in I_n$  mit  $\sum_{k=1}^t r_k = n$ . Dann nennen wir die Folge  $(r_1, \dots, r_t)$  den Zykeltyp von  $\sigma$ .

Für die Gruppen  $S_n$  und  $C_2^n$  sind die Konjugationsklassen bekannt. Wir wissen bereits:

**Satz 1.14** (Konjugationsklassen der  $S_n$ ). *Zwei Elemente von  $S_n$  sind genau dann konjugiert zueinander, wenn ihre Zykeltypen übereinstimmen. Deshalb gibt es eine Bijektion zwischen den Konjugationsklassen und ihren Zykeltypen.*

Um die Konjugationsklassen der Gruppe  $G_n$  zu bestimmen benötigen wir folgende Definitionen.

**Definition 1.15** (Zentralisator). Den Stabilisator  $Stab(r)$  von  $r \in G$  unter der Konjugationsoperation nennt man auch den **Zentralisator**

$$Z_G(r) = \{g \in G \mid grg^{-1} = r\}$$

von  $r$ .

Als Stabilisator ist  $Z_G(r) \subset G$  eine Untergruppe. Man kann den Zentralisator nicht nur für Elemente, sondern auch für beliebige Teilmengen  $M \subset G$  durch

$$Z_G(M) = \{g \in G \mid grg^{-1} = r \ \forall r \in M\}$$

definieren. Als Spezialfall  $M = G$  erhält man das Zentrum  $Z(G)$ .

Wir setzen  ${}^g\pi := g\pi g^{-1}$  für ein  $g \in G$ . Weiter bezeichnen wir zu einem Element  $\pi \in G_n$ , die Konjugationsklasse von  $\pi$  mit  ${}^{G_n}\pi$ . Mit voriger Überlegung gilt dann:

$$\begin{aligned} G/Z_G(\pi) &\xrightarrow{\cong} {}^{G_n}\pi \\ g &\mapsto {}^g\pi. \end{aligned}$$

**Definition 1.16** (SCT). Zu einem Element  $\pi \in G_n$  definieren wir

- $t_i$  = Anzahl der Twins der Länge  $i$  und
- $d_i$  = Anzahl der Doubles der Länge  $i$ .

Weiter nennen wir den Zykeltyp eines Elementes  $\pi$  aus  $G_n$ , der entsprechend Satz 1.12 nur von der Anzahl der Twins und Doubles in  $\pi$  abhängt, den signierten Zykeltypen von  $\pi$ ;  $SCT(\pi)$  (signed cycletyp)

$$SCT(\pi) = 1_{d_1}^{t_1} \dots n_{d_n}^{t_n}.$$

Wir lassen Einträge im SCT aus, wenn sie mit Null indiziert sind.

Das folgende Lemma ist für die Symmetrische Gruppe  $S_N$  bereits bekannt. Man kann es entsprechend auch für die Gruppe  $G_n$ , die auf der Menge der signierten Einheitsvektoren operiert, modifizieren.

**Lemma 1.17.** *Sei  $\tau = (i_1, \dots, i_t)(-i_1, \dots, -i_t) \in G_n$  ein Twin und  $\delta = (j_1, \dots, j_d, -j_1, \dots, -j_d) \in G_n$  ein Double. Dann gilt*

$$\pi\tau\pi^{-1} = (\pi(i_1), \dots, \pi(i_t))(\pi(-i_1), \dots, \pi(-i_t)) \ \forall \pi \in G_n, \quad (3)$$

$$\pi\delta\pi^{-1} = (\pi(j_1), \dots, \pi(j_d))(\pi(-j_1), \dots, \pi(-j_d)) \ \forall \pi \in G_n. \quad (4)$$

*Beweis.* Sei zunächst  $\tau = (i_1, \dots, i_t)(-i_1, \dots, -i_t)$ . Dann gilt:

$$\pi\tau\pi^{-1}(k) = \begin{cases} k, & \text{falls } (\pi^{-1}(k) \notin \{\pm i_1, \dots, \pm i_t\}) \Leftrightarrow (k \notin \{\pi(\pm i_1), \dots, \pi(\pm i_t)\}) \\ \pi(i_{l+1}), & \text{falls } k = \pi(i_l) \end{cases}.$$

Wobei in dieser Schreibweise  $i_{n+1} = i_1$  gelten soll.

Hierbei ist zu beachten, dass  $\pi(-i_l) = -\pi(i_l)$ , da  $\pi \in G_n$  ist. Also ist zu einem Element  $\tau$  auch jedes Element  $\pi\tau\pi^{-1} = \tau'$  ein t-Twin.

Man zeigt die Aussage für einen Double  $\delta$  analog. □

**Satz 1.18.** *Zwei Permutationen  $\pi, \pi' \in G_n$  sind genau dann konjugiert, wenn sie den selben signierten Zykeltyp (SCT) haben.*

*Beweis.* Folgerung aus Lemma 1.17 □

**Bemerkung 1.19.** Jeder  $SCT(1_{d_1}^{t_1} \dots n_{d_n}^{t_n})$  mit  $\sum_{i=1}^n i(t_i + d_i) = n$  entspricht genau einer Konjugationsklasse in  $G_n$ .

**Lemma 1.20.** *Sei  $\pi \in G_n$  mit Zykeltyp  $SCT(\pi) = 1_{d_1}^{t_1} \dots n_{d_n}^{t_n}$ . Dann gilt*

$$\#(Z_G(\pi)) = \prod_{i=1}^n d_i! t_i! (2i)^{d_i + t_i}.$$

*Beweis.* Jedes Element  $\pi \in G_n$  ist Produkt von Twins und Doubles. Nach Lemma (1.17) bleibt die Zykelstruktur jedes Elementes unter Konjugation erhalten. Da  $\sum i(t_i + d_i) = n$  gilt, ist der SCT ein vollständiger Zykeltyp auf der Menge  $\{\pm e_i\}$  der signierten Standardbasisvektoren, (der insbesondere auch die 1-Zykel enthält). Die Mächtigkeit des Zentralisators ist also das Produkt der Mächtigkeiten der Zentralisatoren (über  $G_m$ ) der  $m$ -Twins mit dem der  $m$ -Doubles.

Der Zentralisator eines Elementes  $\pi$  enthält nach Definition genau die Elemente, die bezüglich Konjugation trivial auf  $\pi$  operieren. Wir zählen nun die entsprechenden Freiheitsgrade.

1. Sei  $\pi$  das Produkt von  $t_m$  vielen  $m$ -Twins. Dann gibt es genau  $t_m!$  Möglichkeiten, diese  $m$ -Twins anzuordnen. Weiter wird ein fester  $m$ -Twin  $(i_1, \dots, i_m)(-i_1, \dots, -i_m)$  unter Konjugation auf sich selbst abgebildet, wenn die Koordinaten entsprechend dem Zykel  $(i_1, \dots, i_m)$  zyklisch permutiert werden. Dieser Zykel hat offenbar Ordnung  $m$ . Des Weiteren kann man die beiden Zykel  $(i_1, \dots, i_m)$  und  $(-i_1, \dots, -i_m)$  unter Konjugation vertauschen.
2. Sei nun  $\pi$  entsprechend das Produkt von  $d_m$  vielen  $m$ -Doubles. Dann können diese Doubles (wie in 1) unter Konjugation permutiert werden. Ein Double ist formal ein Zykel der Länge  $2m$ . Eine Konjugation operiert trivial auf einem solchen Zykel, wenn die Einträge zyklisch vertauscht werden ( $2m$  Möglichkeiten). □

**Satz 1.21.** *Sei  $\pi \in G_n$  mit  $SCT = 1_{d_1}^{t_1} \dots n_{d_n}^{t_n}$ . Dann gilt*

$$|G_n \pi| = \frac{|G_n|}{|Z(\pi)|} = \frac{2^n n!}{\prod_{i=1}^n d_i! t_i! (2i)^{d_i + t_i}}. \quad (5)$$

*Beweis.* Dies ergibt sich aus 1.20 und den Eigenschaften von Zentralisatoren. □



## 2 Färbungsprobleme

Die folgenden Definitionen und Sätze entnehme ich dem Skript von Prof. Dr. E.U. Gekeler zur Kombinatorik und Graphentheorie [3].

**Definition 2.1** (Zykeltyp). (vgl.1.13) Zu einem Element  $\sigma \in S_N$  sei  $c_i = c_i(\sigma)$  die Zahl der Zyklen der Länge  $i$  in der Zerlegung von  $\sigma$  in disjunkte Zyklen. Dann heißt

$$c(\sigma) := (c_1, \dots, c_N) := 1^{c_1} \dots n^{c_N}$$

der Zykeltyp von  $\sigma$ . Der Zykeltyp liefert eine Zerlegung

$$\sum_{i=1}^N i \cdot c_i = N$$

von natürlichen Zahlen; solche Zerlegungen heißen Partitionen von  $N$ .

**Definition 2.2** (Zykelzeiger). Die endliche Gruppe  $G$  operiere auf der endlichen Menge  $\mathcal{X}$  mit  $|\mathcal{X}| = N$ . Für  $g \in G$  sei  $c(g) = (c_1(g), \dots, c_N(g))$  der Zykeltyp von  $g$  auf  $\mathcal{X}$ . Betrachte  $N$  verschiedene Unbestimmte  $X_1, \dots, X_N$  und ordne  $g \in G$  das Monom  $X_1^{c_1(g)} X_2^{c_2(g)} \dots X_N^{c_N(g)}$  zu. Der Ausdruck

$$Z_{G,(X)}(X_1, \dots, X_N) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X_1^{c_1(g)} X_2^{c_2(g)} \dots X_N^{c_N(g)}$$

heißt der Zykelzeiger von  $G$  auf  $\mathcal{X}$ .

**Bemerkung 2.3.** 1. Ordnen wir  $X_i$  das Gewicht  $i$  zu, so ist  $Z_{G,\mathcal{X}}$  ein isobares Polynom vom Gewicht  $n$ , da gilt  $\sum_{i=1}^N i \cdot c_i(g) = N$ .

2. Ist  $S \subset G$  ein Repräsentantensystem von Konjugationsklassen, so gilt

$$Z_{G,(X)}(X_1, \dots, X_N) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in S} |Gg| X_1^{c_1(g)} X_2^{c_2(g)} \dots X_N^{c_N(g)}.$$

Seien  $|(X)| = N$  und  $|\mathcal{Y}| = r$ . Operiert  $G$  auf  $(X)$ , so operiert  $G$  auch von links auf  $\text{Abb}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) =: \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$  (die Menge der Abbildungen von  $\mathcal{X}$  nach  $\mathcal{Y}$ ) durch  $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$  für  $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $g \in G$ .

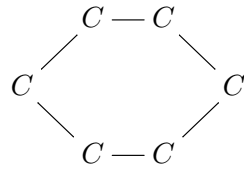
**Satz 2.4** (Burnside, 1897). Die Zahl der Bahnen von  $G$  auf  $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$  ist

$$Z_{G,\mathcal{X}}(r, \dots, r) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{c_1(g) + \dots + c_N(g)}.$$

*Beweis.* [3, S.100,f.] □

Diese Zahl entspricht der Anzahl unterschiedlicher (im Sinne der Gruppenoperationen) Färbungen einer Menge  $\mathcal{X}$  mit  $r$  vielen Farben. Wir nennen die zugehörige Menge von Färbungen entartet, da sie auch alle Färbungen mit weniger als  $r$  Farben enthält. Die Abbildungen von  $\mathcal{X}$  nach  $\mathcal{Y}$  müssen nicht surjektiv sein.

**Beispiel 2.5.** Wir betrachten die Drehungen und Spiegelungen des Moleküls Benzol als Symmetrieoperationen auf den 6  $C$ -Atomen (Ecken).



Diese entsprechen eins zu eins Elementen der Symmetriegruppe  $D_6$  eines regelmäßigen 6-Ecks. Hierbei identifizieren wir die 6  $C$ -Atome von Benzol mit den 6 Ecken des Polyeders.

$$D_6 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^6 = \tau^2 = id, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$$

Entsprechend finden wir den Zykelzeiger

$$Z_{D_6}(X_1, \dots, X_6) = \frac{1}{12}(X_1^6 + 3X_1^2X_2^2 + 4X_2^3 + 2X_3^2 + 2X_6).$$

Benzol kann an jedem  $C$ -Atom verschiedene Reste binden. Nach Satz (2.4) ist die Anzahl Möglichkeiten,  $r$  verschiedene Reste an den 6  $C$ -Atomen zu binden, gleich  $Z_{D_6}(r, \dots, r)$ . Für  $r \leq 6$  ergeben sich folgende Werte:

$r$	$Z_{D_6}(r, \dots, r)$
1	1
2	13
3	92
4	430
5	1505
6	4291

Dabei zählen wir zum Beispiel bei den 3-Färbungen auch die 2- und 1-Färbungen mit. Die Anzahl der "echten" 3-Färbungen ist entsprechend:

$$92 - 3 \cdot 13 + 3 = 56.$$

**Bemerkung 2.6.** Diese Aussagen sind noch recht grob. Um die Anzahl verschiedener Färbungen einer bestimmten Art (etwa die Anzahl der Isomere von Trichlor-Phenol) zu berechnen, benötigen wir eine feinere Zerlegung der Menge der  $r$ -Färbungen.

**Satz 2.7** (Polya, 1937). Seien  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  und  $G$  wie in der Situation von 2.4; wir schreiben  $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_r\}$  und  $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} = \mathcal{F}$ . Für  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}_0^r$  mit  $w(a) := \sum_{j=1}^r a_j = N$  sei

$$\mathcal{F}(a) := \{f \in \mathcal{F} \mid |f^{-1}(y_j)| = a_j\},$$

so dass also gilt  $\mathcal{F} = \dot{\cup}_{w(a)=N} \mathcal{F}(a)$ ; ferner ist  $\mathcal{F}(a)$  stabil unter der Operation von  $G$ , d.h.  $\mathcal{F}(a)$  ist disjunkte Vereinigung von Bahnen von  $G$  auf  $\mathcal{F}$ .

Für jedes  $y_j \in \mathcal{Y}$  sei  $Y_j$  eine Unbestimmte. Dann gilt:

$$Z_{G, \mathcal{X}}\left(\sum_{j=1}^r Y_j, \sum_{j=1}^r Y_j^2, \dots, \sum_{j=1}^r Y_j^N\right) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}_0^r \\ w(a)=N}} |G \backslash \mathcal{F}(a)| Y_1^{a_1} Y_2^{a_2} \dots Y_r^{a_r}. \quad (6)$$

*Beweis.* [3, S. 101-102]

□

**Beispiel 2.8.** Wir haben gesehen, dass es 92 verschiedene 3-Färbungen eines 6 – *Ecks* gibt. Wir wollen nun die Anzahl von Färbungen der Art: eine Ecke blau und 3 Ecken gelb bestimmen. Dabei bestimmen wir automatisch für die übrigen 2 Ecken die Markierung farblos. Nach Satz 2.7 ist die Anzahl von verschiedenen Färbungen dieser Art genau der Koeffizient von  $Y_1^1 Y_2^2 Y_3^3$  in  $Z_{D_6}(\sum_{j=1}^r Y_j, \dots, \sum_{j=1}^r Y_j^6)$ . Bei genauerem Hinschauen sehen wir, dass Terme dieser Art nur in 2 Summanden aus  $Z_{D_6}$  auftreten.

$$Z_{D_6}(X_1, \dots, X_6) = \frac{1}{12} \left( \underbrace{X_1^6}_I + \underbrace{3X_1^2 X_2^2}_{II} + 4X_2^3 + 2X_3^2 + 2X_6 \right)$$

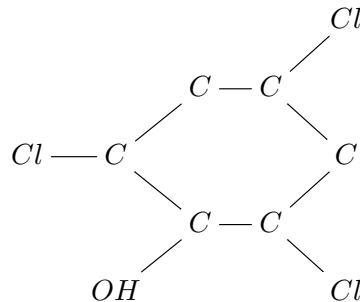
Das Auswerten dieser Terme ergibt:

$$I : 1/12 \binom{6}{1, 2, 3} = \frac{1}{12} \frac{6!}{1!2!3!} = 5,$$

$$II : 1/12(3 \cdot 2 \cdot 2) = 1.$$

Der Koeffizient von  $Y_1^1 Y_2^2 Y_3^3$  in diesem Polynom ist folglich 6.

Entsprechend kann man für das chemische Molekül Benzol schlussfolgern; substituiert man an einem *C – Atom* eine *OH – Gruppe*, und an dreien ein Atom Chlor(*Cl*), so gibt es dafür 6 verschiedene Möglichkeiten (d.h. *Trichlor – Phenol* hat 6 Isomere).



### 3 Berechnung des Zykelzeigers

In Kapitel 1 haben wir eine Darstellung der Automorphismengruppe  $G_n$  des  $n$ -dimensionalen Würfels erhalten. Jedes Element  $\pi \in G_n$  ist Produkt aus *Twins* und *Doubles*. Diese beschreiben die Permutationen der signierten Einheitsvektoren  $\{\pm e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entsprechend gibt es in  $\mathbb{F}_2^n$  zu jedem Vektor  $e_i$  genau einen orthogonalen Untervektorraum  $U$  der Dimension  $n - 1$ . Wie bereits in (1.4) gesehen, definiert dieser zwei affine Unterräume entsprechender Dimension. Ordnet man diese den Vektoren  $e_i$  bzw.  $-e_i$  zu, so erhält man eine kanonische Abbildung von der Menge der Koordinatenachsen in die Menge der  $n - 1$  Unterwürfel.

**Satz 3.1.** *Ist  $G_n = \text{Aut}(W_n)$ ,  $S \subset G_n$  Repräsentantensystem der Konjugationsklassen und  $\mathcal{W}_{n,n-1} = \mathcal{W}_{-1}$  die Menge der Unterwürfel der Dimension  $n - 1$ , so gilt*

$$Z_{G_n, \mathcal{W}_{-1}} = \frac{1}{2^{n!}} \left( \sum_{\pi \in S} |G_n \pi| X_1^{2t_1} X_2^{2t_2+d_1} \dots X_{2j-1}^{2t_{2j-1}} X_{2j}^{2t_{2j}+d_j} \dots \right) \quad (7)$$

Dabei soll jedem  $\pi \in S$  der  $SCT(\pi) = 1_{d_1}^{t_1} \dots n_{d_n}^{t_n}$  zugeordnet sein.

*Beweis.* Nach Definition 1.11 besteht ein  $m - \text{Twins}$  aus zwei Zykeln der Länge  $m$ , ein  $m - \text{Double}$  ist ein Zykel der Länge  $2m$ .  $\square$

**Definition 3.2.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Zu einem Polynom  $f \in R[Z]$  bezeichnen wir mit  $\text{koef}_{Z^r}(f)$  den Koeffizienten von  $Z^r$ .

Wir wenden dies für  $R = \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_N]$  oder  $R = \mathbb{Q}[Y_1, \dots, Y_r]$  an. De Bruijn [6, S.9,f] [7] berechnet sehr anschaulich den Zykelzeiger der Gruppe  $S_n$  als Koeffizienten eines formal unendlichen Polynoms. Daraus kann man dann den Zykelzeiger der Gruppe  $G_n$  auf der Menge  $\mathcal{W}_{-1}$  ableiten (siehe [4]).

**Bemerkung 3.3.** Man kann zeigen:

$$Z_{G_n, \mathcal{W}_{-1}} = \text{koef}_{Z^n} \left( \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{X_k^2 + X_{2k}}{2k} Z^k \right) \right).$$

Im Folgenden möchte ich auch für  $k \neq n, n - 1$  den Zykelzeiger von  $G_n$  auf  $\mathcal{W}_{n,k}$  berechnen. Dazu muss für jede Konjugationsklasse aus  $G_n$  der Zykeltyp auf der Menge der  $k$ -Würfel berechnet werden.

**Arbeitsweise:** Ist  $W_k \in \mathcal{W}_{n,k}$  ein  $k$ -Unterwürfel, so kann man schreiben

$$W_k = x + V, \quad x \in \mathbb{F}_2^n, \quad \dim(V) = k.$$

(vgl. 1.4). Dieses  $x$  ist *modulo*  $V$  eindeutig. Im Folgenden zählen wir die invarianten Äquivalenzklassen von  $x \equiv \{0, 1\}^n \pmod{V}$  unter Operation von Potenzen eines Elementes  $\pi \in G_n$ . Man beachte, dass ein Zykel der Länge  $m$  trivial operiert unter  $\pi^p$  genau dann, wenn gilt  $m|p$ .

Da jedes Element aus  $G_n$  Produkt aus  $m - \text{Twins}$  und  $m - \text{Doubles}$  ist und diese alle  $n$  Achsen abdecken, ist es zweckmäßig, zunächst nur die Wirkung auf einer  $m$ -Teilmenge von  $I_n$  zu berücksichtigen, (vgl. [4]).

**Lemma 3.4.** *Es seien  $\tau_m = (1, \dots, m)(-1, \dots, -m)$ , mit  $m, p \in \mathbb{N}$ . Weiter seien hier  $g := ggT(m, p)$  und  $\bar{p} := m/g$ . Die Anzahl der  $r$ -Teilmengen von  $W_m$ , die invariant unter  $\tau_m^p$  sind, ist der Koeffizienten von  $X^r$  in*

$$(1 + 2X^{\bar{p}})^g.$$

*Beweis.* Eine  $r$ -Teilmenge von  $\{\pm 1\}^m$  ist invariant unter  $\tau_m^p$  genau dann, wenn sie invariant unter  $\tau_m^g$  ist.

Weiter zerfällt  $\tau_m^g$  in  $g$  viele  $\bar{p}$ -Twins. Eine  $r$ -Teilmenge, die invariant unter  $\tau_m^g$  ist, muss von diesen Twins wieder auf sich selbst abgebildet werden und in jedem dieser  $g$  vielen Twins denselben Wert 0 oder 1 haben. Schreiben wir  $r = t \cdot \bar{p}$  für  $t \in \mathbb{N}$ , so folgt, dass die Anzahl der invarianten  $r$ -Teilmengen gleich  $\binom{g}{t} 2^t$  ist.

Man sieht leicht (Binom. Lehrsatz), dass diese Zahl gleich  $\text{koef}_{X^r}((1 + 2X^{\bar{p}})^g)$  ist.  $\square$

**Lemma 3.5.** *Seien nun  $\delta_m = (1, \dots, m, -1, \dots, -m)$ , mit  $m, p \in \mathbb{N}$ . Wir definieren entsprechend  $h = ggT(2m, p)$  und  $\hat{p} = 2m/h$ . Die Anzahl der  $r$ -Teilmengen, die invariant unter  $\delta_m^p$  sind, ist gleich dem Koeffizienten von  $X^r$  in*

$$\begin{aligned} & 1 && , \text{ wenn } h|m; \\ (1 + 2X^{\hat{p}})^{h/2} && , \text{ wenn } h \nmid m. \end{aligned}$$

*Beweis.*  $\delta_m$  ist ein Zykel der Länge  $2m$ . Eine  $r$ -Teilmenge  $R \subset \{\pm 1\}^n$  ist invariant unter  $\delta_m^p$  genau dann, wenn  $R$  invariant unter  $\delta_m^h$  ist ( $h = ggT(2m, p)$ ).

1.  $h|m$

Für eine  $r$ -Teilmenge  $R$  gilt:

$$\delta_m^h(R) = R \Leftrightarrow (\delta_m^h(R))^a = R \quad \forall a \in \mathbb{N}.$$

Nun gilt aber  $h$  teilt  $m$ . Es existiert also ein  $a \in \mathbb{N}$  mit  $ha = m$ .

$$\text{Aber } \delta_m^m(R) = (1, -1) \dots (m, -m)(R) = -R.$$

Es folgt: keine  $r$ -Teilmenge ist invariant.

2.  $h \nmid m$

Da nach Voraussetzung  $h \nmid m$  und  $h|2m$  folgt direkt, dass  $2|h = ggT(2m, p)$ ; insbesondere ist  $h > 1$ .

Es zerfällt  $\delta_m^h$  in  $h/2$  viele  $\hat{p}$ -Twins. Es muss also  $r = \hat{p} \cdot s$  für ein  $s \in \mathbb{N}$  gelten.  $\square$

**Lemma 3.6.** *Sei nun  $\pi \in G_n$  und  $SCT(\pi) = 1_{d_1}^{t_1} \dots n_{d_n}^{t_n}$ . Wir definieren zu den natürlichen Zahlen  $m$  und  $p$*

$$g = ggT(m, p), \quad \bar{p} = m/g, \quad h = ggT(2m, p), \quad \hat{p} = 2m/h,$$

*und entsprechend die Polynome*

$$\begin{aligned} f_{m,p}(X) &= (1 + 2X^{\bar{p}})^g, \\ g_{m,p}(X) &= (1 + 2X^{\hat{p}})^{h/2} \quad \text{falls } h \nmid m, \\ g_{m,p}(X) &= 1 \quad \text{falls } h|m. \end{aligned}$$

*Die Anzahl der  $q$ -Teilmengen von  $\{\pm 1\}^n$ , die invariant unter  $\pi^p$  sind ist gleich dem Koeffizienten von  $X^q$  in*

$$F_p(X) = \prod_{m=1}^n (f_{m,p}(X))^{t_m} \cdot (g_{m,p}(X))^{d_m}.$$

*Beweis.* Die  $q$ -Teilmengen sind disjunkt zerlegt über die *Twins* und *Doubles* von  $\pi \in G_n$ . Die Anzahlen der invarianten Teilmengen aus (3.4) und (3.5) einer Zerlegung multiplizieren sich direkt auf.  $\square$

**Bemerkung 3.7.** Ist eine  $q$ -Teilmenge  $Q$  invariant unter  $\pi^d$  für ein  $\pi \in G_n$ , so ist dieses  $Q$  auch invariant unter jeder Potenz von  $\pi^d$ . Wir können also nicht direkt auf den Zykeltyp schließen, da wir keine Zykel einer Länge  $p$  gezählt haben, sondern alle Mengen  $Q$  in Zykeln der Länge  $d|p$ .

Die Möbius-Inversion oder auch Möbiussche Umkehrformel erlaubt es, eine zahlentheoretische Funktion aus ihrer summatorischen Funktion zu rekonstruieren.

**Lemma 3.8** (Möbius Inversion). [2]  
Gegeben seien eine zahlentheoretische Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

und ihre summatorische Funktion

$$F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Dann gilt für jede natürliche Zahl  $n$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d),$$

wobei  $\mu$  die Möbiusfunktion bezeichnet.

**Satz 3.9.** Die Anzahl der Zyklen der Länge  $p$  unter einem Element  $\pi \in G_n$  auf der Menge  $\mathcal{W}_{n,n-q}$  entspricht dem Koeffizienten von  $X^q$  in

$$Q_p(X) = \frac{1}{p} \sum_{d|p} \mu(p/d) \cdot F_d(X). \quad (8)$$

*Beweis.*  $\square$

Dieses Vorgehen liefert uns einen Algorithmus zur Bestimmung des Zykeltyps eines Elementes  $\pi \in G_n$  auf der Menge  $\mathcal{W}_{n,k}$  für beliebiges  $n$  und  $k$ . Dies ist allerdings von Hand sehr mühsam und fehleranfällig. Mit Hilfe von Wladimir Panfilenko habe ich ein Programm erstellt, welches die entsprechenden Daten berechnet. Außerdem ist ein Algorithmus zur Berechnung der  $r$ -Färbungen auf den Mengen  $\mathcal{W}_{n,k}$  implementiert. Da diese Zahlen sehr rasch sehr groß werden, wurde hierfür der variable Datentyp `BigInteger` verwendet. Somit können die  $r$ -Färbungen (für nicht allzu große  $r$ ) bis Dimension 20 ausgewertet werden.

In den folgenden Tabellen präsentiere ich einige Ergebnisse:  
Diese listen für alle Konjugationsklassen (jede entspricht einem *SCT*) mit ihren Mächtigkeiten und für alle  $k < n$  die Zykeltypen der entsprechenden Klasse auf der Menge  $\mathcal{W}_{n,k}$  der  $k$ -dimensionalen Unterwürfel auf. Anhand dieser Listen kann man nun entsprechend Bemerkung 2.3 den Zykelzeiger ablesen. Im Fall  $n = 3$  präsentiere ich zusätzlich die Anzahl der entarteten  $r$ -Färbungen, für alle  $r \leq N_k = |\mathcal{W}_{n,k}|$ , auf diesen Mengen. Da diese Zahlen sehr groß werden, gebe ich zusätzlich die Bitlänge dieser Zahlen in Klammern aus. Die Bitlänge ist im Wesentlichen der  $2er$ -Logarithmus der entsprechenden Zahlen. Zur Kontrolle: Die Identitätsabbildung auf der Menge  $\mathcal{W}_{n,k}$  liefert  $N_k$  Zyklen der Länge 1.

Tabelle 1: Zykeltypen beim 3-dim Würfel

$\sharp(SCT)$	$SCT \setminus k$	2	1	0
8	$3_0^1$	$3^2$	$3^4$	$1^2 3^2$
8	$3_1^0$	$6^1$	$6^2$	$2^1 6^1$
6	$1_0^1 2_0^1$	$1^2 2^2$	$1^2 2^5$	$1^4 2^2$
6	$1_0^1 2_1^0$	$1^2 4^1$	$4^3$	$4^2$
6	$1_1^0 2_0^1$	$2^3$	$1^2 2^5$	$2^4$
6	$1_1^0 2_1^0$	$2^1 4^1$	$4^3$	$4^2$
1	$1_0^3 = \mathbf{id}$	$1^6$	$1^{12}$	$1^8$
3	$1_1^2$	$1^4 2^1$	$1^4 2^4$	$2^4$
3	$1_2^1$	$1^2 2^2$	$2^6$	$2^4$
1	$1_3^0$	$2^3$	$2^6$	$2^4$
	r-Färbungen			
	2	22 (5)	144 (8)	10 (4)
	3	267 (9)	12111 (14)	56 (6)
	4	1996 (11)	358120 (19)	220 (8)
	5	10375 (14)	5131650 (23)	680 (10)
	6	41406 (16)	45528756 (26)	1771 (11)
	7	135877 (18)	288936634 (29)	
	8	384112 (19)	1433251296 (31)	
	9		5887880415 (33)	
	10		20842168600 (35)	
	11		65402344161 (36)	
	12		185788177224 (38)	

Tabelle 2: Zykeltypen beim 4-dim Würfel

$\#(SCT)$	$SCT \setminus k$	3	2	1	0
48	$4_0^1$	$4^2$	$2^2 4^5$	$4^8$	$1^2 2^1 4^3$
48	$4_1^0$	$8^1$	$8^3$	$8^4$	$8^2$
32	$1_0^1 3_0^1$	$1^2 3^2$	$3^8$	$1^2 3^{10}$	$1^4 3^4$
32	$1_0^1 3_1^0$	$1^2 6^1$	$6^4$	$2^1 6^5$	$2^2 6^2$
32	$1_1^0 3_0^1$	$2^1 3^2$	$3^4 6^2$	$1^2 3^2 6^4$	$2^2 6^2$
32	$1_1^0 3_1^0$	$2^1 6^1$	$6^4$	$2^1 6^5$	$2^2 6^2$
12	$2_0^2$	$2^4$	$1^4 2^{10}$	$2^{16}$	$1^4 2^6$
24	$2_1^1$	$2^2 4^1$	$1^2 2^1 4^5$	$4^8$	$4^4$
12	$2_2^0$	$4^2$	$4^6$	$4^8$	$4^4$
12	$1_0^2 2_0^1$	$1^4 2^2$	$1^6 2^9$	$1^8 2^{12}$	$1^8 2^4$
12	$1_0^2 2_1^0$	$1^4 4^1$	$1^4 4^5$	$4^8$	$4^4$
24	$1_1^1 2_0^1$	$1^2 2^3$	$1^2 2^{11}$	$1^4 2^{14}$	$2^8$
24	$1_1^1 2_1^0$	$1^2 2^1 4^1$	$2^2 4^5$	$4^8$	$4^4$
12	$1_2^0 2_0^1$	$2^4$	$1^2 2^{11}$	$2^{16}$	$2^8$
12	$1_2^0 2_1^0$	$2^2 4^1$	$2^2 4^5$	$4^8$	$4^4$
1	$1_0^4 = \mathbf{id}$	$1^8$	$1^{24}$	$1^{32}$	$1^{16}$
4	$1_1^3$	$1^6 2^1$	$1^{12} 2^6$	$1^8 2^{12}$	$2^8$
6	$1_2^2$	$1^4 2^2$	$1^4 2^{10}$	$2^{16}$	$2^8$
4	$1_3^1$	$1^2 2^3$	$2^{12}$	$2^{16}$	$2^8$
1	$1_4^0$	$2^4$	$2^{12}$	$2^{16}$	$2^8$



Tabelle 3: Zykeltypen beim 5-dim Würfel

$\#(SCT)$	$SCT \setminus k$	4	3	2	1	0
384	$5_0^1$	$5^2$	$5^8$	$5^{16}$	$5^{16}$	$1^2 5^6$
384	$5_1^0$	$10^1$	$10^4$	$10^8$	$10^8$	$2^1 10^3$
240	$1_0^1 4_0^1$	$1^2 4^2$	$2^2 4^9$	$2^4 4^{18}$	$1^2 2^1 4^{19}$	$1^4 2^2 4^6$
240	$1_0^1 4_1^0$	$1^2 8^1$	$8^5$	$8^{10}$	$8^{10}$	$8^4$
240	$1_1^0 4_0^1$	$2^1 4^2$	$2^2 4^9$	$2^4 4^{18}$	$1^2 2^1 4^{19}$	$2^4 4^6$
240	$1_1^0 4_1^1$	$2^1 8^1$	$8^5$	$8^{10}$	$8^{10}$	$8^4$
160	$2_0^1 3_0^1$	$2^2 3^2$	$1^2 2^1 3^4 6^4$	$1^2 3^6 6^{10}$	$2^4 3^8 6^8$	$1^4 2^2 3^4 6^2$
160	$2_0^1 3_1^0$	$2^2 6^1$	$1^2 2^1 6^6$	$2^1 6^{13}$	$2^4 6^{12}$	$2^4 6^4$
160	$2_1^0 3_0^1$	$3^2 4^1$	$3^4 4^1 12^2$	$1^2 3^2 12^6$	$4^2 12^6$	$4^2 12^2$
160	$2_1^0 3_1^1$	$4^1 6^1$	$4^1 6^2 12^2$	$2^1 6^1 12^6$	$4^2 12^6$	$4^2 12^2$
80	$1_0^2 3_0^1$	$1^4 3^2$	$1^4 3^{12}$	$1^2 3^{26}$	$1^8 3^{24}$	$1^8 3^8$
80	$1_0^2 3_1^0$	$1^4 6^1$	$1^4 6^6$	$2^1 6^{13}$	$2^4 6^{12}$	$2^4 6^4$
160	$1_1^1 3_0^1$	$1^2 2^1 3^2$	$2^2 3^8 6^2$	$1^2 3^{10} 6^8$	$1^4 2^2 3^4 6^{10}$	$2^4 6^4$
160	$1_1^1 3_1^1$	$1^2 2^1 6^1$	$2^2 6^6$	$2^1 6^{13}$	$2^4 6^{12}$	$2^4 6^4$
80	$1_2^0 3_0^1$	$2^2 3^2$	$2^2 3^4 6^4$	$1^2 3^2 6^{12}$	$2^4 6^{12}$	$2^4 6^4$
80	$1_2^0 3_1^0$	$2^2 6^1$	$2^2 6^6$	$2^1 6^{13}$	$2^4 6^{12}$	$2^4 6^4$
60	$1_0^1 2_0^2$	$1^2 2^4$	$1^4 2^{18}$	$1^8 2^{36}$	$1^4 2^{38}$	$1^8 2^{12}$
120	$1_0^1 2_1^1$	$1^2 2^2 4^1$	$1^2 2^5 4^7$	$1^4 2^4 18$	$4^{20}$	$4^8$
60	$1_0^1 2_2^0$	$1^2 4^2$	$4^{10}$	$4^{20}$	$4^{20}$	$4^8$
60	$1_1^0 2_0^2$	$2^5$	$1^4 2^{18}$	$2^{40}$	$1^4 2^{38}$	$2^{16}$
120	$1_1^0 2_1^1$	$2^3 4^1$	$1^2 2^5 4^7$	$2^4 4^{18}$	$4^{20}$	$4^8$
60	$1_1^0 2_2^0$	$2^1 4^2$	$4^{10}$	$4^{20}$	$4^{20}$	$4^8$
20	$1_2^1 3_0^1$	$1^6 2^2$	$1^{14} 2^{13}$	$1^{20} 2^{30}$	$1^{24} 2^{28}$	$1^{16} 2^8$
20	$1_2^1 3_1^0$	$1^6 4^1$	$1^{12} 4^7$	$1^8 4^{18}$	$4^{20}$	$4^8$
60	$1_2^1 3_1^1$	$1^4 2^3$	$1^6 2^{17}$	$1^8 2^{36}$	$1^8 2^{36}$	$2^{16}$
60	$1_1^2 2_0^1$	$1^4 2^1 4^1$	$1^4 2^4 4^7$	$2^4 4^{18}$	$4^{20}$	$4^8$
60	$1_1^2 2_1^1$	$1^2 2^4$	$1^2 2^{19}$	$1^4 2^{38}$	$2^{40}$	$2^{16}$
60	$1_1^2 2_2^0$	$1^2 2^2 4^1$	$2^6 4^7$	$2^4 4^{18}$	$4^{20}$	$4^8$
20	$1_3^0 2_0^1$	$2^5$	$1^2 2^{19}$	$2^{40}$	$2^{40}$	$2^{16}$
20	$1_3^0 2_1^1$	$2^3 4^1$	$2^6 4^7$	$2^4 4^{18}$	$4^{20}$	$4^8$
1	$1_0^5 = \mathbf{id}$	$1^{10}$	$1^{40}$	$1^{80}$	$1^{80}$	$1^{32}$
5	$1_1^4$	$1^8 2^1$	$1^{24} 2^8$	$1^{32} 2^{24}$	$1^{16} 2^{32}$	$2^{16}$
10	$1_2^3$	$1^6 2^2$	$1^{12} 2^{14}$	$1^8 2^{36}$	$2^{40}$	$2^{16}$
10	$1_3^2$	$1^4 2^3$	$1^4 2^{18}$	$2^{40}$	$2^{40}$	$2^{16}$
5	$1_4^1$	$1^2 2^4$	$2^{20}$	$2^{40}$	$2^{40}$	$2^{16}$
1	$1_5^0$	$2^5$	$2^{20}$	$2^{40}$	$2^{40}$	$2^{16}$

## 4 Färbungsprobleme am $n$ -dimensionalen Würfel

### 4.1 Färbungen des 3-dimensionalen Würfels

Wir haben in Kapitel 3 die Zykeltypen der einzelnen Elemente aus der Automorphismengruppe des Würfels und die Mächtigkeiten der einzelnen Konjugationsklassen erhalten. Entsprechend lassen sich die Zykelzeiger auf den Mengen  $\mathcal{W}_{3,k}$  bestimmen:

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{W}_{3,0}}(X_1, \dots, X_8) &= \frac{1}{48}(X_1^8 + 8X_1^2X_3^2 + 6X_1^4X_2^2 + 13X_2^4 + 8X_2^1X_6^1 + 12X_4^2), \\ Z_{\mathcal{W}_{3,1}}(X_1, \dots, X_{12}) &= \frac{1}{48}(X_1^{12} + 3X_1^4X_2^4 + 12X_1^2X_2^5 + 4X_2^6 + 8X_3^4 + 12X_4^3 + 8X_6^2), \\ Z_{\mathcal{W}_{3,2}}(X_1, \dots, X_6) &= \frac{1}{48}(X_1^6 + 3X_1^4X_2^1 + 9X_1^2X_2^2 + 6X_1^2X_4 + 7X_2^3 + 6X_2X_4 + 8X_3^2 + 8X_6). \end{aligned}$$

Wir wollen nun gemäß Satz (2.7) die 2- und 3-Färbungen näher untersuchen:

Die Anzahl Färbungen der Menge  $\mathcal{W}_{3,k}$  (*modulo*  $G_3$ ) der Art:

$i$  mal Farbe 1,  $j$  mal Farbe 2 und  $l$  mal Farbe 3 entspricht dem Koeffizienten von  $Y_1^i Y_2^j Y_3^l$  in  $Z_{\mathcal{W}_k}(\sum_{j=1}^r Y_j, \sum_{j=1}^r Y_j^2, \dots, \sum_{j=1}^r Y_j^N)$ .

#### 4.1.1 Färbungen der Ecken des Würfels

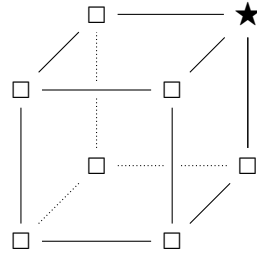
Im folgenden bestimme ich alle 2- und 3-Färbungen (bis auf Vertauschung der Farben) auf der Menge der Ecken des Würfels.

$$\begin{aligned} \text{coef}_{Y_1 Y_2^7}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{8}{1} + 8 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot \binom{4}{1} \right) = 1 \\ \text{coef}_{Y_1^2 Y_2^6}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{8}{2} + 8 \cdot 1 + 6 \cdot \left( \binom{4}{2} + \binom{2}{1} \right) + 13 \cdot \binom{4}{1} + 8 \right) = 3 \\ \text{coef}_{Y_1^3 Y_2^5}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{8}{3} + 8 \cdot 2 + 6 \cdot \left( \binom{4}{1} + 2 \cdot \binom{4}{1} \right) \right) = 3 \\ \text{coef}_{Y_1^4 Y_2^4}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= 22 - 2 \cdot (1 + 1 + 3 + 3) = 6 \\ \text{coef}_{Y_1 Y_2 Y_3^6}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{8}{1,1,6} + 8 \cdot 2 + 6 \cdot \binom{4}{1,1,2} \right) = 3 \\ \text{coef}_{Y_1 Y_2^2 Y_3^5}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{8}{5,2,1} + 6 \cdot \left( 2 \cdot \binom{4}{1} + \binom{4}{1,2,1} \right) \right) = 6 \\ \text{coef}_{Y_1 Y_2^3 Y_3^4}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{8}{1,3,4} + 8 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \left( \binom{4}{1} + 2 \cdot \binom{4}{2,1,1} \right) \right) = 10 \\ \text{coef}_{Y_1^2 Y_2^2 Y_3^4}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{8}{4,2,2} + 6 \left( \binom{4}{2,2} + 2 + 2 \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} \right) + 13 \cdot \binom{4}{2,1,1} \right) = 16 \\ \text{coef}_{Y_1^3 Y_2^3 Y_3^2}(Z_{\mathcal{W}_{3,0}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{8}{3,3,2} + 8 \cdot 2 + 6 \cdot \left( 2 \cdot 2 \cdot \binom{4}{1,3} + 2 \cdot \binom{4}{2,1,1} \right) \right) = 17 \end{aligned}$$

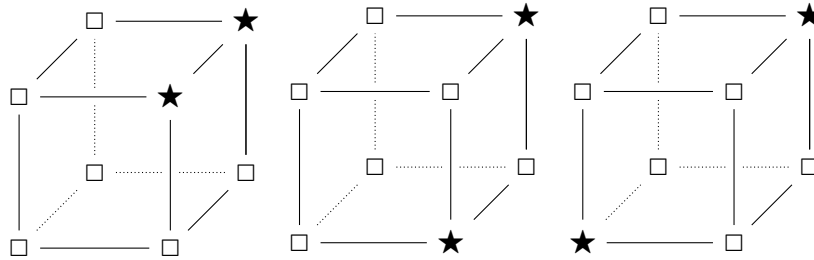
Diese Zahlen beschreiben nun anschaulich die Möglichkeiten, die Ecken des Würfel unterschiedlich zu färben oder zu markieren:

Für die Färbung 1 – 7 (eine Ecke markieren) erhalten wir folgende (bis auf Permutation

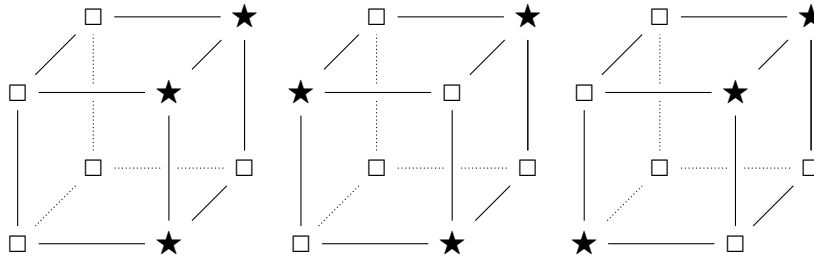
des Würfels) eindeutige Möglichkeit: (Form nach [8])



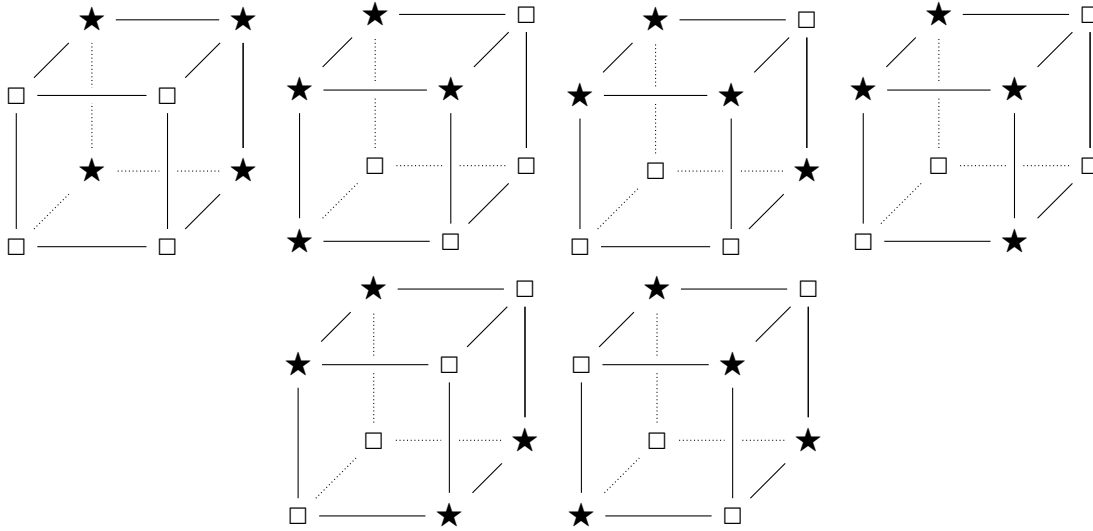
Die drei Färbungen der Form 2 – 6 (2 Ecken markieren) sind bis auf Drehungen des Würfels folgende:



Entsprechend kann man auch die 3 – 5 Färbungen (3 Ecken markieren) sehen. Hierbei ist interessant zu sehen, dass die zweite Zeichnung einen gespiegelten Zwilling besitzt, welcher nicht über Drehungen erzeugt werden kann.



Zu guter Letzt möchte ich noch die 6 Färbungen der Form 4 – 4 aufführen:



#### 4.1.2 Färbungen der Kanten des Würfels

Diese gleichen Überlegungen wie eben führen wir nun auf der Menge  $\mathcal{W}_{3,1}$  der Kanten des Würfels durch, um die Anzahlen der einzelnen 2-Färbungen der Kanten zu erhalten.

$$\begin{aligned} \text{koef}_{Y_1 Y_2^{11}}(Z_{\mathcal{W}_{3,1}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{12}{1} + 3 \cdot \binom{4}{1} + 12 \cdot \binom{2}{1} \right) = 1 \\ \text{koef}_{Y_1^2 Y_2^{10}}(Z_{\mathcal{W}_{3,1}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{12}{2} + 3 \cdot \left( \binom{4}{2} + \binom{4}{1} \right) + 12 \cdot \left( \binom{5}{1} + 1 \right) + 4 \cdot \binom{6}{1} \right) = 4 \\ \text{koef}_{Y_1^3 Y_2^9}(Z_{\mathcal{W}_{3,1}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{12}{3} + 3 \cdot \left( \binom{4}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \right) + 12 \cdot \left( \binom{5}{1} \binom{2}{1} \right) + 8 \cdot \binom{4}{1} \right) = 9 \\ \text{koef}_{Y_1^4 Y_2^8}(Z_{\mathcal{W}_{3,1}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{12}{4} + 3 \cdot \left( 1 + \binom{4}{2} \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \right) + 12 \cdot \left( \binom{5}{1} + \binom{5}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \cdot \binom{6}{2} + 12 \cdot \binom{3}{1} \right) = 18 \\ \text{koef}_{Y_1^5 Y_2^7}(Z_{\mathcal{W}_{3,1}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{12}{5} + 3 \cdot \left( \binom{4}{1} \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \binom{4}{1} \right) + 12 \cdot \binom{5}{1} \binom{2}{1} \right) = 24 \\ \text{koef}_{Y_1^6 Y_2^6}(Z_{\mathcal{W}_{3,1}}) &= \frac{1}{48} \left( \binom{12}{6} + 3 \cdot \left( \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \binom{4}{2} + \binom{4}{1} \right) \right. \\ &\quad \left. + 12 \cdot \left( \binom{5}{2} + \binom{5}{2} \right) + 4 \cdot \binom{6}{3} + 8 \cdot \binom{4}{2} + 8 \cdot \binom{2}{1} \right) = 30 \end{aligned}$$

#### 4.1.3 Färbungen der Flächen des Würfels

Wir wollen nun alle Färbungen auf der Menge der Flächen des Würfels bestimmen:

Es gibt 5 unterschiedliche 2 Färbungen der Flächen:

Färben wir genau eine Fläche, so kann diese durch Drehungen des Würfels auf jede beliebige, andere Fläche übertragen werden. Entsprechend erhalten wir mittels des Satzes von Polya 2.7:

$$\text{koef}_{Y_1^1 Y_2^5}(Z_{\mathcal{W}_{3,2}}) = \frac{1}{48} \left( \binom{6}{1} + 3 \cdot \binom{4}{1} + 9 \cdot \binom{2}{1} + 6 \cdot \binom{2}{1} \right) = 1.$$

Die Anzahl von Färbungen der Form 2 – 4 ist gleich

$$\text{koef}_{Y_1^2 Y_2^4}(Z_{\mathcal{W}_{3,2}}) = \frac{1}{48} \left( \binom{6}{2} + 3 \cdot \left( \binom{4}{2} + 1 \right) + 9 \cdot \left( \binom{2}{1} + 1 \right) + 6 + 7 \cdot \binom{3}{1} + 6 \right) = 2.$$

Diese sind eindeutig durch den Abstand der beiden Flächen von Farbe 1 bestimmt. Sie können benachbart sein oder sich gegenüber liegen.

Für die 3 – 3 Färbungen der Flächen ergibt sich:

$$\text{koef}_{Y_1^3 Y_2^3}(Z_{\mathcal{W}_{3,2}}) = \frac{1}{48} \left( \binom{6}{3} + 3 \cdot \left( \binom{4}{1} + \binom{4}{1} \right) + 9 \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} + 8 \cdot \binom{2}{1} \right) = 2$$

Finden wir also zwei unterschiedliche Färbungen, so sind wir fertig.

Es können 3 markierte Flächen eine Ecke gemeinsam haben, oder nicht (sie liegen dann in Reihe).

## 4.2 Asymptotische Betrachtungen

In diesem Abschnitt versuchen wir Aussagen über die Anzahl von  $r$ -Färbungen auf der Menge  $\mathcal{W}_{n,k}$  für große, aber feste  $n$  und wachsendes  $r$  zu treffen. Diese entspricht nach Satz 2.4 gerade  $Z_{\mathcal{W}_{n,k}}(r, \dots, r)$ .

Dieser Wert ist größer als  $\frac{1}{2^n n!} r^{N_k}$ , mit  $N_k = |\mathcal{W}_{n,k}|$ . Für kleinere Dimensionen berechnen wir dies auf der Menge der Ecken und maximalen Unterwürfel (siehe Tabellen 4 & 5). Da die Zahlen rasch sehr groß werden, gebe ich ab einer Größe von  $2^{50}$  nur noch die Bitlänge der Zahlen aus.

**Proposition 4.1.** *Für die Anzahl der  $r$ -Färbungen auf  $W_n$  gilt:*

$$Z_{\mathcal{W}_{n,0}}(r, \dots, r) = \frac{1}{2^n n!} (r^{N_0} + \mathcal{O}(r^{3/4 N_0})) \quad , \text{ wobei } N_0 = 2^n \text{ ist.}$$

$$Z_{\mathcal{W}_{n,n-1}}(r, \dots, r) = \frac{1}{2^n n!} (r^{N_{n-1}} + \mathcal{O}(r^{(2n-1/2n)N_{n-1}})) \quad , \text{ wobei } N_{n-1} = 2n \text{ ist.}$$

*Beweis.* Das Polynom  $Z_{\mathcal{W}_{n,k}}$  ist isobar vom Grad  $N_k$ . Setzt man für jedes  $X_i$  den Wert  $r$  ein, so entsteht ein Polynom vom Grad  $N$  in der Variablen  $r$ . Allerdings minimiert sich der Grad vieler Terme um ein Vielfaches, da etwa Terme, die von einem Zykel der Länge  $n$  herkommen in  $Z_{\mathcal{W}}(r)$  den Grad 2 haben. In diesem Polynom liefert immer die Identität auf  $W_n$  den Term höchster Ordnung. Für die restlichen Terme gilt:

1. Der größte nicht triviale Term kommt von den Elementen mit  $SCT1^{n-2}2^1$ . Man sieht leicht: Die Größe der entsprechenden Konjugationsklasse ist  $n(n-1)$ , der Zykelindex ist  $(2^{n-1}, 1/42^n, 0, \dots, 0)$ . Dies entspricht einem Term vom Grad  $(3/4)N_0$ .

Tabelle 4: 2-Färbungen auf der Menge der Ecken von  $W_n$ 

	Anzahl (Bitlänge) für $r = 2$	Anzahl (Bitlänge) für $r = 3$
$ZW_{2,0}(r)$	6 (3)	21 (5)
$ZW_{3,0}(r)$	22 (5)	267 (9)
$ZW_{4,0}(r)$	402 (9)	132102 (18)
$ZW_{5,0}(r)$	1228158 (21)	484086357207 (39)
$ZW_{6,0}(r)$	400507806843728 (49)	(86)
$ZW_{7,0}(r)$	(109)	(184)
$ZW_{8,0}(r)$	(233)	(383)
$ZW_{9,0}(r)$	(485)	(785)
$ZW_{10,0}(r)$	(993)	(1592)
$ZW_{11,0}(r)$	(2012)	(3210)
$ZW_{12,0}(r)$	(4056)	(6452)
$ZW_{13,0}(r)$	(8147)	(12939)
$ZW_{14,0}(r)$	(16334)	(25918)
$ZW_{15,0}(r)$	(32713)	(51881)
$ZW_{16,0}(r)$	(65476)	(103812)
$ZW_{17,0}(r)$	(131007)	(207679)
$ZW_{18,0}(r)$	(262074)	(415418)

Tabelle 5:  $r$ -Färbungen auf der Menge der  $(n - 1)$ -dimensionalen Unterwürfel von  $W_n$ 

	Anzahl (Bitlänge) $r = 2$	Anzahl (Bitlänge) $r = 3$	Anzahl (Bitlänge) $r = 4$
$ZW_{2,1}(r)$	6 (3)	21 (5)	55 (6)
$ZW_{3,2}(r)$	10 (4)	56 (6)	220 (8)
$ZW_{4,3}(r)$	15 (4)	126 (7)	715 (10)
$ZW_{5,4}(r)$	21 (5)	252 (8)	2002 (11)
$ZW_{6,5}(r)$	28 (5)	462 (9)	5005 (13)
$ZW_{7,6}(r)$	36 (6)	792 (10)	11440 (14)
$ZW_{8,7}(r)$	45 (6)	1287 (11)	24310 (15)
$ZW_{9,8}(r)$	55 (6)	2002 (11)	48620 (16)
$ZW_{10,9}(r)$	66 (7)	3003 (12)	92378 (17)
$ZW_{11,10}(r)$	78 (7)	4368 (13)	167960 (18)
$ZW_{12,11}(r)$	91 (7)	6188 (13)	293930 (19)
$ZW_{13,12}(r)$	105 (7)	8568 (14)	497420 (19)
$ZW_{14,13}(r)$	120 (7)	11628 (14)	817190 (20)
$ZW_{15,14}(r)$	136 (8)	15504 (14)	1307504 (21)
$ZW_{16,15}(r)$	153 (8)	20349 (15)	2042975 (21)
$ZW_{17,16}(r)$	171 (8)	26334 (15)	3124550 (22)
$ZW_{18,17}(r)$	190 (8)	33649 (16)	4686825 (23)
$ZW_{19,18}(r)$	210 (8)	42504 (16)	6906900 (23)
$ZW_{20,19}(r)$	231 (8)	53130 (16)	10015005 (24)

2. Die Zyklen auf der Menge  $\mathcal{W}_{n,n-1} =: \mathcal{W}_{-1}$  entsprechen denen auf der Menge  $\{\pm e_i\}$  der signierten Einheitsvektoren. Ein  $2 - \textit{Twins}$ , der 2 unterschiedliche Vektoren  $e_i \neq e_j$  permutiert, vertauscht schon 4 Unterwürfel aus  $\mathcal{W}_{-1}$ . Ein  $1 - \textit{Double}$  vertauscht einen Vektor mit seinem Negativen. Hiermit erhält man einen Zyklus der Länge 2 und entsprechend den Zykeltyp  $(2n - 2, 2, 0, \dots, 0)$ . Dies liefert in  $Z_{\mathcal{W}_{-1}}(r, \dots, r)$  einen Term der Ordnung  $(2n - 1)$ .

□

## Literatur

- [1] Schulze-Pillot, Rainer: Einführung in Algebra und Zahlentheorie. Berlin: Springer DE, 2008.
- [2] G. Wüstholtz: Algebra: Für Studierende der Mathematik, Physik, Informatik 2004
- [3] E.-U. Gekeler, Skript zur Vorlesung: Einführung in die Kombinatorik und Graphentheorie (WS 2011/12) an der Universität des Saarlandes.
- [4] P. W. H. Lemmens: Pólya Theory of Hypercubes. Geometriae Dedicata 64: 145-155, 1997.
- [5] Janko Böhm, Skript zur Vorlesung: Einführung in die Algebra und Zahlentheorie (WS 2010/11) an der Universität des Saarlandes.
- [6] N. G. de Bruijn: Pólyas Abzähl-Theorie: Muster für Graphen und chemische Verbindungen. Selecta Mathematica III, Heidelberger Taschenbücher: S.1-26, 1971.
- [7] de Bruijn, N. G.: Pólya's theory of counting, in: E.F. Beckenbach, (ed.), Applied Combinatorial Mathematics, Wiley, New York, 1964, 144-184.
- [8] Thomas Strathmann, <http://pdp7.org/blog/?p=133>
- [9] [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d3/WUERFEL5\\_0-\\_bis\\_5-dimensionale\\_Wuerfelanaloge.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d3/WUERFEL5_0-_bis_5-dimensionale_Wuerfelanaloge.png), Juli 2013
- [10] <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/beispiel/beispiel253/>, Juli 2013