

Saarbrücken, Juli 2009
Universität des Saarlandes

Betreuer: Prof. Dr. E.-U. Gekeler

Ich erkläre hiermit an Eides statt, diese Arbeit selbstständig geschrieben und keine Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Ich bedanke mich bei Prof. Gekeler für dieses interessante Thema und die intensive Betreuung. Weiter gilt mein Dank auch Dipl. Math. Johannes Lengler, der, trotz der kurz bevorstehenden Abgabe seiner Dissertation, große Teile meiner Arbeit durchgelesen und mich auf Fehler hingewiesen hat. Ihm sei noch ein extra Dankeschön gewidmet für den Beistand in allen Fragen zu Latex. Schließlich gilt mein Dank auch Dipl. Math. Bernd Mehnert, der mich bei manchen Verständnisfragen unterstützt hat, sowie allen, die mir bei der Anfertigung meiner Bachelorarbeit geholfen haben.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	5
Tabellenverzeichnis	6
0 Einleitung	7
1 Graphen und Bäume	10
1.1 Graphen	10
1.1.1 Was ist ein Graph?	10
1.1.2 Diagramme von Graphen	12
1.1.3 Eigenschaften von Graphen	14
1.2 Bäume	17
2 Projektive Geometrie	19
2.1 Der projektive Raum	19
3 Beschreibung des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T}	24
3.1 Notation	25
3.2 Knoten und Gitterklassen	26
3.3 Abstandsfunktion	27
3.4 Kanten und Paare von Gitterklassen	31
3.5 Der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}	32
3.5.1 Jordan-Hölder Reihen	33
3.5.2 Beweis von Theorem (3.5.1): \mathcal{T} ist ein Baum	36
4 Geometrie auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}	39
4.1 Komplettierung des Bruhat-Tits Baums	39
4.2 Geometrische Objekte auf dem Bruhat-Tits Baum	43
4.2.1 Kreise	43
4.2.2 Halbgeraden, Enden, Geraden	45

5	Operationen von $GL(V)$ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}	53
5.1	Notation	54
5.2	Grundlagen	55
5.3	Stabilisatoren auf dem Bruhat-Tits Baum	57
5.4	Darstellung des Bruhat-Tits Baums durch Restklassenmengen	67
6	Der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} über dem Körper der Laurent-Reihen	68
6.1	Notation	68
6.2	Repräsentantensystem für Knoten und Kanten	70
6.3	Der Baum $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ und $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{T}$	83
7	Der Algorithmus	90
7.1	Ziel und Aufgabenstellung	91
7.2	Der Algorithmus	91
7.2.1	Teil I	92
7.2.2	Teil II	93
7.2.3	Teil III	95
7.3	Details für die Implementierung	97
7.3.1	Details für $\pi^{\alpha+\delta}ad - \pi^{\beta+\gamma}bc$	98
7.3.2	Details für $\frac{b}{d}$	99
7.4	Laufzeitanalyse	101
7.5	Graphische Arbeitsweise des Algorithmus an Beispielen	103
	Symbolverzeichnis	112
	Index	117
	Literaturverzeichnis	119

Abbildungsverzeichnis

1	Beispiel ungerichteter Graph	13
2	Beispiel gerichteter Graph	13
3	Beispiel gerichteter Graph	13
4	Beispiel Baum	17
5	Beispiel Baum	18
6	Der Bruhat-Tits Baum für $\#\kappa = 2$	34
7	$([L_{n-2}], [L_{n-1}], [L_n])$ ist ein Zurückgehen	37
8	Es gilt $L_{n-2}\pi \subset L_0\pi$	37
9	Gestalt einer Halbgeraden	46
10	Halbgerade auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} , $\#\kappa = 2$	46
11	Gestalt einer Geraden	51
12	Gerade auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} , $\#\kappa = 2$	51
13	Der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} für $\#\kappa = 2$ mit expliziter Beschreibung der Knoten	78
14	Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit $\#\kappa = 2$	79
15	Die Funktionen α , κ und τ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit $\#\kappa = 3$	81
16	Fundamentalebene für Γ_∞ , bzw. zu $\Gamma_\infty \setminus \mathcal{T}$ isomorpher Baum	87
17	Der Fundamentalebene für Γ_∞ mit $\#\kappa = 2$	88
18	Der Baum $\Gamma \setminus \mathcal{T}$	89
19	Arbeitsweise des Algorithmus für Beispiel (7.5.2)	106
20	Arbeitsweise des Algorithmus für Beispiel (7.5.3)	108
21	Arbeitsweise des Algorithmus für Beispiel (7.5.4)	109
22	Zusammenfassung des Ergebnis des Algorithmus im Beispiel $\#\kappa = 2$	111

Tabellenverzeichnis

1	Vorgehensweise des Algorithmus in Beispiel (7.5.2)	107
2	Vorgehensweise des Algorithmus in Beispiel (7.5.3)	107
3	Vorgehensweise des Algorithmus in Beispiel (7.5.4)	110
4	Verteilung der Knoten in $\Gamma \setminus \mathcal{T}$ für $\#\kappa = 2$	110

Kapitel 0

Einleitung

Diese Bachelorarbeit bietet eine Einführung in das Thema des Bruhat-Tits Baums über einem diskret bewerteten Körper und ermöglicht eine Vertiefung im Fall des Körpers der Laurent-Reihen. Die Arbeit richtet sich hauptsächlich an Mathematikstudenten und Mathematiker, die mit den Kenntnissen der Grundlagenvorlesungen eines Mathematikstudiums vertraut sind und darüber hinaus elementares Wissen im Bereich der algebraischen Zahlentheorie besitzen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt strukturiert: Da es sich bei dem Bruhat-Tits Baum um einen Baum, also einen Graphen mit besonderen Eigenschaften handelt, werden in Kapitel (1) (Graphen und Bäume) die Grundlagen zu diesem Thema geschaffen. Zudem soll das Kapitel den Zweck eines Nachschlagewerkes für die in dieser Arbeit relevanten graphentheoretischen Sachverhalte erfüllen.

Das anschließende Kapitel (2) (Projektive Geometrie) legt weitere Grundbausteine für diese Arbeit. Eine Einführung in die Projektive Geometrie soll den weiteren Umgang mit der Geometrie des Bruhat-Tits Baums erleichtern. Um eine erste Intuition zu vermitteln wird anfangs der Spezialfall eines Vektorraums über einem Körper betrachtet. Anschließend wird der projektive Raum auf den Fall eines freien Moduls über einem lokalen kommutativen Ring verallgemeinert.

Nach der Darstellung der notwendigen Grundlagen kann mit Kapitel (3) (Beschreibung des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T}) ins Thema des Bruhat-Tits Baums eingestiegen werden. Bei der Einführung des Bruhat-Tits Baums wird konstruktiv vorgegangen. Es wird erst die Knotenmenge definiert und mit einem Abstandsbegriff ausgestattet, der es erlaubt die Knoten in Beziehung zu setzen und damit eine Definition der Kantenmenge mitbringt. Die so gefundenen Objekte definieren einen Graphen, der sich insbesondere als Baum herausstellt. Diesem Baum geben wir den Namen Bruhat-Tits Baum. Dem

Beweis des Theorems, dass der konstruierte Graph tatsächlich ein Baum ist, wird der Rest des Kapitels gewidmet.

Nun wurde ein Ausgangspunkt geschaffen, der es ermöglicht eine zahlen-theoretische Situation aus geometrischer Sicht, dem Bruhat-Tits Baum, zu interpretieren. Im folgenden Kapitel (4) (Geometrie auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}) spielt diese Korrelation eine wesentliche Rolle. Um noch präzisere Aussagen in diesem Zusammenhang treffen zu können wird das Studium des Bruhat-Tits Baums in dem Fall fortgesetzt, dass der zugrunde liegende diskret bewertete Körper vollständig ist. Daraus ergibt sich die im weiteren Verlauf der Betrachtungen wichtige Aussage der Bijektion zwischen dem Bruhat-Tits Baum über einem diskret bewerteten Körper und dem Bruhat-Tits Baum über seinem komplettierten Körper. Diese Tatsache erlaubt, ohne Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass der diskrete Körper zusätzlich vollständig ist. Ansonsten steht in diesem Kapitel die Einführung der elementaren Objekte Kreis, Halbgerade, Ende und Gerade, im Vordergrund.

In Kapitel (5) (Operationen von $GL(V)$ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}) eröffnet uns die Automorphismengruppe des Vektorraums über dem vollständig diskret bewerteten Körper eine weitere Möglichkeit, Untersuchungen auf dem Bruhat-Tits Baum anzustellen. Diese Gruppe operiert transitiv auf allen wichtigen Objekten des Baums. Auf dieser Aussage basierend beschäftigt sich das gesamte Kapitel mit der Frage: Wie lassen sich geometrische Objekte wie Gitter, Knoten, Kanten, Halbgeraden usw. als Bahnen unter der Operation dieser Gruppe darstellen?

Eine Anwendung findet das bisher Erarbeitete in Kapitel (6) (Der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} über dem Körper der Laurent-Reihen), in dem, noch spezieller die Situation mit dem vollständig diskret bewerteten Körper der Laurent-Reihen studiert wird. Dieses Kapitel stützt sich im Wesentlichen auf [Gek95] von Prof. Gekeler. Die anfänglichen Bemühungen streben eine Darstellung für das Repräsentantensystem von Knoten und Kanten in Matrixform in dieser Situation an. Dabei zeigt sich, dass ein Knoten durch nur zwei Parameter in diesem Repräsentantensystem eindeutig bestimmt ist. Auch die geometrische Interpretation wird nicht außer Acht gelassen. Dies äußert sich in der Definition einiger Abbildungen auf dem Bruhat-Tits Baum, deren Wirken aus arithmetischer und geometrischer Sicht genauer untersucht wird.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die Operationen weiterer spezieller Gruppen von Matrizen auf dem Bruhat-Tits Baum untersucht.

Im abschließenden Kapitel (7) (Der Algorithmus) wird der im vorangehenden Kapitel eingeführte Restklassenbaum $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ aus algorithmischer Sicht behandelt. Das Kapitel beschreibt einen Algorithmus, der es ermöglicht, gegeben

eine beliebige invertierbare 2×2 Matrix über dem betrachteten Körper der Laurent-Reihen oder gegeben einen Knoten auf dem Bruhat-Tits Baum in Matrixform, den entsprechenden zugehörigen Knoten auf dem Restklassenbaum zu ermitteln. Neben der Formulierung des Algorithmus steht auch seine Analyse auf dem Programm für dieses Kapitel.

Kapitel 1

Graphen und Bäume

In diesem Kapitel führen wir die für diese Arbeit grundlegenden Begriffe zu Graphen und Bäume ein. Da die Intuition der Begriffe mit den Definitionen übereinstimmt, kann der geübte Leser dieses Kapitel getrost überspringen und es als Nachschlagewerk verwenden.

Ein grundlegendes Wissen über Bäume ist zum Verständnis dieser Arbeit essentiell, da sie sich, wie der Titel „Der Bruhat-Tits Baum“ schon vermuten lässt, mit einem speziellen Baum, dem Bruhat-Tits Baum, befasst.

Ein Baum ist ein Graph mit speziellen Eigenschaften. Daher kommen wir über die Definition des Graphen und Erarbeitung verschiedener Eigenschaften zur Definition des Baumes. Wir wollen uns hierbei hauptsächlich an [Ser80, Kapitel 2] orientieren, werden aber vereinzelt Ergänzungen aus [Aig04] vornehmen.

1.1 Graphen

1.1.1 Was ist ein Graph?

DEFINITION 1.1.1.

Ein (GERICHTETER bzw. ORIENTIERTER GRAPH) Γ besteht aus einem Tupel $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^\pm)$ von einer Menge \mathcal{V} von KNOTEN und einer Menge $\mathcal{E}^\pm := \{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in \mathcal{V}\}$ von (gerichteten bzw. orientierten) KANTEN.

DEFINITION 1.1.2.

Weiter definieren wir auf einem gerichteten Graphen $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}^\pm)$ die Abbildungen

$$o : \mathcal{E}^\pm \longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{und} \quad t : \mathcal{E}^\pm \longrightarrow \mathcal{V}$$

mit

$$e = (\text{o}(e), \text{t}(e))$$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\pm &\longrightarrow \mathcal{E}^\pm, \\ e &\longmapsto \bar{e} := (\text{t}(e), \text{o}(e)). \end{aligned}$$

Für ein $e \in \mathcal{E}^\pm$ bezeichnen wir mit \bar{e} die zu e INVERSE KANTE. Die Eigenschaft $\text{o}(e) = \text{t}(\bar{e})$ definiere den URSPRUNG und $\text{t}(e) = \text{o}(\bar{e})$ den TERMINUS einer orientierten Kante $e \in \mathcal{E}^\pm$. Ursprung und Terminus zusammen bezeichnen wir als die EXTREMITÄTEN der orientierten Kante e . Umgekehrt nennen wir die Extremitäten von e BENACHBART oder ADJAZENT.

BEMERKUNG 1.1.3.

Die in (1.1.2) definierten Abbildungen erfüllen (sofern $\text{t}(e) \neq \text{o}(e)$ ist) die Eigenschaften

- i. $(\text{o}(e), \text{t}(e)) = e \neq \bar{e} = (\text{t}(e), \text{o}(e))$,
- ii. $\bar{\bar{e}} = e$ und
- iii. $\text{o}(e) = \text{t}(\bar{e})$.

DEFINITION 1.1.4.

Zu einem orientierten Graphen $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}^\pm)$, definieren wir den ASSOZIIERTEN UNGERICHTETEN GRAPHEN (den wir auch mit Γ bezeichnen), indem wir die Orientierung der Kanten vergessen, d.h. wir betrachten die Kantenmenge $\mathcal{E} := \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in \mathcal{V} \text{ mit } (v_1, v_2) \in \mathcal{E}^\pm\}$ von ungeordneten Knotenpaaren. Einen solchen Graphen $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ nennen wir UNGERICHTET oder NICHT-ORIENTIERT .

BEMERKUNG 1.1.5.

Im Falle eines ungerichteten Graphen machen die in Definition (1.1.2) und Bemerkung (1.1.3) auftauchenden Abbildungen keinen Sinn.

BEMERKUNG 1.1.6.

Wir werden für die Knoten- bzw. Kantenmenge auch die Notation $\mathcal{V}(\Gamma)$ bzw. $\mathcal{E}(\Gamma)$ (bzw. $\mathcal{E}^\pm(\Gamma)$) verwenden, wenn wir den Bezug zu dem Graphen Γ herstellen wollen.

BEMERKUNG 1.1.7.

- i. Wenn wir betonen wollen, dass wir mit einer orientierten Kante $e \in \mathcal{E}^\pm$ arbeiten, schreiben wir oft auch \vec{e} für e .

- ii. In der Notation aus (i) schreiben wir $\overleftarrow{e} := \bar{e}$ für die invers orientierte Kante zu \vec{e} .

Von grundlegendem Interesse für jede algebraische Untersuchung von Objekten gehört die Bestimmung der Isomorphieklassen. Wir definieren die Isomorphie von Graphen wie in [Aig04, S. 108].

DEFINITION 1.1.8.

Seien $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ und $\Gamma' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ zwei Graphen (gerichtet oder nichtgerichtet). Wir sagen, die Graphen Γ und Γ' sind ISOMORPH, in Zeichen $\Gamma \cong \Gamma'$, genau dann, wenn es einen Isomorphismus zwischen \mathcal{V} und \mathcal{V}' gibt, der einen Isomorphismus der Kantenmengen \mathcal{E} und \mathcal{E}' induziert.

BEISPIEL 1.1.9.

- i. Die gerichteten Graphen

$$\Gamma = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3)\}) \quad \text{und} \quad \Gamma' = (\{3, 7, B\}, \{(3, B), (B, 7)\})$$

sind isomorph.

- ii. Die gerichteten Graphen

$$\Gamma = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3)\}) \quad \text{und} \quad \Gamma' = (\{3, 7, B\}, \{(3, B), (B, 3)\})$$

sind nicht isomorph.

DEFINITION 1.1.10.

Eine ORIENTIERUNG auf einem ungerichteten Graphen Γ ist eine Teilmenge $\mathcal{E}^+ \subset \mathcal{E}$, so dass $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \dot{\cup} \mathcal{E}^-$ mit $\mathcal{E}^- := \bar{\mathcal{E}}^+ = \{\bar{e} \mid e \in \mathcal{E}^+\}$ ist.

Dabei ist unmittelbar klar, dass auf jedem ungerichteten Graphen Γ ohne Kanten $e \in \mathcal{E}$ der Form $t(e) = o(e)$ eine Orientierung existiert. Zeichnen wir nämlich jede Kante $e \in \mathcal{E}$ entweder als positiv oder als negativ orientiert aus, so ist die Gesamtheit der positiv orientierten Kanten \mathcal{E}^+ sicher eine Teilmenge von \mathcal{E} mit der gewünschten Eigenschaft.

1.1.2 Diagramme von Graphen

BEMERKUNG 1.1.11.

Um sich den Umgang mit Graphen zu vereinfachen, ist folgende graphische Darstellung gebräuchlich. Statt die Knoten und Kanten formal als Mengen

zu definieren, veranschaulicht man sie in einem DIAGRAMM. Knoten identifiziert man naheliegenderweise mit Punkten, und Kanten werden mit Linien zwischen diesen Punkten verwirklicht. Weiter kennzeichnet man eine orientierte Kante, indem man von ihrem Ursprung aus in Richtung ihres Terminus einen Pfeil zeichnet.

BEISPIEL 1.1.12.

- i. Den ungerichteten Graphen Γ mit $\Gamma = (\{A, B\}, \{\{A, B\}\})$ veranschaulichen wir durch folgendes Diagramm (Abbildung (1)):

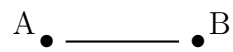


Abbildung 1: Beispiel ungerichteter Graph

- ii. Einen entsprechend gerichteten Graphen, etwa $\Gamma = (\{A, B\}, \{(A, B)\})$, stellen wir durch dar (Abbildung (2)).



Abbildung 2: Beispiel gerichteter Graph

- iii. Hier noch ein etwas komplizierterer gerichteter Graph, den wir der Übersicht halber nur als Diagramm (Abbildung (3)) darstellen.

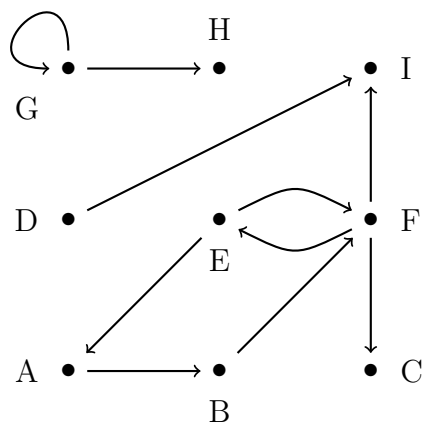


Abbildung 3: Beispiel gerichteter Graph

Im folgenden Abschnitt, wo es um die Eigenschaften der Graphen geht, beziehen wir uns zur Veranschaulichung öfter auf den dritten Teil dieses Beispiels.

1.1.3 Eigenschaften von Graphen

In dem Beispiel (1.1.12)(iii) haben wir einen etwas komplizierteren Graphen gesehen. Dieser weist verschiedene Eigenschaften auf, die wir nun charakterisieren wollen.

DEFINITION 1.1.13.

- i. Ein WEG oder PFAD (der Länge $n \in \mathbb{N}$) auf einem gerichteten Graphen Γ ist eine Folge von orientierten Kanten $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$, so dass $t(e_{i-1}) = o(e_i)$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ ist.
- ii. Ein Weg oder Pfad auf einem ungerichteten Graphen ist eine Folge von Knoten (v_0, v_1, \dots, v_n) , wobei $\{v_i, v_{i+1}\} \in \mathcal{E}$ ist für alle $0 \leq i < n-1$.

BEMERKUNG 1.1.14.

- i. Anstatt die Folge der zu durchlaufenden Kanten aufzuschreiben, beschreiben wir einen Weg auch durch die Angabe der entsprechenden Knoten, d.h. einen Weg $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ schreiben wir auch als (v_0, v_1, \dots, v_n) , wobei $o(e_i) = v_i$ für alle $0 \leq i \leq n-1$ und $t(e_i) = v_{i+1}$ für alle $0 \leq i \leq n-1$ ist. Dabei verlangen wir keinesweg, dass Knoten nicht mehrfach vorkommen dürfen.
- ii. Einen Pfad auf einem ungerichteten Graphen beschreiben wir auch durch die Folge der durchlaufenen ungerichteten Kanten $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$.

DEFINITION 1.1.15.

Als eine GEODÄTE bezeichnen wir einen kürzesten Weg zwischen zwei Knoten.

BEISPIEL 1.1.16.

In dem Beispiel (1.1.12)(iii) ist (A, B, F, I) eine Geodäte der Knoten A und I , wohingegen der Weg (A, B, F, E, A, B, F, I) keine Geodäte dieser beiden Knoten ist.

DEFINITION 1.1.17.

- i. Ein Paar der Form $(e_i, e_{i+1}) = (e_i, \bar{e}_i)$ für ein $0 \leq i \leq n-2$ in einem Weg $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ nennen wir ZURÜCKGEHEN.

ii. Ein Pfad, der kein Zurückgehen enthält nennen wir REDUZIERT.

BEMERKUNG 1.1.18.

Enthält ein Weg ein Zurückgehen, so kann man den Weg um die Länge zwei reduzieren. Eine Geodäte ist also immer ein Weg ohne Zurückgehen.

DEFINITION 1.1.19.

- i. Ein ungerichteter Graph $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ heißt ZUSAMMENHÄNGENDER GRAPH, wenn es zu je zwei Knoten $v, v' \in \mathcal{V}$ mindestens einen Weg gibt, der v mit v' verbindet.
- ii. Wir nennen einen gerichteten Graphen $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}^\pm)$ ZUSAMMENHÄNGENDER GRAPH, wenn sein assoziierter ungerichteter Graph diese Eigenschaft erfüllt.

BEISPIEL 1.1.20.

Der Graph aus Beispiel (1.1.12)(iii) ist nicht-zusammenhängend, weil zum Beispiel für die Knoten A und G kein verbindender Weg existiert.

Wir definieren nun einen Zykel bzw. Kreis mithilfe der Definition eines Weges.

DEFINITION 1.1.21.

Ein KREIS oder ZYKEL (der Länge $n \in \mathbb{N}$) ist ein Weg $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$, wobei v_0 und v_{n-1} durch eine Kante verbunden sind.

BEMERKUNG 1.1.22.

Ist der Graph gerichtet, so gilt für die Kante $e \in \mathcal{E}^\pm$ zwischen v_0 und v_{n-1} natürlich $o(e) = v_{n-1}$ und $t(e) = v_0$.

BEISPIEL 1.1.23.

In dem Graph aus Beispiel (1.1.12)(iii) ist zum Beispiel der Weg (A, B, F, E, A) ein Zykel der Länge 4.

Mithilfe der Definition von Kreisen und Zykeln definieren wir weiter:

DEFINITION 1.1.24.

Ein Graph Γ (gerichtet oder ungerichtet) heißt KOMBINATORISCHER GRAPH, wenn er keine Zykel der Länge kleiner gleich zwei enthält.

BEISPIEL 1.1.25.

Ein Beispiel für einen nicht kombinatorischen Graph findet man in Beispiel (1.1.12)(iii). Dort existiert eine Kante, bei der Ursprung und Terminus über-

einstimmen, d.h. ein Zykel der Länge eins (siehe Knoten G). Ebenso existiert ein Zykel der Länge zwei, nämlich $((E, F), (F, E))$.

Wir definieren schließlich noch wie in [Aig04, S. 113] den Begriff des Abstandes, der uns weitere geometrische Möglichkeiten liefert.

DEFINITION 1.1.26.

Als ABSTAND bzw. ABSTANDSFUNKTION stellt jeder zusammenhängender ungerichteter Graph die Funktion

$$\begin{aligned} d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ (u, v) &\longmapsto d(u, v) \quad , \end{aligned}$$

wobei $d(u, v)$ die Länge einer Geodäte von u nach v bezeichnet, zur Verfügung.

BEMERKUNG 1.1.27.

Den Abstand auf einem gerichteten Graphen definieren wir wieder über seinen assoziierten ungerichteten Graphen. Daher treffen wir weitere Aussagen über den Abstand ausschließlich für ungerichtete Graphen.

ERINNERUNG 1.1.28.

Um glaubhaft machen zu können, dass es sich auch um einen Abstand im Sinne der Metrik, wie etwa in [Heu91, S. 85] definiert, handelt, erinnern wir an die Definition:

Sei X eine nichtleere Menge und $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die für je drei Punkte $x, y, z \in X$ die Eigenschaften

- i. $d(x, y) \geq 0$ und es ist $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$ und
- iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

erfüllt. Dann nennen wir das Paar (X, d) einen METRISCHEN RAUM und d den ABSTAND.

BEMERKUNG 1.1.29.

- i. Es macht keine Sinn, eine Metrik auf einem nicht-zusammenhängenden Graphen zu definieren.
- ii. Auf dem (ungerichteten) Graphen $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ erhalten wir eine Metrik (\mathcal{V}, d) , wobei d die Abstandsfunktion auf dem Graphen ist, die wir in (1.1.26) definiert haben. Dass die geforderten Eigenschaften erfüllt sind, ist direkt klar.

- iii. Die Abstandsfunktion auf einem (ungerichteten) Graphen $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ist diskret, d.h sie erfüllt sogar $d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{N}_0$.

1.2 Bäume

Wie angekündigt führen wir einen Baum als einen Graphen mit speziellen Eigenschaften ein.

DEFINITION 1.2.1.

Ein BAUM \mathcal{T} ist ein zusammenhängender nicht-leerer ungerichteten Graph ohne Zykel.

BEMERKUNG 1.2.2.

Insbesondere ist ein Baum also ein kombinatorischer (ungerichteter) Graph.

BEISPIEL 1.2.3.

- i. Zum Beispiel gibt folgendes Diagramm (Abbildung (4)) einen Baum an:

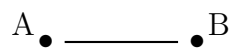


Abbildung 4: Beispiel Baum

- ii. Ein weiteres Beispiel für einen Baum ist in Abbildung (5) zu sehen:

PROPOSITION 1.2.4.

Sei \mathcal{T} ein Baum. Dann existiert für je zwei Knoten $P, Q \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ genau eine Geodäte und dieser Pfad ist injektiv, d.h. darin tritt jeder Knoten nur einfach auf.

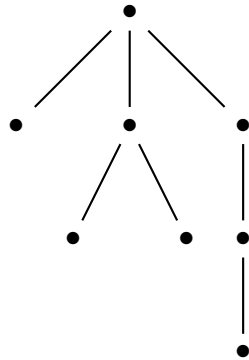


Abbildung 5: Beispiel Baum

Beweis. Den Beweis findet der Leser in [Ser80, S. 18].

□

BEMERKUNG 1.2.5.

Im Gegensatz zu manchen anderen Definitionen hat ein Baum in dieser Arbeit keine ausgezeichnete Wurzel.

Kapitel 2

Projektive Geometrie

Die projektive Geometrie ist in der Kunst aus der perspektivischen Darstellung dreidimensionaler Gegenstände auf einer zweidimensionalen Zeichenoberfläche entstanden. Eine Besonderheit, die in der projektiven Geometrie bzw. im projektiven Raum eine wesentliche Rolle spielt, ist die Tatsache, dass sich je zwei Geraden in einem Punkt schneiden. So schneiden sich auch Geraden, die in der euklidischen Ebene parallel verlaufen, in einem Punkt, dem „unendlich fernen Punkt“. Aus diesem, aus der Kunst motivierten Vorbild, ist die projektive Geometrie in der Mathematik entstanden. Sie ermöglicht es viele Sachverhalte kompakter und natürlicher zu formulieren.

Soweit eine kurze historische Einführung. In diesem Kapitel wollen wir die elementarsten Aussagen für den Umgang mit der projektiven Geometrie schaffen.

2.1 Der projektive Raum

Wir wollen hier die algebraische Variante zur Einführung des projektiven Raums verwenden. Für den Fall eines Vektorraums über einem Körper orientieren wir uns an [Fis79, Kapitel 3]. Wir verallgemeinern diese Definitionen und Sachverhalte danach auf den Fall eines freien Moduls über einem kommutativen lokalen Ring.

DEFINITION 2.1.1.

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Dann bezeichnen wir mit

$$\mathbb{P}(V) := \mathbb{P}_K(V) := \{U \subset V \mid \dim_K U = 1\},$$

den PROJEKTIVEN RAUM, also die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume von V . Ein $v \in \mathbb{P}(V)$ nennen wir PUNKT, obwohl v in V betrachtet einer Gerade entspräche.

DEFINITION 2.1.2.

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V sei

$$\dim_K \mathbb{P}(V) := \dim_K V - 1$$

die PROJEKTIVE DIMENSION, oder die Dimension von $\mathbb{P}(V)$.

DEFINITION 2.1.3.

Für den Körper K und ein $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$$

der KANONISCHE PROJEKTIVE RAUM über K .

Ein Vektor $0 \neq v \in V$ bestimmt eindeutig eine Gerade $K \cdot v$. Betrachten wir also die surjektive Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ v & \longmapsto & K \cdot v = Kv. \end{array}$$

Die Vektoren v und v' bestimmen genau dann die gleiche Gerade, wenn ein $\lambda \in K^*$ existiert, so dass

$$v' = \lambda v$$

ist.

DEFINITION 2.1.4.

Betrachten wir wieder den kanonischen Vektorraum $V = K^{n+1}$ und $v = (v_0, \dots, v_n) \in V \setminus \{0\}$, so setzen wir

$$(v_0 : \dots : v_n) := K(v_0, \dots, v_n)$$

für die Gerade in V . Im projektiven Raum betrachtet entspricht diese Gerade einem Punkt und wir nennen das $(n+1)$ -Tupel auf der linken Seite HOMOGENE KOORDINATEN des Punktes in $\mathbb{P}(V)$.

BEMERKUNG 2.1.5.

- i. Ist $v \in \mathbb{P}(V)$ ein Punkt im projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$, in homogenen Koordinaten gegeben durch $(v_0 : \dots : v_n)$, so ist mindestens einer der Einträge v_0, \dots, v_n verschieden von 0, da wir in der Definition (2.1.4) $v \in V \setminus \{0\}$ vorausgesetzt haben.

- ii. Seien $v = (v_0 : \dots : v_n)$ und $v' = (v'_0 : \dots : v'_n)$ zwei Punkte im projektiven Raum, dann gilt:

$$(v_0 : v_1 : \dots : v_n) = (v'_0 : v'_1 : \dots : v'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* \text{ mit } \begin{cases} v'_0 &= \lambda v_0, \\ v'_1 &= \lambda v_1, \\ &\vdots \\ v'_n &= \lambda v_n. \end{cases}$$

Wir wollen nun den bisher konstruierten projektiven Raum auf Moduln M über einem speziellen Ring verallgemeinern. Die Ringe, die wir im Folgenden betrachten, seien alle kommutativ und darüber hinaus lokal, d.h. insbesondere gilt

$$R = R^* \dot{\cup} \mathfrak{m},$$

wobei \mathfrak{m} das (eindeutige) maximale Ideal von R ist. Wesentlich für die Verallgemeinerung ist die Existenz einer Basis für den R -Modul M .

BEMERKUNG 2.1.6.

- i. Analog zu Definition (2.1.1) definieren wir den projektiven Raum für freie Moduln über einem kommutativen lokalen Ring als die Menge aller direkten Faktoren vom Rang eins.
- ii. In der Definition der homogenen Koordinaten müssen wir ein wenig aufpassen. Es reicht nicht aus zu verlangen, dass mindestens eine Koordinate verschieden von Null ist. Wir brauchen mehr noch: Mindestens eine Koordinate soll invertierbar sein.
- iii. Die übrigen Definitionen und die Bemerkung lassen sich in diesem Fall analog verallgemeinern. Im wesentlichen muss man nur Körper durch kommutativen lokalen Ring, Vektorraum durch Modul, Dimension durch Rang und die Eigenschaft, verschieden von Null zu sein, durch die Eigenschaft, invertierbar zu sein, ersetzen.

Das Folgende formulieren wir für den allgemeineren Fall eines freien Moduls M über einem kommutativen lokalen Ring R vom Rang $n \in \mathbb{N}$: Einen Punkt in homogenen Koordinaten $(v_0 : v_1 : \dots : v_n) \in \mathbb{P}_R(M) := \mathbb{P}(M)$ können wir in seiner Äquivalenzklasse so normieren, dass eine Komponente eins ist. Dazu benötigen wir lediglich eine invertierbare Koordinate. O.B.d.A. sei die nullte Koordinate in R invertierbar. Wir normieren den Punkt mit $\lambda = \frac{1}{v_0} \in R^*$ und erhalten den Punkt

$$(1 : v_1 : v_2 : \dots : v_n) \in \mathbb{P}(M)$$

in homogenen Koordinaten, den wir als Punkt (v_1, v_2, \dots, v_n) im R^n auffassen können, da wir durch die Normierung keine weiteren Wahlen bezüglich des Repräsentanten in der Äquivalenzklasse des Punktes $(1 : v_1 : v_2 : \dots : v_n)$ haben.

BEMERKUNG 2.1.7.

Wie wir im folgenden Korollar auch sehen werden, können wir den projektiven Raum zerlegen. Es ist allerdings zu bemerken, dass in dieser Zerlegung eine gewisse Willkür steckt.

BEISPIEL 2.1.8.

Betrachten wir etwa den Fall $M = K^2$ über einem Körper K . Dann ist es unserer Willkür überlassen, ob wir nach der ersten oder zweiten Komponente in den homogenen Koordinaten normieren. Je nach Wahl gibt uns das eine der folgenden beiden Zerlegungen:

i. Normierung der ersten Komponente:

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}^1(K) = \mathbb{P}(K) = \{(1 : y) \in \mathbb{P}(K)\} \dot{\cup} \{(0 : y) \in \mathbb{P}(K)\},$$

wobei man die erste Menge mit K identifizieren kann und die zweite Menge, die nur noch aus einem einzigen Punkt besteht definieren wir mit dem Symbol ∞ , d.h. es ist

$$\mathbb{P}(K) = K \dot{\cup} \{\infty\}.$$

ii. Normierung der zweiten Komponente:

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}^1(K) = \mathbb{P}(K) = \{(x : 1) \in \mathbb{P}(K)\} \dot{\cup} \{(x : 0) \in \mathbb{P}(K)\},$$

wobei man die erste Menge mit K identifizieren kann und die zweite Menge, die nur noch aus einem einzigen Punkt besteht, definieren wir mit dem Symbol ∞ , d.h. es ist

$$\mathbb{P}(K) = K \dot{\cup} \{\infty\}.$$

Die beiden Möglichkeiten sind mengentheoretisch dasselbe, phänomenologisch sind sie allerdings als unterschiedlich anzusehen. Aus arithmetischer Sicht betrachten wir sie als gleichwertig.

Für den Fall, dass $M = R^{n+1}$ mit einem kommutativen lokalen Ring R ist, gilt weiterhin:

PROPOSITION 2.1.9.

Sei $M = R^{n+1}$ ein freier Modul vom Rang $n + 1$ über R . Dann können wir den projektiven Raum $\mathbb{P}_R(M) = \mathbb{P}(M)$ wie folgt zerlegen:

$$\mathbb{P}(M) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} (\mathfrak{m}^i \times R^{n-i})$$

Dabei bezeichnen \mathfrak{m}^i und R^{n-i} das i -fache, bzw. das $(n - i)$ -fache kartesische Produkt von \mathfrak{m} bzw. R für alle $0 \leq i \leq n$.

Beweis. Es ist $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(R^{n+1}) = \mathbb{P}^n(R)$ und wir können $\mathbb{P}(R^{n+1})$ wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R^{n+1}) &= \{(1 : v_1 : \dots : v_n) \in \mathbb{P}(R^{n+1})\} \\ &\quad \dot{\cup} \{(v_0 : v_1 : \dots : v_n) \in \mathbb{P}(R^{n+1}) \mid v_0 \notin R^*\} \\ &\cong R^n \dot{\cup} (\mathfrak{m} \times \mathbb{P}(R^n)) \\ &\cong R^n \dot{\cup} \left(\mathfrak{m} \times \left(R^{n-1} \dot{\cup} \{(v_1 : \dots : v_n) \in \mathbb{P}(R^n) \mid v_1 \notin R^*\} \right) \right) \\ &\cong R^n \dot{\cup} \left(\mathfrak{m} \times \left(R^{n-1} \dot{\cup} \mathfrak{m} \times \mathbb{P}(R^{n-1}) \right) \right) \\ &= R^n \dot{\cup} (\mathfrak{m} \times R^{n-1}) \dot{\cup} (\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathbb{P}(R^{n-1})) \\ &= R^n \dot{\cup} (\mathfrak{m} \times R^{n-1}) \dot{\cup} (\mathfrak{m}^2 \times \mathbb{P}(R^{n-1})) \end{aligned}$$

Sukzessive Reduktion ergibt die Behauptung. □

Da wir später noch den Fall eines freien Moduls M vom Rang zwei über einem kommutativen lokalen Ring R explizit benötigen, verfassen wir die vorangehende Proposition in diesem Spezialfall (ohne Beweis) separat noch einmal:

KOROLLAR 2.1.10.

Sei M ein freier Modul vom Rang zwei über R . Dann können wir den projektiven Raum $\mathbb{P}_R(M) = \mathbb{P}(M)$ in

$$\mathbb{P}(M) = R \dot{\cup} \mathfrak{m}$$

zerlegen.

Beweis. Die Aussage ist lediglich ein Spezialfall von der vorangehenden Proposition. □

Kapitel 3

Beschreibung des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T}

Nachdem wir die Grundlagen zu Graphen und Bäumen im ersten Kapitel gelegt haben, wollen wir nun in das Thema des Bruhat-Tits Baums einsteigen. Wir stellen in diesem Kapitel den Zusammenhang zwischen diskret bewerteten Körpern und Bäumen her, erklären also, was es mit dem Bruhat-Tits Baum über einem diskret bewerteten Körper auf sich hat. Dabei orientiere ich mich an dem Buch von Serre [Ser80].

Die Struktur des Kapitels sieht vor, dass wir nach dem Festlegen der Notation für unsere Situation zuerst die Rolle von Gittern bei der Konstruktion der Knotenmenge \mathcal{V} des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T} erklären. Wir fassen Gitter unter einer gewissen Äquivalenzrelation zu Klassen zusammen. Die Menge dieser Äquivalenzklassen definiert uns die Knotenmenge \mathcal{V} des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T} . Dann erklären wir in einem eigenen Abschnitt eine Metrik und damit einen Abstand d auf der Menge der Gitterklassen, der sich später als der naheliegende, natürliche Abstand auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} herausstellt. Dadurch ergibt sich eine Möglichkeit, den Begriff der „Nachbarschaft“ einzuführen und die Menge der nicht-orientierten Kanten \mathcal{E} bzw. der orientierten Kanten \mathcal{E}^\pm des Bruhat-Tits Baumes \mathcal{T} als Menge von Paaren von Knoten mit Abstand eins zu definieren. Im weiteren Verlauf des Kapitels geht es um den Beweis, dass es sich bei dem bisher konstruierten Graphen \mathcal{T} wirklich um einen Baum handelt, wie es der Name Bruhat-Tits Baum suggeriert. Genau diesen Baum nennen wir den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} über einem diskret bewerteten Körper.

3.1 Notation

Es sei K ein Körper mit diskreter Bewertung v , d.h. ein Körper mit einer Abbildung

$$v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

die für alle $x, y \in K$ die Eigenschaften

- i. $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$,
- ii. $v(xy) = v(x) + v(y)$ und
- iii. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

erfüllt. Dabei ist $\infty + x = \infty$ und $\min\{\infty, x\} = \min\{x, \infty\} = x$ für alle $x \in K$. Weiter bezeichne $\mathcal{O} := \mathcal{O}_K$ den diskreten Bewertungsring von K bezüglich der Bewertung v , d.h.

$$\mathcal{O} = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\},$$

mit (eindeutigem) maximalem Ideal \mathfrak{m} . Für dieses gilt $(\pi) = \mathfrak{m}$, wobei π eine Uniformisierende ist, d.h. ein Element $\pi \in K^*$ mit $v(\pi) = 1$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \mathcal{O}^* \dot{\cup} \mathfrak{m} \\ &= \{x \in K \mid v(x) = 0\} \dot{\cup} \{x \in K \mid v(x) \geq 1\} \end{aligned}$$

und jedes Element $x \in K^*$ hat eine eindeutige Darstellung

$$x = \pi^{v(x)}u,$$

mit einer Einheit $u \in \mathcal{O}^*$. Für $x \in K^*$ ist

$$x\mathcal{O} = \pi^{v(x)}\mathcal{O} = \{y \in K \mid v(y) \geq v(x)\}$$

ein (gebrochenes) Ideal.

Zur Abkürzung der Notation verwenden wir die Bezeichnung κ für den Restklassenkörper $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ und $\kappa(n)$ für den Restklassenring $\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$ für $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, und $\kappa(0) := 0$ und $\kappa(1) := \kappa$.

Weiter sei $V = K \times K$ ein zweidimensionaler K -Vektorraum.

3.2 Knoten und Gitterklassen

In dem Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T} definieren wir die Knotenmenge \mathcal{V} als Menge von Äquivalenzklassen von Gittern. Dazu müssen wir zuerst klären, was ein Gitter eigentlich ist. Dabei konzentrieren wir uns direkt auf den für uns relevanten Fall eines Gitters in einem zweidimensionalen Vektorraum.

DEFINITION 3.2.1.

Ein GITTER in dem K -Vektorraum V ist ein endlich erzeugter \mathcal{O} -Untermodul L von V , der den K -Vektorraum V erzeugt.

LEMMA 3.2.2.

Sei L ein \mathcal{O} -Gitter. Dann enthält L eine K -Basis von V , die \mathcal{O} -Basis von L ist.

Beweis. Trivial. □

Auf der folgenden Proposition beruht die Einführung der oben angekündigten Äquivalenzrelation auf der Menge der Gitter.

PROPOSITION 3.2.3.

Ist $x \in K^$ und L ein Gitter von V , so ist Lx ein Gitter von V .*

Beweis. Trivial. □

Mit anderen Worten ausgedrückt, operiert die Einheitengruppe des Körpers K auf der Menge der Gitter von V . Damit ist die Einführung der folgenden Äquivalenzrelation wohldefiniert.

Daher operiert die Einheitengruppe K^* (von rechts) auf der Menge der Gitter in V .

DEFINITION 3.2.4.

Die zugehörige Bahn eines Gitters L unter der Operation von K^ bezeichnen wir als die GITTERKLASSE $[L]$, d.h. es ist*

$$[L] := \{Lx \mid x \in K^*\} = \{L\pi^i \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Umformuliert liest sich die Definition: Es liegen zwei Gitter L und L' genau dann in der gleichen Klasse, wenn eine Einheit $x \in K^*$ existiert, so dass $L = L'x$ ist. Wir schreiben $[L] = [L']$ und nennen dann L und L' äquivalent (in Zeichen: „ $L \sim L'$ “).

DEFINITION 3.2.5.

Wir definieren die KNOTENMENGE

$$\mathcal{V} := \{[L] \mid L \text{ ist Gitter von } V\}$$

als die Menge der Gitterklassen.

Wie wir in Definition (1.1.1) definiert haben, gehört zu einem Baum (bzw. einem Graphen) außer einer Menge von Knoten auch eine Menge von Kanten \mathcal{E} (bzw. \mathcal{E}^\pm), welche die Knoten in Beziehung setzt. Diese wollen wir als Paare von benachbarten Knoten definieren. Bevor wir dies tun können, müssen wir jedoch klären, was wir darunter verstehen, dass zwei Gitterklassen benachbart sind. Ein naheliegender Ansatz wäre, zwei Knoten als benachbart zu erklären, wenn ihr Abstand voneinander eins ist. Allerdings ist damit das Problem nicht gelöst, sondern lediglich umformuliert. Statt die Eigenschaft „benachbart zu sein“ direkt zu definieren, formulieren wir auf der Menge der Gitterklassen \mathcal{V} eine Abstandsfunktion und nennen dann zwei Gitterklassen benachbart oder adjazent, wenn ihr Abstand eins ist.

3.3 Abstandsfunktion

Seien L und L' zwei Gitter des K -Vektorraums V . Da beide Gitter insbesondere \mathcal{O} -Moduln vom gleichen Rang sind, folgt mit dem Elementarteilersatz unmittelbar die Proposition:

PROPOSITION 3.3.1.

- i. Sind L und L' zwei \mathcal{O} -Gitter von V , so existiert eine \mathcal{O} -Basis $\{e_1, e_2\}$ von L und ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ eine \mathcal{O} -Basis von L' ist.*
- ii. Die Menge $\{a, b\}$ ist unabhängig von der Wahl der Basen von L und L' .*

Beweis. Die Proposition ist gerade die Aussage des Elementarteilersatzes angewandt auf die Situation von freien \mathcal{O} -Moduln vom Rang zwei in einem K -Vektorraum V mit einem diskret bewerteten Körper K . \square

BEMERKUNG 3.3.2.

Auf den Fall von Gittern angewendet und anschaulich präsentiert liest sich

die Proposition (3.3.1) wie folgt:

Sei L ein Gitter in dem zweidimensionalen K -Vektorraum V . Dann existiert zu jedem Gitter L' in diesem Vektorraum eine Basis von L' , so dass sich die Basisvektoren von L' von denen von L nur in der Länge (um π -Potenzen) unterscheiden, nicht aber in der Richtung.

Nachdem wir nun eine erste Intuition von Gittern haben, wollen wir sie nun in Relation setzen und beschreiben, was das für die Basen der Gitter bedeutet.

Weiter sieht man auch das Folgende:

PROPOSITION 3.3.3.

In der Situation der vorangehenden Proposition (3.3.1) ist $L' \subset L$ genau dann, wenn a und $b \geq 0$ sind. In diesem Fall ist

$$L/L' \xrightarrow{\cong} \left(\mathcal{O}/\pi^a\mathcal{O}\right) \times \left(\mathcal{O}/\pi^b\mathcal{O}\right) \quad (= \kappa(a) \times \kappa(b)).$$

Wählt man andere Repräsentanten Lx aus $[L]$ und $L'y$ aus $[L']$ mit $x, y \in K^$, verändert sich $\{a, b\}$ zu $\{a + v(\frac{y}{x}), b + v(\frac{y}{x})\}$ ($v =$ diskrete Bewertung von K) und es ist*

$$|a - b| = \left| \left(a + v\left(\frac{y}{x}\right)\right) - \left(b + v\left(\frac{y}{x}\right)\right) \right|.$$

Beweis. Es seien a und b wie in Proposition (3.3.1). Dann ist

$$L' \subset L \Leftrightarrow a, b \geq 0$$

offensichtlich, da das heranzumultiplizieren von π die Gitter in einer oder in beiden Richtungen mindestens vergrößert. Es ist dann

$$\begin{aligned} L/L' &\cong (e_1\mathcal{O} \times e_2\mathcal{O}) / (e_1\pi^a\mathcal{O} \times e_2\pi^b\mathcal{O}) \\ &\cong \left(e_1\mathcal{O}/e_1\pi^a\mathcal{O}\right) \times \left(e_2\mathcal{O}/e_2\pi^b\mathcal{O}\right) \\ &\cong \left(\mathcal{O}/\pi^a\mathcal{O}\right) \times \left(\mathcal{O}/\pi^b\mathcal{O}\right). \end{aligned}$$

Wählt man die Repräsentanten Lx und $L'y$ mit $x, y \in K^*$, d.h. Lx mit Basis $\{e_1x, e_2x\}$ und $L'y$ mit Basis $\{e_1\pi^ay, e_2\pi^by\}$, dann wird aus $\{a, b\}$ die Menge $\{a + v(y) - v(x), b + v(y) - v(x)\} \stackrel{\text{Bew.}}{=} \{a + v(\frac{y}{x}), b + v(\frac{y}{x})\}$. \square

BEMERKUNG 3.3.4.

Die Zahl $|a - b|$ ist daher eine Invariante, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten in den Gitterklassen.

DEFINITION 3.3.5.

Der ABSTAND von $[L]$ und $[L']$ auf der Menge der Gitterklassen sei die Invariante $d([L], [L']) := |a - b|$, wobei a und b wie aus der vorangehenden Proposition (3.3.3) sind.

Mit dieser Definition haben wir nun eine Möglichkeit gefunden, Gitterklassen in (Abstands-)Relation zu setzen. Um besser damit umgehen zu können, zeichnen wir in jeder Gitterklasse ein Standardgitter aus.

PROPOSITION 3.3.6.

Sei L ein \mathcal{O} -Gitter von V . Dann existiert in jeder Klasse $[L']$ genau ein Repräsentant L' , der einer der folgenden äquivalenten Bedingungen genügt:

- i. $L' \subset L$ und L' ist in $[L']$ maximal mit dieser Eigenschaft,
- ii. $L' \subset L$ und $L' \not\subset L\pi$,
- iii. $L' \subset L$ und L/L' ist zyklisch.

Für ein L' , das diese Eigenschaften erfüllt gilt:

$$L/L' \cong \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} \quad (= \kappa(n)), \quad \text{wobei } n = d([L], [L'])$$

Beweis. a. Wir zeigen zunächst die Existenz und Eindeutigkeit eines \mathcal{O} -Gitters L' , das eine der Eigenschaften erfüllt. Sei $\{e_1, e_2\}$ eine geeignete (wie in (3.3.1)) \mathcal{O} -Basis von L , dann existieren nach Proposition (3.3.1) a und b aus \mathbb{Z} , so dass $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ eine Basis von L' ist. Nach Proposition (3.3.3) ist $L' \subset L$ genau dann, wenn $a, b \geq 0$ sind, d.h. $L' \not\subset L$ genau dann, wenn $a < 0$ oder $b < 0$. Es erfüllt $L'\pi^c \in [L']$ mit $c = -\min\{a, b\}$ die Bedingung (ii), da $L'\pi^{c-1} \not\subset L$. Aus der Eindeutigkeit von c folgt die Eindeutigkeit des Gitters.

b. Zeigen wir nun die Äquivalenzen, wobei die Äquivalenz von (i) und (ii) unmittelbar ist. Für die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt die Aussage aus der Tatsache, dass freie Moduln vom Rang ≥ 2 nicht zyklisch sein können: Sei (iii) erfüllt. Wir zeigen durch Widerspruch, dass dann (ii) gilt. Nehmen wir also an, $L' \subset L$ und $L' \subset L\pi$. Dann ist $L' \subset L\pi \subsetneq L$ und damit gilt $L/L\pi \subset L/L'$ zwischen freien Moduln, also

$$2 = \text{rg}_{\mathcal{O}}(L/L\pi) \leq \text{rg}_{\mathcal{O}}(L/L'),$$

was im Widerspruch zu Zyklizität von L/L' steht.

Für die umgekehrte Richtung zu zeigen seien L und L' zwei \mathcal{O} -Gitter

mit Basis $\{e_1, e_2\}$ bzw. $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ mit $a, b \geq 0$. Das geht nach Proposition (3.3.1) und (3.3.3). Wegen $L' \not\subset L\pi$ ist $a = 0$ oder $b = 0$. O.B.d.A. sei $a = 0$, dann ist $L/L' \xrightarrow{\cong} \kappa(b)$, also

$$\operatorname{rg}_{\mathcal{O}}(L/L') \leq 1,$$

d.h. L/L' ist zyklisch.

- c. Schließlich zeigen wir noch den Nachsatz. Dieser ergibt sich mithilfe von Proposition (3.3.3), da (wenn wir die Notation aus (a) verwenden) $a - c$ oder $b - c$ verschwindet. Es ist nämlich

$$L/L' \xrightarrow{\cong} \kappa(a - c) \times \kappa(b - c),$$

wobei $\kappa(a - c) = 0$ oder $\kappa(b - c) = 0$ ist und $n = \max\{a - c, b - c\}$ erfüllt die Behauptung. □

BEMERKUNG 3.3.7.

Sei L ein \mathcal{O} -Gitter aus dem Vektorraum V , das die Gitterklasse $[L]$ repräsentiert. Dann können wir für alle Gitter L' wie in Proposition 3.3.1 eine Basis $\{e_1, e_2\}$ von L finden, so dass $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ eine Basis von L' ist. In der Gitterklasse $[L']$ von L' finden wir darüberhinaus ein Gitter $L'_0 \in [L']$, nämlich $L'_0 = L'\pi^{-\min\{a, b\}}$, so dass L und L'_0 einen gemeinsamen Basisvektor in Richtung und Länge haben, und sich der zweite Basisvektor nur in der Länge durch eine positive Potenz von π unterscheidet.

KOROLLAR 3.3.8.

Die Funktion $d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definiert in der Tat einen Abstand auf $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{T})$.

Beweis. Es seien $[L_1], [L_2], [L_3]$ drei Gitterklassen. Dann gilt

- i. $d([L_1], [L_2]) = 0 \Leftrightarrow [L_1] = [L_2]$, da jedes Gitter aus $[L_1]$ auch in $[L_2]$ liegt und man beiden die gleiche Basis zuordnen kann,
- ii. $d([L_1], [L_2]) = d([L_2], [L_1])$, weil für $L_1 \in [L_1], L_2 \in [L_2]$ wie in Proposition (3.3.6)

$$L_1\pi^n \subset L_2 \subset L_1$$

gilt und wegen $L_1/L_1\pi^n \cong \kappa(n) \times \kappa(n)$ auch $L_1/L_2 \cong \kappa(n)$ und $L_2/L_1\pi^n \cong \kappa(n)$ erfüllt ist, und

iii. die Dreiecksungleichung

$$d([L_1], [L_3]) \leq d([L_1], [L_2]) + d([L_2], [L_3]).$$

Sie ergibt sich erst aus dem Beweis, dass \mathcal{T} wirklich ein Baum ist (3.5.1). Zur Zeit können wir nur eine Aussage über den Abstand zweier Knoten machen, wissen aber noch nichts Genaues über deren Lage zueinander. Das ergibt sich erst, wenn wir wissen, dass \mathcal{T} ein Baum ist und damit zyklfrei. Dann erhalten wir die Dreiecksungleichung aber unmittelbar.

□

Es steht nun nichts mehr der Definition der Kanten zwischen zwei Knoten (Gitterklassen) im Wege.

3.4 Kanten und Paare von Gitterklassen

Wir knüpfen in diesem Abschnitt an den ersten Abschnitt an. Darin haben wir die Menge der Gitterklassen

$$\mathcal{V} = \{[L] \mid L \text{ ist } \mathcal{O}\text{-Gitter von } V\}$$

als Knotenmenge des Bruhat-Tits Baumes \mathcal{T} definiert. In Definition (3.3.5) haben wir den Begriff des Abstandes auf der Menge der Gitterklassen eingeführt, welcher uns bei der Definition der Kantenmenge helfen wird. Der Abstand bietet eine Möglichkeit, Knoten (bzw. Gitterklassen) in Beziehung zu setzen. Wie angekündigt definieren wir nun:

DEFINITION 3.4.1.

Sind v und v' zwei Knoten (d.h. Gitterklassen), so heißen v und v' BENACHBART oder ADJAZENT, wenn ihr Abstand eins ist, d.h.

$$v \text{ und } v' \text{ sind benachbart} :\Leftrightarrow d(v, v') = 1.$$

BEMERKUNG 3.4.2.

- i. Für benachbarte Knoten v und $v' \in \mathcal{V}$ sagen wir auch: v ist ein Nachbar von v' , bzw. umgekehrt.
- ii. Es sei daran erinnert, dass nach Abschnitt (3.2) Knoten und Gitterklassen dasselbe sind. Den Abstand in Definition (3.3.5) haben wir für Gitterklassen definiert. Wegen der Identifikation führt das also zu keinerlei Widersprüchlichkeiten.

Mithilfe dieser Festlegung definieren wir weiter:

DEFINITION 3.4.3.

Die Menge der KANTEN in dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} ist die Menge von Paaren benachbarter Knoten. Dabei heißt diese Menge ORIENTIERT oder GERICHTET, wenn das Knotenpaar geordnet ist (v, v') , d.h.

$$\mathcal{E}^\pm := \{(v, v') \mid v \text{ und } v' \text{ benachbart in } \mathcal{T}\}.$$

Betrachten wir nicht-geordnete Paare $\{v, v'\}$, dann wird die Kantenmenge mit

$$\mathcal{E} := \{\{v, v'\} \mid v \text{ und } v' \text{ benachbart in } \mathcal{T}\}$$

bezeichnet und heißt UNGERICHTET, bzw. NICHT-ORIENTIERT.

BEMERKUNG 3.4.4.

- i. Wir bezeichnen den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} als gerichtet oder orientiert bzw. nicht-gerichtet oder nicht-orientiert, wenn die Kantenmenge von \mathcal{T} die entsprechende Eigenschaft hat.
- ii. Im gerichteten Fall liegt mit $e \in \mathcal{E}^\pm$ auch automatisch \bar{e} in \mathcal{E}^\pm .

3.5 Der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}

Nach den gemachten Vorbereitungen wollen wir in diesem Abschnitt zeigen, dass es sich bei dem bisher konstruierten \mathcal{T} , wie der Name schon suggeriert,

wirklich um einen Baum, den wir Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} nennen, handelt. Bisher haben wir nur einen Graphen \mathcal{T} konstruiert, d.h. ein Tupel von Knoten und Kanten. Wie wir im ersten Kapitel in Definition (1.2.1) definiert haben, zeigen wir, dass \mathcal{T} zusammenhängend, nicht-leer und zykliefrei ist.

THEOREM 3.5.1.

Der Graph $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ist ein Baum.

BEMERKUNG 3.5.2.

A priori ist der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} ein ungerichteter Graph. Wir können auf ihm aber eine Orientierung (wie in Definition (1.1.10)) festlegen, so dass wir auch von orientierten Kanten sprechen können. Diese Festlegung ergibt sich nicht automatisch aus der Konstruktion des Baumes. In späteren Kapiteln, etwa (5) und (6), werden wir davon Gebrauch machen und mit orientierten Kanten arbeiten.

Bevor wir dieses Theorem beweisen, erst einmal ein Beispiel für einen Bruhat-Tits Baum.

BEISPIEL 3.5.3.

Warum der Baum \mathcal{T} wie in Abbildung (6) genau so aussieht, wissen wir an dieser Stelle noch nicht. Es wird sich aber im nächsten Kapitel ergeben, dass jeder Knoten $v \in \mathcal{T}$ genau $q + 1$ viele Nachbarn hat, wobei $q = \#\kappa < \infty$ sein soll. Das Beispiel für $q = 2$ ist in Abbildung (6) dargestellt.

Für den Beweis von Theorem (3.5.1) brauchen wir den Satz von Jordan-Hölder für Moduln. Eine kurze Einführung und die wichtigsten Aussagen fasse ich in folgendem Unterabschnitt (3.5.1) zusammen. Sind dem Leser die Grundaussagen über Jordan-Hölder Reihen wohlbekannt, so kann er diesen Unterabschnitt (3.5.1) getrost überspringen.

3.5.1 Jordan-Hölder Reihen

In dieser Erinnerung oder Einführung zu Jordan-Hölder Reihen orientieren wir uns an dem Buch [Sol77, Kapitel 11], worin auch alle Beweise ausführlichst geführt werden, so dass wir diese hier nicht ausarbeiten müssen.

Die Notation dieses Unterabschnitts ist vollkommen unabhängig von der übrigen Notation zu betrachten.

Es sei A ein Ring und E ein A -Modul.

DEFINITION 3.5.4.

Eine KOMPOSITIONSREIHE eines A -Moduls E ist eine endliche Familie

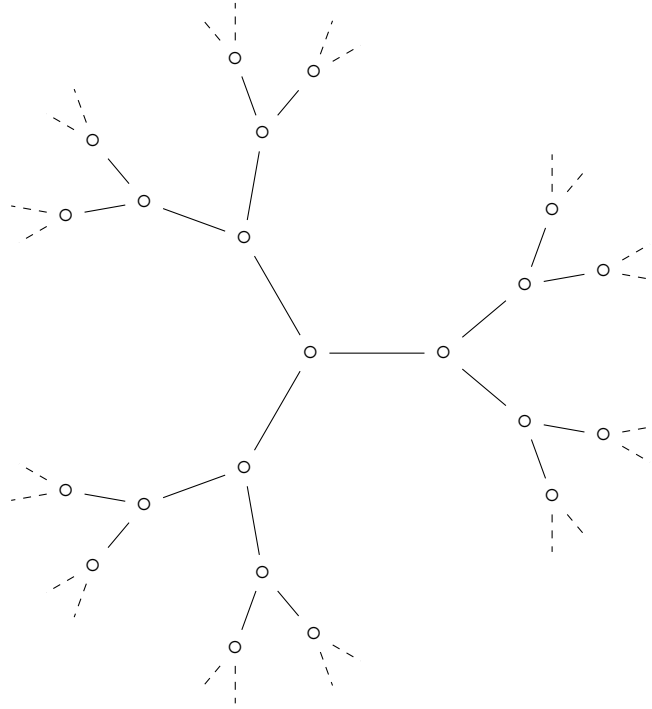


Abbildung 6: Der Bruhat-Tits Baum für $\#\kappa = 2$

$(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ von Untermoduln von E , so dass $E_0 = E$, $E_n = 0$ und

$$E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_{n-1} \supset E_n$$

eine absteigende Folge von Moduln ist. Die LÄNGE dieser Reihe ist durch die Zahl $n + 1$ gegeben.

Weiter nennen wir E_i/E_{i+1} für alle $0 \leq i \leq n - 1$ einen FAKTOR der Kompositionsreihe $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$.

DEFINITION 3.5.5.

Seien $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ und $(F_i)_{0 \leq i \leq m}$ zwei Kompositionsreihen, so nennen wir $(F_i)_{0 \leq i \leq m}$ eine VERFEINERUNG von $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$, wenn eine injektive Abbildung

$$\phi : \{0, 1, \dots, n\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, m\}$$

existiert, so dass für alle $0 \leq i \leq m - 1$

$$F_{\phi(i)} = E_i$$

ist.

DEFINITION 3.5.6.

Zwei Kompositionsreihen $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ und $(F_i)_{0 \leq i \leq m}$ heißen genau dann ÄQUIVALENT, wenn $m = n$ ist und eine bijektive Abbildung

$$\phi : \{0, 1, \dots, m-1\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$$

existiert, so dass für alle $0 \leq i \leq m-1$

$$F_{\phi(i)}/F_{\phi(i)+1} \cong E_i/E_{i+1}$$

gilt.

DEFINITION 3.5.7.

Eine JORDAN-HÖLDER REIHE eines A -Moduls E ist eine Kompositionsreihe $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ von E , so dass für alle $0 \leq i \leq n-1$ die Eigenschaft $E_{i+1} \subsetneq E_i$ erfüllt ist und die Kompositionsreihe $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ keine Verfeinerung zulässt.

DEFINITION 3.5.8.

Wir nennen einen A -Modul E EINFACH oder IRREDUZIBEL, wenn $E \neq 0$ ist und E nur die trivialen Untermoduln E und 0 enthält.

PROPOSITION 3.5.9.

Sei $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ eine Kompositionsreihe von E mit der Eigenschaft $E_{i+1} \subsetneq E_i$ für alle $0 \leq i \leq n-1$. Eine notwendige, aber auch hinreichende Bedingung dafür, dass $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ eine Jordan-Hölder Reihe ist, ist, dass alle Faktoren E_i/E_{i+1} ($0 \leq i \leq n-1$) einfache Moduln sind.

Beweis. Den Beweis findet der Leser in [Sol77, Kapitel 11, Proposition 3]. \square

Schließlich erhalten wir das Jordan-Hölder Theorem für Moduln, welches eine Aussage über die Länge und Klassen von Jordan-Hölder Reihen macht.

SATZ 3.5.10.

Je zwei Jordan-Hölder Reihen eines A -Moduls E sind (als Kompositionsreihen betrachtet) äquivalent.

Beweis. Den Beweis findet der Leser in [Sol77, Kapitel 11, Proposition 4]. \square

KOROLLAR 3.5.11.

Sei E ein A -Modul mit Jordan-Hölder Reihe. Dann haben alle Kompositionsreihen $(F_i)_{0 \leq i \leq n}$ von E , für die $F_{i+1} \subsetneq F_i$ für alle $0 \leq i \leq n-1$ gilt, eine Verfeinerung, die eine Jordan-Hölder Reihe ist.

Beweis. Den Beweis findet der Leser in [Sol77, Kapitel 11, Korollar zu Proposition 4]. \square

3.5.2 Beweis von Theorem (3.5.1): \mathcal{T} ist ein Baum

Beweis von Theorem (3.5.1). Wir beweisen die Teilaussagen

- i. $\mathcal{T} \neq \emptyset$,
 - ii. \mathcal{T} ist zusammenhängend und
 - iii. \mathcal{T} ist zyklfrei.
- i. \mathcal{T} ist offensichtlich nicht-leer, weil zum Beispiel der Knoten $[\mathcal{O} \times \mathcal{O}]$ in \mathcal{T} liegt.
 - ii. Seien L und L' zwei \mathcal{O} -Gitter, die die Gitterklassen $[L]$ und $[L']$ repräsentieren und für die $L' \subset L$ gilt. Es sei o.B.d.A. L' maximal mit dieser Eigenschaft und $L/L' \xrightarrow{\cong} \kappa(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann erhalten wir mithilfe der Jordan-Hölder Reihe

$$L/L' \xrightarrow{\cong} \kappa(n) \supset \kappa(n-1) \supset \dots \supset \kappa(1) \supset \kappa(0) = 0$$

eine Folge von Gittern

$$L = L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_{n-1} \supset L_n = L',$$

wobei alle L_{i-1}/L_i einfache Moduln sind, d.h. ihre Länge, die wir hier mit l bezeichnen, ist $l(L_{i-1}/L_i) = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die Klassen der Gitter $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}, L_n$ definieren einen Weg auf \mathcal{T} von $[L] = [L_0]$ nach $[L'] = [L_n]$. Also ist \mathcal{T} zusammenhängend.

- iii. Es sei $([L_0], [L_1], \dots, [L_{n-1}], [L_n])$ ein Weg der Länge $n \geq 1$ in \mathcal{T} ohne Zurückgehen. Wir wollen zeigen, dass $[L_0] \neq [L_n]$ ist. Wir zeigen durch Induktion nach n , dass $n = d([L_0], [L_n])$ ist. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial.

Wir wissen, dass wir in jeder Gitterklasse einen Repräsentanten finden können, so dass $L_{i+1} \subset L_i$ und $l(L_i/L_{i+1}) = 1$ ist. Das machen wir sukzessive, angefangen bei $L_1 \subset L_0$. Weiter haben wir nach dem Satz von Jordan-Hölder (3.5.10) die Eindeutigkeit der Länge

$$l(L_n/L_0) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} l(L_i/L_{i+1}) = n.$$

Wir müssen zeigen, dass $L_n \not\subset L_0\pi$ ist. Haben wir dies gezeigt, so haben $[L_n]$ und $[L_0]$ wirklich den Abstand n voneinander und können nicht

benachbart sein, also kann auch $([L_0], [L_1], \dots, [L_{n-1}], [L_n])$ kein Zykel sein.

Nach Induktionsannahme ist $L_{n-1} \not\subset L_0\pi$. In der κ -Ebene $L_{n-1}/L_{n-1}\pi$ liegen die beiden Geraden $L_n/L_{n-1}\pi$ und $L_{n-2}\pi/L_{n-1}\pi$, deren Urbilder unter der Projektionsabbildung gerade die Gitter L_n und $L_{n-2}\pi$ sind. Dabei sind L_n und $L_{n-2}\pi$ verschieden, ansonsten wäre nämlich der Weg (vgl. Abbildung (7))

$$([L_{n-2}], [L_{n-1}], [L_n])$$

$([L_{n-2}\pi] = [L_{n-2}])$ ein Weg mit Zurückgehen was ein Widerspruch zur Annahme wäre. Also sind L_n und $L_{n-2}\pi$ wirklich verschieden und

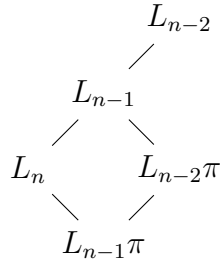


Abbildung 7: $([L_{n-2}], [L_{n-1}], [L_n])$ ist ein Zurückgehen

erzeugen daher aus Dimensionsgründen schon das Gitter L_{n-1} , d.h. es ist

$$L_{n-1} = L_n + L_{n-2}\pi.$$

Weil $L_{n-2}\pi \subset L_0\pi$ ist, was das Diagramm in Abbildung (8) sofort

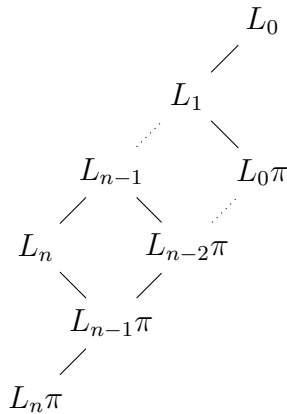


Abbildung 8: Es gilt $L_{n-2}\pi \subset L_0\pi$

erklärt, ist

$$L_{n-1} \equiv L_n \pmod{L_0\pi}$$

und wir können die Behauptung $L_n \not\subset L_0\pi$ erschließen.

□

Kapitel 4

Geometrie auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}

In diesem Kapitel erarbeiten wir die Geometrie des Bruhat-Tits Baumes \mathcal{T} . Insbesondere untersuchen wir die Nachbarschaft $\mathcal{C}_n(v)$ für einen Knoten $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T}), n \in \mathbb{N}_0$. Diese können wir als Punkte auf der projektiven Geraden von $L/\pi^n L$ mit $L \in v$ interpretieren. Die projektive Geometrie, die wir in Kapitel (2) eingeführt haben, spielt also eine wesentliche Rolle. Bei der Untersuchung elementarer geometrischer Objekte, wie Halbgerade, Gerade, Kreis oder Rand von \mathcal{T} , ist die Betrachtung des Bruhat-Tits Baums über der Kompletterung von K ein wichtiges Hilfsmittel. Daher führen wir noch einmal allgemein die Kompletterung eines Körpers ein.

4.1 Kompletterung des Bruhat-Tits Baums

Eine sehr schöne und nützliche Aussage über den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} ergibt sich, wenn wir seine Kompletterung $\widehat{\mathcal{T}}$ betrachten. Diese Aussagen leiten wir mithilfe der allgemeinen Situation her, wobei wir wieder die Notation aus Abschnitt (3.1) verwenden. Bei der Einführung der Kompletterung orientieren wir uns an den Büchern [Neu07, Kapitel 2] und [Lan02, Kapitel XII].

DEFINITION 4.1.1.

Sei K ein diskret bewerteter Körper. Wir definieren mithilfe der Bewertung v für ein $0 < \varrho < 1$ eine METRIK auf K durch die Abbildung

$$\begin{aligned} || : K &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto |x| := \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = 0, \\ \varrho^{v(x)}, & \text{wenn } x \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

die BETRAGSBEWERTUNG. Sie erfüllt für alle $x, y \in K$ folgende Eigenschaften:

- i. $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii. $|xy| = |x||y|$ und
- iii. $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

BEMERKUNG 4.1.2.

Die Wahl von $0 < \varrho < 1$ ist vollkommen willkürlich, da die Wahl von ϱ den „Konvergenzbegriff“ nicht ändert, wie auch die folgende Proposition zeigt.

PROPOSITION 4.1.3.

Seien $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ zwei Betragsbewertungen von K . Dann sind $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ genau dann äquivalent, wenn für alle $x \in K$ für eine feste reelle Zahl $s > 0$ gilt:

$$|x|_1 = |x|_2^s$$

Beweis. Den Beweis findet der Leser bei Satz (3.3) in [Neu07, S. 121f]. \square

DEFINITION 4.1.4.

Sei K ein bewerteter Körper mit diskreter Bewertung v , bzw. Betragsbewertung $|\cdot| = |\cdot|_v$. Es heißt K VOLLSTÄNDIG, wenn jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ in K gegen ein Element $a \in K$ konvergiert, d.h. wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$$

ist für alle Cauchy-Folgen $(a_n)_{n \geq 0} \subset K$.

DEFINITION 4.1.5.

Ist K vollständig und der Restklassenkörper endlich, so sprechen wir von einem LOKALEN KÖRPER.

BEMERKUNG 4.1.6.

Man kann für jeden bewerteten Körper $(K, |\cdot|)$ seine Kompletzierung bilden. Dazu geht man vor wie bei der Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Betrachte den Ring R aller Cauchy-Folgen von $(K, |\cdot|)$ und dessen maximales Ideal \mathfrak{m} aller Nullfolgen bzgl. $|\cdot|$. Setze

$$\widehat{K} := R/\mathfrak{m}$$

die KOMPLETTIERUNG von K . Dabei bettet man K in \widehat{K} so ein, dass man ein $a \in K$ auf die konstante Folge (a, a, a, \dots) abbildet. Weiter setzt man

die Bewertung v bzw. die Betragsbewertung $|\cdot|$ so auf \widehat{K} fort, dass man dem Element $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \widehat{K}$

$$|a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|, \quad \text{bzw.} \quad v(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(a_n)$$

zuordnet.

Weiter ist zu sagen, dass diese Komplettierung \widehat{K} eindeutig bis auf eindeutige Isometrie bestimmt ist, d.h. für zwei Komplettierungen von $(K, |\cdot|)$, etwa $(\widehat{K}, |\cdot|)$ und $(\widehat{K}', |\cdot|')$, gibt es genau einen K -Isomorphismus $\sigma : \widehat{K} \rightarrow \widehat{K}'$ mit $|a| = |\sigma a|$, der auf dem gemeinsamen Unterkörper K die Identität bewirkt.

Kommen wir nun zu den angekündigten Aussagen.

SATZ 4.1.7.

Sei $(K, \mathcal{O}, \mathfrak{m})$ ein Körper mit Bewertungsring \mathcal{O} und maximalem Ideal \mathfrak{m} und $(\widehat{K}, \widehat{\mathcal{O}}, \widehat{\mathfrak{m}})$ sein Komplettierung mit Bewertungsring $\widehat{\mathcal{O}}$ und maximalem Ideal $\widehat{\mathfrak{m}}$. Dann gilt:

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}$$

Ist weiterhin v eine diskrete Bewertung, so gilt auch

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Siehe etwa [Lan02, §5, Kapitel XII]. □

SATZ 4.1.8.

In einem lokalen Körper besitzt jedes Element $0 \neq x \in \widehat{K}$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \pi^m (a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots),$$

wobei π ein Primelement ist, die a_i ($i \geq 0$) aus einem Repräsentantensystem (mit der 0) von κ sind, $a_0 \neq 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist.

Beweis. Den Beweis findet der Leser in [Neu07, S. 132, Satz (4.4)]. □

SATZ 4.1.9.

Die kanonische Abbildung

$$\widehat{\mathcal{O}} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$$

ist ein Isomorphismus und ein Homöomorphismus.

Beweis. Den Beweis findet der Leser in [Neu07, S. 134, Satz (4.5)]. \square

Nach dem folgenden bekannten Satz können wir zu einem Satz kommen, der unsere Situation vielfach vereinfachen kann.

DEFINITION/SATZ 4.1.10.

Sei \widehat{K} die Kompletterung von K bzgl. der diskreten Bewertung v und L ein Gitter in V . Dann definieren wir

$$\widehat{V} := V \otimes_K \widehat{K} = \widehat{K} \times \widehat{K}$$

und

$$\widehat{L} := L \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}.$$

Dann ist \widehat{L} ein $\widehat{\mathcal{O}}$ -Gitter in \widehat{V} , und

$$\begin{array}{ccc} \{\mathcal{O}\text{-Gitter in } V\} & \longrightarrow & \{\widehat{\mathcal{O}}\text{-Gitter in } \widehat{V}\} \\ L & \longmapsto & \widehat{L} \end{array}$$

ist eine Bijektion.

Beweis. Die Bijektion folgt aus Satz (8.3) in [Neu07, S. 172]. \square

SATZ 4.1.11.

Sei V ein K -Vektorraum über dem lokalen Körper K und \widehat{V} seine Kompletterung, ein \widehat{K} -Vektorraum, bzgl. der diskreten Bewertung v . Dann sind die Bruhat-Tits Bäume \mathcal{T} von V und $\widehat{\mathcal{T}}$ von \widehat{V} isomorph, also

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathcal{T}}.$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Satz (4.1.10) und der Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \{L \mid L \text{ Gitter von } V\} & \longrightarrow & \{\widehat{L} \mid \widehat{L} \text{ Gitter von } \widehat{V}\} \\ L & \longmapsto & \widehat{L} := L \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}} \end{array}$$

folgt die Behauptung direkt. \square

BEMERKUNG 4.1.12.

Wir können also ab jetzt o.B.d.A. bei allen Betrachtungen des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T} annehmen, dass K ein vollständig diskret bewerteter Körper ist.

Im folgenden machen wir teilweise Gebrauch von Korollar (4.1.12), so dass wir ab jetzt für den Rest des Kapitels annehmen, dass $K = \widehat{K}$ ein vollständig diskret bewerteter Körper mit diskretem Bewertungsring $\mathcal{O} = \widehat{\mathcal{O}}$ ist. Ist die Tatsache der Vollständigkeit besonders wichtig, betonen wir dies an Ort und Stelle noch einmal explizit.

4.2 Geometrische Objekte auf dem Bruhat-Tits Baum

Anhand von [Ser80] und [Gek] wollen wir nun noch ein paar geometrische Objekte auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} einführen. Dabei nehmen wir, wie in Korollar (4.1.12) o.B.d.A. an, dass K vollständig ist. Ansonsten verwenden wir wieder die in (3.1) eingeführte Notation.

4.2.1 Kreise

Wir erinnern noch einmal an die Definition (1.1.15) der Geodäte in dem Fall des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T} : Die Geodäte von $v, w \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ ist der (eindeutige) kürzeste Weg von v nach w . Als seine Länge haben wir die Anzahl der Kanten zwischen v und w definiert.

DEFINITION/PROPOSITION 4.2.1.

Für einen fest gewählten Knoten $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ sei

$$\mathcal{C}(v) := \{w \in \mathcal{V}(\mathcal{T}) \mid d(v, w) = 1\}$$

ein KREIS mit dem Radius 1. Dann ist

$$\mathcal{C}(v) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_\kappa(L/L\pi)$$

für ein $L \in v$ eine natürliche Bijektion.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz später in einer etwas allgemeineren Variante (siehe den Beweis zu Proposition (4.2.3)). \square

KOROLLAR 4.2.2.

Ist κ endlich mit $q = \#\kappa$ Elementen, so hat v gerade $q + 1$ Nachbarn.

Beweis. Beweis durch abzählen der Elemente in der Menge

$$\mathbb{P}_\kappa(L/L\pi) = L/L\pi \cup \{\infty\}:$$

$$\#\mathbb{P}_\kappa(L/L\pi) = \#(L/L\pi \cup \{\infty\}) = \#(\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}) + 1 = q + 1$$

\square

DEFINITION/PROPOSITION 4.2.3.

Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und einen fest gewählten Knoten $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ sei

$$\mathcal{C}_n(v) := \{w \in \mathcal{V}(\mathcal{T}) \mid d(v, w) = n\}$$

ein KREIS mit dem Radius n . Sei $L \in v$ beliebig. Dann ist

$$\mathcal{C}_n(v) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_{\kappa(n)}(L/L\pi^n)$$

eine natürliche Bijektion.

Beweis. Es sei $L \in v$ ein beliebiges Gitter und $w \in \mathcal{C}_n(v)$ ein Knoten, der von v den Abstand n hat. Dann existiert nach (3.3.6) ein Gitter $L' \in w$ mit $L' \subset L$ und $L' \not\subset L\pi$. Dann ist $L/L' \cong \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$, wobei $n = d([L], [L']) = d(v, w)$ ist. Weiter ist $L/L\pi^n$ ein freier $\kappa(n)$ -Modul vom Rang zwei und $L'/L\pi^n$ ein direkter Faktor vom Rang eins des freien $\kappa(n)$ -Moduls $L/L\pi^n$. Daraus folgt, dass die Knoten $w \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ mit $d(v, w) = n$ eineindeutig den direkten Faktoren von $L/L\pi^n$ vom Rang eins entsprechen. Im Fall von Proposition (4.2.1) sind dies die Geraden in dem zweidimensionalen κ -Vektorraum $L/L\pi$. Identifiziert man die direkten Faktoren vom Rang eins mit den Punkten im projektiven Raum, so gilt: Die Knoten $w \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ mit $d(v, w) = n$ entsprechen eineindeutig den Punkten auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}_{\kappa(n)}(L/L\pi^n)$ von $L/L\pi^n$, also

$$\mathcal{C}_n(v) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_{\kappa(n)}(L/L\pi^n).$$

□

KOROLLAR 4.2.4.

Ist κ endlich mit $q = \#\kappa$ Elementen, so hat v gerade $q^{n-1}(q+1)$ Knoten von $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ im Abstand $n \geq 1$. Den Abstand 0 hat nur der Knoten v .

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist klar. Sei also $n \geq 1$. Wir zählen die Elemente der projektiven Gerade $\mathbb{P}_{\kappa(n)}(L/L\pi^n)$ mithilfe von Korollar (2.1.10) für den Fall eines Moduls vom Rang zwei:

$$\begin{aligned} \#\mathbb{P}_{\kappa(n)}(L/L\pi^n) &= \#\kappa(n) + \#(\pi\kappa(n)) \\ &= \#\left\{ \sum_{0 \leq i < n} a_i \pi^i \mid a_i \in \kappa \right\} + \#\left\{ \sum_{1 \leq i < n} a_i \pi^i \mid a_i \in \kappa \right\} \\ &= q^n + q^{n-1} \\ &= q^{n-1}(q+1) \end{aligned}$$

□

Wir wollen nun alle Knoten zählen, die innerhalb eines Kreises vom Radius $n \in \mathbb{N}$ liegen. D.h. wir bestimmen sozusagen den „Flächeninhalt“ eines Kreises vom Radius n .

KOROLLAR 4.2.5.

Es sei κ endlich mit $\#\kappa = q$ Elementen und $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ ein fest gewählter Knoten. Dann hat die Menge

$$\mathcal{AC}_n(v) := \{w \in \mathcal{V}(\mathcal{T}) \mid d(v, w) \leq n\} = \dot{\bigcup}_{0 \leq i \leq n} \mathcal{C}_i(v)$$

genau

$$\#\mathcal{AC}_n(v) = \frac{1+q}{1-q} (1 - q^n)$$

viele Elemente.

Beweis. Wir rechnen mithilfe von Korollar (4.2.4) und (unter Verwendung der Formel für die geometrische Reihe) nach:

$$\begin{aligned} \#\mathcal{AC}_n(v) &= \# \left(\dot{\bigcup}_{0 \leq i \leq n} \mathcal{C}_i(v) \right) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n-1} q^i (q+1) \\ &= (q+1) \sum_{0 \leq i \leq n-1} q^i \\ &= (q+1) \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

□

4.2.2 Halbgeraden, Enden, Geraden

Wir wollen nun definieren, was wir unter einer Halbgeraden auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T} verstehen wollen.

DEFINITION 4.2.6.

Eine HALBGERADE ist ein unendlicher Weg $(v_n)_{n \geq 0}$ ohne Zurückgehen mit $v_n \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

LEMMA 4.2.7.

Die Definition der Halbgeraden ist äquivalent zu: Eine Halbgerade ist ein Teilgraph von \mathcal{T} , der isomorph zu dem Graphen in Abbildung (9) ist.

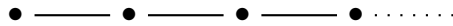


Abbildung 9: Gestalt einer Halbgeraden

Beweis. Die Aussage ist nur eine Umformulierung der Definition (4.2.6). \square

BEISPIEL 4.2.8.

Betrachten wir den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit einem endlichen Restklassenkörper, etwa $\#\kappa = 2$, so bildet der fett markierte Weg in Abbildung (10) eine Halbgerade.

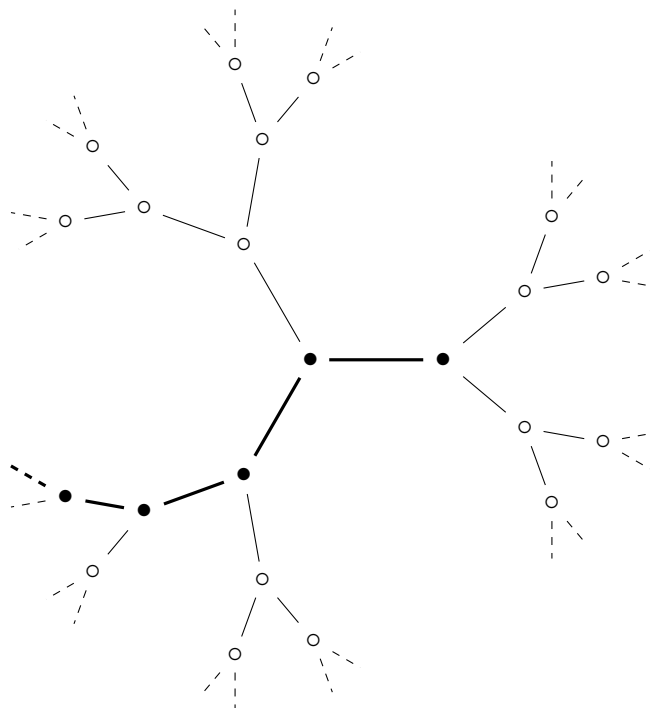


Abbildung 10: Halbgerade auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} , $\#\kappa = 2$

DEFINITION 4.2.9.

Seien $(v_n)_{n \geq 0}$ und $(w_m)_{m \geq 0}$ zwei Halbgeraden. Als ENDE bezeichnen wir eine

Äquivalenzklasse von Halbgeraden unter folgender Relation:

$$(v_n)_{n \geq 0} \sim (w_m)_{m \geq 0} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es existieren } k, l \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass } v_{i+k} = w_{i+l} \\ \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt.}$$

Weiter geben wir der Menge der Enden einen Namen.

DEFINITION 4.2.10.

Die Menge aller Enden bezeichnen wir als den RAND $\partial\mathcal{T}$ von \mathcal{T} .

Als eine Verallgemeinerung zu Kreisen mit endlichem Radius kann man den Rand des Bruhat-Tits-Baums \mathcal{T} als „Kreis von unendlichem Radius“ auffassen. Das lässt sich in Termen des projektiven Limes verstehen.

PROPOSITION 4.2.11.

Es gilt

$$\partial\mathcal{T} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \mathcal{C}_n(v) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}(K),$$

wobei es an dieser Stelle wesentlich ist, mit einem vollständigen Körper K zu arbeiten.

Beweis. Mithilfe von Proposition (4.2.3) ergibt sich die Aussage hier als projektiver Limes der Kreise mit Radius $n \in \mathbb{N}_0$, indem wir einen Knoten im Abstand n von einem Startknoten $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ mithilfe der repräsentierenden Gittern (wie in Proposition (3.3.6)) als direkten Faktor (wie in (4.2.3)) auffassen. Das verifiziert die linke Isomorphie

$$\partial\mathcal{T} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \mathcal{C}_n(v).$$

Die andere Isomorphie zeigt folgende Kette von Gleichheiten (vgl. [Gek, S. 3, (4)]):

$$\varprojlim_n \mathcal{C}_n(v) = \varprojlim_n \mathbb{P}_{\kappa(n)}(L/L\pi^n) = \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(L) = \mathbb{P}_K(V) = \mathbb{P}^1(K) =: \mathbb{P}(K)$$

Es sei noch einmal betont, dass es hier eine Rolle spielt, dass wir nach Satz (4.1.11) mit einem vollständig diskret bewerteten Körper K arbeiten dürfen. \square

Man kann die Enden auch in Gitterscheibweise interpretieren.

PROPOSITION 4.2.12.

Sei D eine Gerade in V , dann identifizieren wir ein Ende mit der Klasse der Folge von Gittern $(L_n)_{n \geq 0}$, wobei

$$L_n = L_0\pi^n + (L_0 \cap D)$$

sei. Umgekehrt ist D die eindeutig bestimmte Gerade, die im Durchschnitt von allen $L_n, n \in \mathbb{N}_0$ liegt.

Beachte hier, dass es sich bei V um einen vollständigen Vektorraum handelt, d.h. auch die Gitter sind in dem vollständigen Vektorraum zu betrachten.

Beweis. Im Wesentlichen wollen wir die Bijektivität von

$$\mathbb{P}(K) \longleftrightarrow \{\text{Klassen von } (L_n)_{n \geq 0}\}$$

mit

$$L_n = L_0 \pi^n + (L_0 \cap D),$$

zeigen. Dazu zerlegen wir diese Abbildung in zwei Teil. Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K) := \{\text{Ursprungsgeraden } D\} &\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{direkte freie Faktoren } M \\ \text{vom Rang eins in } L_0 \end{array} \right\} \\ D &\longmapsto D \cap L_0 \\ KM &\longleftarrow M \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{direkte freie Faktoren } M \\ \text{vom Rang eins in } L_0 \end{array} \right\} &\longleftrightarrow \{\text{Klassen von } (L_n)_{n \geq 0}\} \\ M &\longmapsto (M + L_0 \pi^n)_{n \geq 0} \\ \bigcap_{n \geq 0} L_n &\longleftarrow (L_n)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

eindeutige Identifikationen sind. Da viele Details den Aufwand des Formulierens nicht lohnen, skizzieren wir in mehreren Schritten, was zu tun ist, überlassen die Ausarbeitung der Details aber dem Leser.

Wir beginnen mit der ersten Bijektion:

- i. Zuerst verifiziert man, dass die Abbildungen in beiden Richtungen wohldefiniert sind, d.h. für eine Gerade D ist die Menge $D \cap L_0$ ein direkter freier Faktor vom Rang eins von L_0 und KM definiert für einen direkten freien Faktor M vom Rang eins in L_0 wirklich eine Gerade.
- ii. Für die Bijektivität zeigt man, dass die Kompositionen der beiden Abbildungen, einmal links gestartet und einmal rechts gestartet, die Identität auf den entsprechenden Mengen sind. D.h. es ist

$$K(D \cap L_0) = D$$

und

$$(KM) \cap L_0 = M$$

zu verifizieren.

Kommen wir nun zu der zweiten Abbildung:

- iii. Beschäftigen wir uns zuerst mit der Wohldefiniertheit der Abbildung von links nach rechts. Wir zeigen also, dass $([M + L_0\pi^n])_{n \geq 0}$ für einen direkten freien Faktor M vom Rang eins in L_0 eine Halbgerade definiert. Dazu zeigen wir, dass der Abstand von $M + L_0\pi^n$ zu L_0 gerade n ist, d.h. dass es sich um einen Pfad ohne Zurückgehen handelt: Sei v ein Basisvektor von M , also $M = v\mathcal{O}$ und $\{v, w\}$ eine \mathcal{O} -Basis von L_0 . Dann ist $\{\bar{v}\}$, wobei \bar{v} die Klasse von v in $L_0/L_0\pi^n$ sei, eine $\kappa(n)$ -Basis von $M/(L_0\pi^n \cap M)$. Nach dem ersten Isomorphiesatz gilt

$$M/(L_0\pi^n \cap M) \xrightarrow{\cong} (M + L_0\pi^n)/L_0\pi^n.$$

Es ist $M + L_0\pi^n$ ein freier \mathcal{O} -Modul vom Rang zwei mit Basis $\{v, \pi^n w\}$ und $L_0/L_0\pi^n$ ein freier $\kappa(n)$ -Modul mit Basis $\{\bar{v}, \bar{w}\}$. Weiter ist $(M + L_0\pi^n)/L_0\pi^n$ in $L_0/L_0\pi^n$ eingebettet. Daher gilt $M + L_0\pi^n \subset L_0$ und $M + L_0\pi^n \not\subset L_0\pi$. Also ist gezeigt, dass wir auf der rechten Seite der Abbildung eine Folge von benachbarten Knoten ohne Zurückgehen haben, also eine Halbgerade.

- iv. Zeigen wir nun die Wohldefiniertheit in der Umkehrrichtung. D.h. wir zeigen, dass es sich bei $\bigcap_{n \geq 0} L_n$ tatsächlich um einen direkten freien Faktor vom Rang eins in L_0 handelt.

Wir können uns auf den Fall von Halbgeraden mit Startgitter L_0 beschränken, da, wegen $L_n \subset L_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, der Schnitt von einem beliebigen Startgitter bis zum Gitter L_0 trivial ist.

Nach dem Elementarteilersatz finden wir für jedes Gitter L_n eine Basis von L_0 , etwa $\{v_n, w_n\}$, so dass $\{v_n, \pi^n w_n\}$ eine Basis von L_n ist. Weiter können wir induktiv noch mehr zeigen: Es existiert eine Basis $\{v_n, w_n\}$ von L_0 , so dass für alle $0 \leq k \leq n$ gilt: $\{v_n, \pi^k w_n\}$ ist ein Basis von L_k . Wähle nun einen Basisvektor \bar{w}_n des direkten Faktors $L_n/L_0\pi^n$ von $L_0/L_0\pi^n$ und \bar{v}_n als komplementären Basisvektor in $L_0/L_0\pi^n$. Nach dem Elementarteilersatz ist es nun möglich v_n und w_n so zu wählen, dass sie eine Basis aller vorangehenden Gitter bilden, d.h. wir können \bar{v}_n und \bar{w}_n so wählen, dass

$$\begin{aligned} \bar{v}_{n+1} &\equiv \bar{v}_n \pmod{\pi^n} \\ \bar{w}_{n+1} &\equiv \bar{w}_n \pmod{\pi^n} \end{aligned}$$

für alle $n \geq 0$ gilt.

Wähle nun Repräsentanten v_n und w_n für \bar{v}_n und \bar{w}_n , so dass

$$\begin{aligned} v_{n+1} &\equiv v_n \pmod{\pi^n} \\ w_{n+1} &\equiv w_n \pmod{\pi^n} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Wir können dann zeigen, dass es sich bei den Folgen $(v_n)_{n \geq 0}$ und $(w_n)_{n \geq 0}$ um Cauchy-Folgen handelt, die wegen der Vollständigkeit des betrachteten Vektorraum V konvergieren, d.h. die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n =: v$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n =: w$$

existieren. Also haben wir einen Basisvektor für $M := \bigcap_{n \geq 0} L_n$ gefunden und M ist ein freier direkter Faktor vom Rang eins in L_0 .

- v. Für die Bijektivität der Abbildung zeigen wir die Identität der Kompositionen der Abbildungen auf den entsprechenden Seiten. D.h. es ist

$$\bigcap_{n \geq 0} (M + L_0 \pi^n) = M$$

und

$$\left(\bigcap_{n \geq 0} L_n + L_0 \pi^n \right)_{n \geq 0} = (L_n)_{n \geq 0}$$

für einen direkten freien Faktor M vom Rang eins in L_0 und eine Halbgerade $([L_n])_{n \geq 0}$ zu beweisen. Diese Aussagen ergeben sich durch anwenden der Vorgehensweise wie bei der Verifikation der Wohldefiniertheit auf die entsprechenden Objekte hier.

□

Kommen wir nun zu den Geraden.

DEFINITION 4.2.13.

Als GERADE definieren wir ein Paar von verschiedenen Enden.

Die Definition von Geraden ist äquivalent zu der folgenden:

LEMMA 4.2.14.

Geraden sind Teilgraphen von \mathcal{T} , die isomorph zu dem Graphen in Abbildung (11) sind.

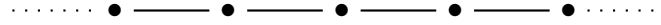


Abbildung 11: Gestalt einer Geraden

Beweis. Seien s und s' zwei Halbgeraden, die eine Gerade repräsentieren. Dann gibt es auf jeden Fall eine Geodäte $(w_n)_{0 \leq n \leq k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, die die Startknoten von s und s' verbindet. Der gesamte Pfad $s \cup (w_n)_{0 \leq n \leq k} \cup s'$ ist möglicherweise nicht reduziert. Ist dies der Fall, so ist klar, dass dieser Pfad Zurückgehen enthält. Eliminieren wir diese Zurückgehen, erhalten wir den gewünschten reduzierten Pfad, der zu dem Graphen in Abbildung (11) isomorph ist. \square

BEISPIEL 4.2.15.

Betrachten wir wieder den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit einem endlichen Restklassenkörper, etwa $\#\kappa = 2$, so zeigt uns der dick markierte Pfad in Abbildung (12) eine Gerade auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} .

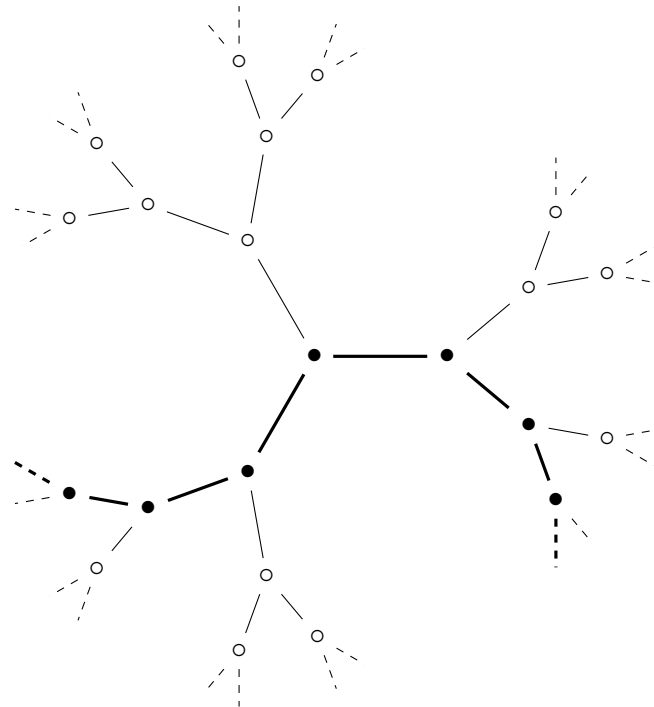


Abbildung 12: Gerade auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} , $\#\kappa = 2$

KOROLLAR 4.2.16.

Wir haben folgende bijektive Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{l} \text{Geraden} \\ \text{auf dem} \\ \text{Baum } \mathcal{T} \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{(i)} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Paare von} \\ \text{(ver-} \\ \text{schiedenen)} \\ \text{Enden} \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{(ii)} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Zerlegungen} \\ \text{von } V \text{ in eine} \\ \text{direkte Summe} \\ \text{von zwei} \\ \text{Geraden} \end{array} \right\} \\
 & & \updownarrow (iii) & & \\
 & & \left\{ \begin{array}{l} \text{Paare von} \\ \text{(ver-} \\ \text{schiedenen)} \\ \text{Punkten} \\ \text{auf } \mathbb{P}(K) \end{array} \right\} & &
 \end{array}$$

Beweis. i. Gilt nach Definition von Geraden (4.2.13).

ii. Die zweite Bijektion erhält man mit Proposition (4.2.12), in der der Zusammenhang von Geraden in V und Enden beschrieben wird. Man wendet die Proposition einfach auf Paare von Enden bzw. Geraden in V an.

iii. Die dritte Bijektion ist lediglich eine Umformulierung der Menge mithilfe von Proposition (4.2.11). □

BEMERKUNG 4.2.17.

In Korollar (4.2.16) ist es wieder wesentlich, dass V ein vollständiger Vektorraum ist.

Kapitel 5

Operationen von $GL(V)$ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}

Im Vorangehenden haben wir erarbeitet, in welchem Zusammenhang ein lokaler Körper K mit dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} steht. Nun wollen wir einen Zusammenhang zwischen Gruppen und diesem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} finden. Genauer gesagt, suchen wir im Folgenden eine Darstellung des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T} durch Nebenklassen der Gruppe $GL(V)$. Wir beschäftigen uns also mit der Automorphismengruppe $GL(V)$ des Vektorraums V .

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, G_x der Stabilisator und Gx die Bahn eines Elements $x \in X$. Wir wollen mithilfe der Bijektion

$$G/G_x \xrightarrow{\cong} Gx$$

die Gitter- ($\{L \mid L \text{ Gitter von } V\}$), Knoten- (\mathcal{V}), Kanten- (\mathcal{E} bzw. \mathcal{E}^\pm), Randmenge ($\partial\mathcal{T}$) usw. als Restklassenmengen der Gruppe $GL(V)$ beschreiben. Dies ist möglich, da die Gruppe $GL(V)$ auf diesen Mengen transitiv operiert. Es sei nochmal an die Definition einer Operation erinnert: Eine OPERATION (von links) einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{„}\cdot\text{“} : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x =: gx, \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

- i. $1_G x = x$ und
- ii. $g(hx) = (gh)x$

für alle $g, h \in G$ und $x \in X$. Analog dazu ist eine Operation von rechts definiert.

Weiter ist die FIXGRUPPE oder der STABILISATOR eines Elements $x \in X$ unter G die Gruppe

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G \text{ mit } gx = y,$$

so bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von $x \in X$ als die G -BAHN oder den G -ORBIT von x unter der Gruppe G . Eine Gruppe G operiert TRANSITIV auf einer Menge X genau dann, wenn es nur eine G -Bahn gibt.

5.1 Notation

Unsere Situation schließt sich an die Situation und Notation aus den Kapiteln (3) und (4) an. Weiter fixieren wir das Folgende:

Es sei (wobei die hervorgehobenen Wörter definierend gemeint sind)

- $L_0 := \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ das BASISGITTER mit BASISKNOTEN $v_0 := [L_0] \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$,
- $L_n := \mathcal{O} \times \pi^n \mathcal{O}$ ein weiteres Gitter mit Knoten $v_n := [L_n] \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$, $n \in \mathbb{N}$,
- $\vec{e}_0 := (v_0, v_1) \in \mathcal{E}^\pm(\mathcal{T})$ die orientierte BASISKANTE und $e_0 := \{v_0, v_1\} \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ die entsprechende nicht-orientierte BASISKANTE,
- $\vec{p}_n := (e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ der BASISWEG der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit orientierten Kanten e_0, e_1, \dots, e_{n-1} bzw. Knoten v_0, v_1, \dots, v_n wie oben,
- $\vec{p}_\infty := (v_n)_{n \geq 0} = (v_0, v_1, \dots)$ die BASISHALBGERADE mit orientierten Kanten, also gleich dem Basisweg mit unendlicher Länge,
- $s \in \partial\mathcal{T}$ das BASISSENDE, repräsentiert durch die Basishalbgerade \vec{p}_∞ und
- $s_1 s_2 = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots)$ mit $s_1, s_2 \in \partial\mathcal{T}$ und $v_n = [\mathcal{O} \times \pi^n \mathcal{O}]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ die BASISGERADE.

Außerdem sei im ganzen Kapitel $G := GL(V) = GL(2, K) = GL(K)$ die Gruppe der K -Automorphismen von V .

5.2 Grundlagen

Zuerst wiederholen wir noch einmal die in der Vorbemerkung dieses Kapitels gemachten Aussagen und beweisen sie.

Beschreibung der Bahnen

LEMMA 5.2.1.

Die Gruppe $G = GL(V)$ operiert transitiv auf der

i. Menge der Gitter

und daher auf

ii. auf der Knotenmenge $\mathcal{V}(\mathcal{T})$.

Ebenso operiert G transitiv auf

iii. der Menge der nicht-orientierten Kanten $\mathcal{E}(\mathcal{T})$,

iv. der Menge der orientierten Kanten $\mathcal{E}^\pm(\mathcal{T})$,

v. der Menge der Wege der Länge $n \in \mathbb{N}$,

vi. der Menge der Halbgeraden,

vii. dem Rand $\partial\mathcal{T}$ und auf

viii. der Menge der Geraden

von \mathcal{T} .

Beweis. Diese Aussage ist für Gitter unmittelbar klar, da je zwei Basen $\{v_1, v_2\}, \{w_1, w_2\}$ von V bekannterweise durch eine Matrix aus G ineinander überführt werden können und Gitter von den K -Basen von V über \mathcal{O} erzeugt werden. Eine Konsequenz davon ist, dass G auch auf der Menge der Knoten \mathcal{V} transitiv operiert.

Auf der Menge der Kanten und Wegen der Länge $n \in \mathbb{N}$ operiert G transitiv, weil G auf den Gittern transitiv operiert und eine Kante nach (4.2.1), bzw. ein Weg nach (4.2.3) eineindeutig einem direkten Faktor vom Rang eins von $L/L\pi$ bzw. $L/L\pi^n$ für ein Gitter L des Ursprungsknotens $v = [L] \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ der Kante bzw. des Weges entspricht und die Fixgruppe von L transitiv auf diesen Faktoren operiert.

Dass G transitiv auf den Enden operiert sehen wir mit der Darstellung für Enden aus (4.2.12), wo jedem Ende eine Folge

$$(L_n)_{n \geq 0} = (L_0 \pi^n + (L_0 \cap D))_{n \geq 0}$$

von Gittern $(L_n)_{n \geq 0}$ zugeordnet wird, wobei D eine Gerade in V ist und es wesentlich ist, die Kompletierung zu betrachten. Da G auf den Geraden von V transitiv operiert, operiert G auch transitiv auf den Enden. Um zu zeigen, dass G auch auf der Menge der Halbgeraden transitiv operiert, müssen wir nur zeigen, dass wir innerhalb einer Äquivalenzklasse von einem Ende je zwei Halbgeraden ineinander überführen können. Dies ist aber klar, da wir endliche Wege ineinander überführen können und sich Halbgeraden in einer Äquivalenzklasse nur durch einen solchen unterscheiden. \square

BEMERKUNG 5.2.2.

Betrachten wir statt der Operation von $GL(V)$ die Operation der PROJEKTIVEN LINEAREN AUTOMORPHISMENGRUPPE von V

$$PGL(V) := GL(V)/Z(K)$$

mit Zentrum $Z(K)$ von $GL(V)$, so sieht man leichter ein, dass $PGL(V)$ transitiv auf obigen Mengen operiert. Zum Beispiel entsprechen die Kanten, Wege und Enden eineindeutig den Punkten auf gewissen projektiven Geraden, wenn man die Kompletierung von K betrachtet (vgl. (4.2.1), (4.2.3) und (4.2.11)), worauf die Gruppe $PGL(V)$ offensichtlich transitiv operiert.

LEMMA 5.2.3.

Sei X eine Menge und G eine Gruppe, die auf X operiert und $x \in X$. Weiter sei G_x die Fixgruppe von x und Gx die Bahn von x unter G . Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G/G_x & \xrightarrow{\cong} & Gx \\ gG_x & \longmapsto & gx \end{array}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. i. Wir zeigen die Wohldefiniertheit: Für $g, h \in G$ und $f \in G_x$ mit $g = hf$ gilt für ein $x \in X$:

$$gx = hfx \stackrel{f \in G_x}{=} hx$$

ii. Die Abbildung ist surjektiv, da für ein $g \in G$, d.h. ein $gx \in Gx$ auch gG_x ein Urbild ist.

- iii. Um die Injektivität zu zeigen wähle man $g, g' \in G$ mit $gx = g'x$. Dann ist $g^{-1}g'x = x$ und damit $g^{-1}g' \in G_x$, also $gG_x = g'G_x$. □

Inversion von orientierten Kanten

Fixiere die Matrizen $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\Pi := \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir betrachten die Operation von $w\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ auf der orientierten Basiskante \vec{e}_0 . Es sei $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Basis von $L_0 \in [L_0] \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pi \right\}$ die Basis von $L_1 \in [L_1] \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$, sowie $\vec{e}_0 := ([L_0], [L_1])$ die Kante von $[L_0]$ nach $[L_1]$ und $\overleftarrow{e}_0 = ([L_1], [L_0])$ die invers orientierte Kante zu \vec{e}_0 .

PROPOSITION 5.2.4.

Es gilt

$$w\Pi\vec{e}_0 = \overleftarrow{e}_0$$

und

$$(w\Pi)^2\vec{e}_0 = \vec{e}_0.$$

Beweis. Nachrechnen. □

5.3 Stabilisatoren auf dem Bruhat-Tits Baum

Für die Stabilisatoren, die wir im folgenden bestimmen, verwenden wir die folgende Notation:

Der Stabilisator (für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$)

- des Basiskitters $L_0 = \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ sei G_{L_0} ,
- des Gitters $L_n = \mathcal{O} \times \pi^n \mathcal{O}$ sei G_{L_n} ,
- des Basisknotens $v_0 = [\mathcal{O} \times \mathcal{O}]$ sei G_{v_0} ,
- des Knotens $v_n = [\mathcal{O} \times \pi^n \mathcal{O}]$ sei G_{v_n} ,
- der nicht-orientierten Kante $e_0 = \{v_0, v_1\}$ sei G_{e_0} ,
- der orientierten Kante $\vec{e}_0 = (v_0, v_1)$ sei $G_{\vec{e}_0}$,
- des Weges \vec{p}_n der Länge n mit orientierten Kanten sei $G_{\vec{p}_n}$,
- der Halbgeraden \vec{p}_∞ mit orientierten Kanten sei $G_{\vec{p}_\infty}$,
- des Endes s sei G_s ,
- der Geraden $s_1 s_2$ sei $G_{s_1 s_2}$.

Dabei handelt es sich um Untergruppen von G .

Stabilisator des Gitters L_0 und L_n

Für den Stabilisator des Gitters L_0 gilt der folgende Satz:

SATZ 5.3.1.

Der Stabilisator des Gitters L_0 ist

$$G_{L_0} = GL(\mathcal{O}).$$

Beweis. Wir rechnen nach: Sei A eine geordnete Basis von L_0 und B eine geordnete Basis eines Gitters L'_0 , dann gilt:

$$\begin{aligned} L_0 = L'_0 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} : \exists x' \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \text{ mit } Ax = Bx' \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} : \exists x' \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \text{ mit } B^{-1}Ax = x' \\ &\Leftrightarrow B^{-1}A \in GL(\mathcal{O}) \\ &\Leftrightarrow A \in B \cdot GL(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

D.h. zwei Basen erzeugen genau dann dasselbe Gitter, wenn sie sich nur durch ein Element aus $GL(\mathcal{O})$ unterscheiden. \square

Dieses Resultat lässt sich leicht auf den Fall des Gitters $L_n = \mathcal{O} \times \pi^n \mathcal{O}$ verallgemeinern. Der Stabilisator ergibt sich durch Konjugation aus dem Stabilisator von L_0 .

SATZ 5.3.2.

Der Stabilisator des Gitters L_n , $n \in \mathbb{N}$, ist

$$\begin{aligned} G_{L_n} &= P^n G_{L_0} P^{-n} \\ &= P^n GL(\mathcal{O}) P^{-n} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi^{-n}b \\ \pi^n c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \mid a, b, c, d \in \mathcal{O} \right\} \end{aligned}$$

mit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$.

Beweis. Wir rechnen nach: Sei A eine geordnete Basis von L_n und B eine geordnete Basis eines Gitters L'_n , dann gilt:

$$\begin{aligned} L_n = L'_n &\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{O} \times \pi^n \mathcal{O} : \exists x' \in \mathcal{O} \times \pi^n \mathcal{O} \text{ mit } Ax = Bx' \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} : \exists x' \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \text{ mit } AP^n x = BP^n x' \\ &\Leftrightarrow P^{-n} B^{-1} AP^n \in GL(\mathcal{O}) \\ &\Leftrightarrow A \in BP^n GL(\mathcal{O}) P^{-n} \end{aligned}$$

D.h. zwei Basen erzeugen genau dann dasselbe Gitter, wenn sie sich nur durch ein Element aus $P^n GL(\mathcal{O}) P^{-n}$ unterscheiden. \square

Stabilisator des Knoten v_0 und v_n

Die Stabilisatoren der Knoten $v_0 = [L_0]$ und $v_n = [L_n]$ erhält man einfach, indem man die Definition der Knoten als Klassen von Gittern betrachtet.

SATZ 5.3.3.

Der Stabilisator von v_0 ist

$$\begin{aligned} G_{v_0} &= G_{L_0} Z(K) \\ &= GL(\mathcal{O}) Z(K) \end{aligned}$$

und der Stabilisator von v_n ist

$$\begin{aligned} G_{v_n} &= G_{L_n} Z(K) \\ &= P^n GL(\mathcal{O}) P^{-n} Z(K), \end{aligned}$$

wobei $Z(K)$ das Zentrum von G bezeichnet.

Beweis. Knoten sind Äquivalenzklassen von Gittern unter der Relation der Multiplikation mit $x \in K^*$. In Matrixschreibweise beschreiben wir dies durch Multiplikation mit der Matrix $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in Z(K)$ mit $x \in K^*$. Die Matrizen aus dem Zentrum kommutieren mit allen anderen Matrizen, so dass sich die Behauptung unmittelbar aus den Sätzen (5.3.1) und (5.3.2) ergibt. \square

Mit den bisherigen Ergebnissen können wir die Knoten $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T} mit der Restklassenmenge von G nach dem Stabilisator G_{v_0} identifizieren, d.h. es gilt

$$GL(K)/GL(\mathcal{O})Z(K) \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}(\mathcal{T}).$$

Stabilisator der Kanten \vec{e}_0 und e_0

Bevor wir nun zu den Stabilisatoren von orientierten bzw. nicht-orientierten Kanten kommen, erinnern wir uns noch einmal an die Definition der Nachbarschaft zweier Knoten. Sei $v = [L]$ ein Knoten von $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ der durch das Gitter L von V repräsentiert wird. Dann entsprechen die Nachbarn $\mathcal{C}(v)$ von v , d.h. die Knoten $w \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ mit $d(v, w) = 1$, wie wir in Proposition (4.2.1) gesehen haben, eineindeutig den direkten Faktoren von $L/L\pi$ vom Rang eins, d.h. den Geraden in dem κ -Vektorraum $L/L\pi$.

SATZ/DEFINITION 5.3.4.

Der Stabilisator $G_{\vec{e}_0}$ von \vec{e}_0 besteht aus den Elementen $g \in G_{L_0}$ deren Projektion \bar{g} auf die lineare Restklassengruppe $GL(L_0/L_0\pi)$ die Gerade $L_1/L_0\pi$ stabil lässt. Diese Gruppe nennen wir die IWAHORI UNTERGRUPPE

$$\mathfrak{I} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \mid a, b, c, d \in \mathcal{O} \text{ und } c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$$

von G relativ zur Kante \vec{e}_0 . Der Stabilisator $G_{\vec{e}_0}$ ist also

$$G_{\vec{e}_0} = \mathfrak{I} \cdot Z(K).$$

Beweis. Der Stabilisator $G_{\vec{e}_0}$ ist

$$G_{\vec{e}_0} = G_{v_0} \cap G_{v_1} = (G_{L_0} \cap G_{L_1}) Z(K),$$

wobei L_0 und L_1 gerade die in Proposition (3.3.6) beschriebene Eigenschaft haben, d.h. $L_1 \subset L_0$ und $L_1 \not\subset L_0\pi$.

Dann ist der Stabilisator $G_{e_0}^{\rightarrow}$ die Teilmenge von G , die das Gitter L_0 invariant lässt und zusätzlich die Gerade $L_1/L_0\pi$ in $L_0/L_0\pi$ auf sich abbildet. Der Stabilisator ist also (Beachte: Für diese und folgende Rechnungen verwenden wir eine abkürzende Schreibweise für Matrizen. Wir geben für alle Einträge an, aus welcher Menge diese zu entnehmen sind. Stillschweigend sei dabei immer vorausgesetzt, dass es sich um invertierbare Matrizen handelt.)

$$\begin{aligned} G_{e_0}^{\rightarrow} &= \left(G_{L_0} \cap \text{proj}_{\kappa}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix} \right) \cdot Z(K) \\ &= \left(GL(\mathcal{O}) \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \right) \cdot Z(K) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \mid c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\} \cdot Z(K), \end{aligned}$$

wobei $\text{proj}_{\kappa} : GL(K) \longrightarrow GL(\kappa)$ die im Satz genannte Projektionsabbildung ist. □

Dieser Satz lässt sich natürlich auch unter Verwendung von Matrizenrechnung herleiten.

Alternativer Beweis zu Satz (5.3.4). Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} G_{e_0}^{\rightarrow} &= G_{v_0} \cap G_{v_1} \\ &= (G_{L_0} \cap G_{L_1}) \cdot Z(K) \\ &\stackrel{(5.3.2)}{=} (GL(\mathcal{O}) \cap P^1GL(\mathcal{O})P^{-1}) \cdot Z(K) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{-1}\mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \right) \cdot Z(K) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit $\pi^{-1}\mathcal{O} \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}$ und $\pi\mathcal{O} \cap \mathcal{O} = \pi\mathcal{O}$ das Behauptete, also

$$\begin{aligned} G_{e_0}^{\rightarrow} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \mid c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\} \cdot Z(K) \\ &= \mathfrak{J} \cdot Z(K). \end{aligned}$$

□

Der Stabilisator für die nicht-orientierte Kante $e_0 = \{v_0, v_1\}$ ergibt sich als die Menge derjenigen Elemente aus G , die die orientierte Kante \vec{e}_0 in sich oder in die invers orientierte Kante \overleftarrow{e}_0 abbilden.

SATZ 5.3.5.

Sei e_0 die nicht-orientierte Kante $\{v_0, v_1\}$ mit den (ungeordneten) Extremitäten v_0 und v_1 , sowie \vec{e}_0 die orientierte Kante mit $o(\vec{e}_0) = v_0$ und $t(\vec{e}_0) = v_1$. Dann gilt für den Stabilisator

$$G_{e_0} = \mathfrak{J} \cdot Z(K) \cup w\Pi \mathfrak{J} \cdot Z(K),$$

wobei $w\Pi$ wie vorher die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ ist. Weiter können wir diese Fixgruppe G_{e_0} mit dem Normalisator \mathfrak{N} von \mathfrak{J} in G identifizieren.

Beweis. Die Gleichheit

$$G_{e_0} = \mathfrak{J} \cdot Z(K) \cup w\Pi \mathfrak{J} \cdot Z(K),$$

folgt unmittelbar aus

$$G_{e_0} = G_{\vec{e}_0} \cup w\Pi G_{\vec{e}_0}$$

und Proposition (5.2.4). Zeigen wir noch, dass

$$\mathfrak{N} = \{g \in G \mid g\mathfrak{J} = \mathfrak{J}g\}$$

mit G_{e_0} übereinstimmt. Das beweisen wir in zwei Schritten:

- i. Wir zeigen zuerst, dass $\mathfrak{J} \cdot Z(K) \cup w\Pi \mathfrak{J} \cdot Z(K) \subset \mathfrak{N}$ ist, d.h. $\mathfrak{J} \cdot Z(K) \subset \mathfrak{N}$ und $w\Pi \mathfrak{J} \cdot Z(K) \subset \mathfrak{N}$. Die erste Inklusion ist trivial. Zeigen wir noch die Zweite: Es sei $g = iz \in G$ mit $i \in \mathfrak{J}$ und $z \in Z(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w\Pi g \cdot \mathfrak{J} &= \mathfrak{J} \cdot w\Pi g \\ \Leftrightarrow w\Pi iz \cdot \mathfrak{J} &= \mathfrak{J} \cdot w\Pi iz \\ \Leftrightarrow w\Pi i \cdot \mathfrak{J} \cdot i^{-1} (w\Pi)^{-1} &= \mathfrak{J}. \end{aligned}$$

Wegen $w\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ und $(w\Pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist für ein beliebiges $i \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \pi c & d \end{pmatrix} \cdot i^{-1} \in \mathfrak{J}$ mit $a, b, c, d \in \mathcal{O}$ auch

$$w\Pi \begin{pmatrix} a & b \\ \pi c & d \end{pmatrix} (w\Pi)^{-1} = \begin{pmatrix} d & c \\ \pi b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}$$

erfüllt. Also ist $w\Pi g \in \mathfrak{N}$, d.h. $w\Pi \mathfrak{J} \cdot Z(K) \subset \mathfrak{N}$.

ii. Zeigen wir nun $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{J} \cdot Z(K) \cup w\Pi\mathfrak{J} \cdot Z(K) = G_{e_0}$ ist. Dies zeigen wir durch Widerspruch. Annahme: Es existiert ein $g \in \mathfrak{N}$ mit $g \notin G_{e_0}$. Dann gilt $ge_0 = e$ für eine Kante $e \in \mathcal{E}$ verschieden von e_0 . Da die Gruppe G nach Lemma (5.2.1) transitiv auf der Menge der Wege der Länge $n \in \mathbb{N}$ operiert, gibt es ein $h \in G$, das die Geodäte von e_0 nach e auf die Geodäte von e_0 nach e' abbildet für ein geeignetes $e' \neq e \in \mathcal{E}$. Offensichtlich lässt h aber e_0 invariant, d.h. $h \in G_{e_0}$, obwohl $he = e' \neq e$ ist. Daher gilt für alle $h' \in G_{e_0}$:

$$hge_0 = he = e' \neq e = ge_0 = gh'e_0$$

Also liegt $g \notin \mathfrak{N}$. Widerspruch. Also gibt es kein $g \in \mathfrak{N}$ mit $g \notin G_{e_0}$. □

Wie in dem Abschnitt zuvor sind wir nun in der Lage, mithilfe von Lemma (5.2.3) die Kanten \mathcal{E} bzw. \mathcal{E}^\pm als Restklassen von G nach dem entsprechenden Stabilisator darzustellen. So wissen wir

$$GL(K)/\mathfrak{J} \cdot Z(K) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^\pm$$

und

$$GL(K)/\mathfrak{N} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}.$$

Stabilisator der Wege der Länge n

Um den Stabilisator für den Weg $\vec{p}_n = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}$, mit gerichteten Kanten zu bestimmen, gehen wir analog zur Vorbemerkung zur Bestimmung des Stabilisators von \vec{e}_0 vor. Sei $v_0 = [L_0]$ der Basisknoten mit repräsentierendem Gitter L_0 . Wie wir in Proposition (4.2.3) gesehen haben, entsprechen die Knoten $w \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ mit $d(v_0, w) = n$, also die Knoten $w \in \mathcal{C}_n(v_0)$, eineindeutig den direkten Faktoren von $L_0/L_0\pi^n$ vom Rang eins.

Betrachten wir den Weg \vec{p}_n genauer und nutzen die Eigenschaft (1.2.4) von Bäumen aus, dass zu je zwei Knoten nur genau ein Weg ohne Zurückgehen existiert, sehen wir, dass $\vec{p}_n = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ schon durch die Knoten v_0 und v_n eindeutig bestimmt ist. Es gilt also

$$G_{\vec{p}_n} = G_{v_0} \cap G_{v_1} \cap \dots \cap G_{v_n} = G_{v_0} \cap G_{v_n}.$$

SATZ/DEFINITION 5.3.6.

Der Stabilisator $G_{\vec{p}_n}$ von \vec{p}_n besteht gerade aus den Elementen $g \in G_{L_0}$ deren Projektion \bar{g} auf die lineare Restklassengruppe $GL(L_0/L_0\pi^n)$ den direkten Faktor $L_n/L_0\pi^n$ stabil lässt. Diese Gruppe nennen wir die VERALLGEMEINERTE IWAHORI UNTERGRUPPE

$$\mathfrak{I}_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \mid a, b, c, d \in \mathcal{O} \text{ und } c \equiv 0 \pmod{\pi^n} \right\}$$

von G relativ zum Weg \vec{p}_n . Der Stabilisator $G_{\vec{p}_n}$ ist also

$$G_{\vec{p}_n} = \mathfrak{I}_n \cdot Z(K).$$

Beweis. Der Beweis ist vollkommen analog zum Beweis von (5.3.4) zu führen, wobei man an den richtigen Stellen π durch π^n ersetzen muss. \square

BEMERKUNG 5.3.7.

Für den Stabilisator G_{p_n} des Weges p_n von nicht-orientierten Kanten erhalten wir (analog zum Fall mit den Kanten) den Normalisator der verallgemeinerten Iwahori Gruppe. Außerdem ist der Index von $G_{\vec{p}_n}$ in G_{p_n} gleich zwei und die nicht-triviale Klasse von $G_{p_n}/G_{\vec{p}_n}$ wird durch $w\Pi^n$ repräsentiert.

Wir können nun die Wege der Länge n durch

$$GL(K)/\mathfrak{I}_n \cdot Z(K) \xrightarrow{\cong} \{\text{Wege der Länge } n\}$$

identifizieren.

Stabilisator der Halbgeraden

Wir wollen den Stabilisator der Halbgeraden $\vec{p}_\infty = (v_n)_{n \geq 0}$ mit orientierten Kanten analog zu dem Stabilisator des Weges \vec{p}_n bestimmen. Dazu betrachten wir die Halbgerade \vec{p}_∞ als einen reduzierten Weg \vec{p}_n unendlicher Länge, d.h. wir betrachteten \vec{p}_n für $n \rightarrow \infty$.

SATZ 5.3.8.

Sei $(v_n)_{n \geq 0}$ die Halbgerade \vec{p}_∞ . Dann gilt

$$G_{\vec{p}_\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \mid b \in \mathcal{O}, a, d \in K \right\}.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} G_{p_\infty} &= \bigcap_{n \geq 0} G_{v_n} \\ &= \left(\bigcap_{n \geq 0} G_{L_n} \right) \cdot Z(K) \end{aligned}$$

Wie bisher brauchen wir nur den Term mit den Stabilisatoren des Gitters zu betrachten. Das Zentrum zieht sich in der gesamten Rechnung nach außen. Wir zeigen also, dass

$$\bigcap_{n \geq 0} G_{L_n} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

ist. Den Stabilisator des Gitters L_n kennen wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$ explizit:

$$G_{L_n} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{-n}\mathcal{O} \\ \pi^n\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

Es gilt für alle $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$ mit $m > n$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{-n}\mathcal{O} \\ \pi^n\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{-m}\mathcal{O} \\ \pi^m\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{-n}\mathcal{O} \\ \pi^m\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich schon

$$\begin{aligned} \bigcap_{n \geq 0} G_{L_n} &= \bigcap_{n \geq 0} \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \pi^n\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 5.3.9.

Für den Stabilisator G_{p_∞} der Halbgeraden $p_\infty = (v_n)_{n \geq 0}$ mit nicht-orientierten Kanten erhalten wir (analog zum Fall mit den Kanten) den Normalisator von G_{p_∞} . Allerdings stimmt dieser mit G_{p_n} überein. Das liegt an der Tatsache, dass eine Halbgerade zuerst den endlichen Teil des Weges und dann den unendlichen Teil des Weges durchläuft, also immer eine Richtung bestimmt ist.

Wir können jetzt die Menge der Halbgeraden wie folgt identifizieren:

$$GL(K) / \begin{pmatrix} K^* & \mathcal{O} \\ 0 & K^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\cong} \{\text{Halbgeraden}\}$$

Stabilisator des Endes s

Ein Ende ist eine Äquivalenzklasse von Halbgeraden, wobei zwei Halbgeraden genau dann äquivalent sind, wenn sich ihre Startknoten nur durch einen endlichen Weg unterscheiden.

SATZ/DEFINITION 5.3.10.

Sei $s \in \partial\mathcal{T}$ das Ende, das durch die Halbgerade $p_\infty = (v_n)_{n \geq 0}$ repräsentiert wird. Dann ist der Stabilisator

$$G_s = B(K)$$

die BOREL UNTERGRUPPE

$$B(K) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \mid a, b, d \in K \right\}$$

von G zum Ende s .

Beweis. Es sei D_s die eindeutig bestimmte Gerade in V aus Proposition (4.2.12) (beachte, dass $V = \widehat{V}$ ist), die dem Ende s entspricht. Es ist $g \in G$ genau dann in G_{D_s} , wenn $gD_s = D_s$ ist. Sei $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von V , so dass D_s von e_1 erzeugt ist. Dann gilt $gD_s = D_s$ genau dann, wenn $g \in B(K)$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist. \square

Den Rand $\partial\mathcal{T}$ können wir durch die Bijektion

$$GL(K)/B(K) \xrightarrow{\cong} \partial\mathcal{T}$$

beschreiben.

Stabilisator der Geraden s_1s_2

SATZ/DEFINITION 5.3.11.

Sei s_1s_2 die Basisgerade. Dann ist

$$G_{s_1s_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \mid a, d \in K \right\}.$$

Diese Gruppe nennen wir die CARTAN UNTERGRUPPE $C(K)$ von $GL(K)$ zur Geraden s_1s_2 .

Beweis. Wir rechnen nach, wobei $(v_n)_{n \geq 0}$ und $(v_{-n})_{n > 0}$ ein Paar von Halbgeraden ist, welches die Gerade $s_1 s_2$ repräsentiert:

$$\begin{aligned}
 G_{s_1 s_2} &= G_{(v_n)_{n \geq 0}} \cap G_{(v_{-n})_{n > 0}} \\
 &= \left(\begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O} & 0 \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \right) \cdot Z(K) \\
 &= \begin{pmatrix} \mathcal{O} & 0 \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix} \cdot Z(K) \\
 &= C(K)
 \end{aligned}$$

□

Schließlich erlaubt dieser Satz die Identifikation der Geraden von \mathcal{T} durch

$$GL(K)/C(K) \xrightarrow{\cong} \{\text{Geraden}\}.$$

5.4 Darstellung des Bruhat-Tits Baums durch Restklassenmengen

In diesem Abschnitt fassen wir die im vorherigen Abschnitt gemachten Identifikationen noch einmal zusammen.

SATZ 5.4.1.

Wir identifizieren nun:

$$\begin{array}{ll}
 GL(K)/GL(\mathcal{O})Z(K) & \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}(\mathcal{T}) \\
 GL(K)/\mathfrak{J} \cdot Z(K) & \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^\pm(\mathcal{T}) \\
 GL(K)/\mathfrak{J} \cdot Z(K) \cup \mathfrak{J} \cdot Z(K)\omega & \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(\mathcal{T}) \\
 GL(K)/\mathfrak{J}_n \cdot Z(K) & \xrightarrow{\cong} \{\text{Wege der Länge } n\} \\
 GL(K)/B(K) & \xrightarrow{\cong} \partial\mathcal{T} \\
 GL(K)/C(K) & \xrightarrow{\cong} \{\text{Geraden in } \mathcal{T}\}
 \end{array}$$

Beweis. Die Beweise wurden im vorangehenden Abschnitt (5.3) geführt. □

Kapitel 6

Der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} über dem Körper der Laurent-Reihen

Im gesamten Kapitel und im Folgenden spezialisieren wir die Situation, die wir in den Kapiteln (3), (4) und (5) erarbeitet haben. Anstatt, wie bisher, einen allgemeinen (vollständigen) diskret bewerteten Körper zu betrachten, beschränken wir uns ab jetzt auf einen speziellen Körper, nämlich den Körper der Laurent-Reihen. Diese enger gefasste Betrachtung ermöglicht uns ein weiteres Studium. Anfangs übertragen wir die bisher erarbeiteten Ergebnisse auf die neue Situation. Weitere Bestrebungen führen in die Richtung, den Bruhat-Tits Baum explizit anzugeben. Dazu bestimmen wir sowohl für die Knotenmenge als auch für die Kantenmenge ein Standardrepräsentantensystem als Bahn unter der entsprechenden Gruppe (vgl. Kapitel (5)) und visualisieren einen Ausschnitt der Knotenmenge um den Basisknoten $v = [\mathcal{O} \times \mathcal{O}]$ im Fall, dass der Restklassenkörper κ der Körper mit zwei Elementen ist. Eine große Rolle in der Anwendung spielen vor allem die in Abschnitt (6.3) betrachteten Operationen der Gruppen Γ und Γ_∞ . In diesem Kapitel legen wir die theoretischen Grundlagen, worauf wir im nächsten Kapitel aus algorithmischer Sicht noch einmal eingehen werden.

In Sachen Notation orientieren wir uns größtenteils an [Gek95, S. 371]:

6.1 Notation

Im gesamten Kapitel betrachten wir die folgende Situation. Es sei $K = \mathbb{F}_q(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über dem endlichen Körper \mathbb{F}_q mit $q = p^n$ (p eine Primzahl) vielen Elementen in der Unbestimmten T . Wei-

ter betrachten wir die Kompletterung K_∞ von K an der Stelle ∞ . Es ist K_∞ der Körper der formalen Laurent-Reihen $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$, wobei wir für die Uniformisierende T^{-1} zur Vereinfachung der Notation $\pi := T^{-1}$ setzen, also $K_\infty = \mathbb{F}_q((T^{-1})) = \mathbb{F}_q((\pi))$, d.h. es ist

$$K_\infty = \left\{ \sum_{i \geq m} a_i \pi^i \mid m \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

Weiter bezeichnen wir mit A den Polynomring $\mathbb{F}_q[T]$ und mit \mathcal{O}_∞ den Ring der ∞ -adischen ganzen Zahlen $\mathbb{F}_q[[\pi]]$. Für die Bewertung an der Stelle ∞ verwenden wir v_∞ , welche mit der Potenz des kleinsten nicht-verschwindenden Terms in einer Laurent-Reihe übereinstimmt. Es gelten $A\mathcal{O}_\infty = K_\infty$ und $A \cap \mathcal{O}_\infty = \mathbb{F}_q$.

Im Bereich der Gruppen benötigen wir in diesem Abschnitt wieder ausschließlich 2×2 Matrizen und zwar die Gruppe $\mathfrak{K} := GL(\mathcal{O}_\infty) = GL(2, \mathcal{O}_\infty)$ und die im Kapitel (5) eingeführten Gruppen, angewendet auf die aktuelle Situation, d.h. die Iwahori Gruppe

$$\mathfrak{I} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{K} \mid c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$$

und die Borel Gruppe

$$B(K_\infty) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL(K_\infty) \right\},$$

d.h. die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Weiter werden im letzten Teil dieses Kapitels die Gruppen $\Gamma = GL(A)$ und $\Gamma_\infty = \Gamma \cap B(K_\infty)$ eine wesentliche Rolle spielen.

Diese Angaben führen wieder zu einem Bruhat-Tits Baum, den wir wie bisher auch mit $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ bezeichnen, wobei die Kantenmenge orientiert sei. Wir werden also in diesem Kapitel anders als bisher die orientierte Kantenmenge nicht mit \mathcal{E}^\pm , sondern mit \mathcal{E} bezeichnen. Wenn nicht anders erwähnt, soll im folgenden \mathcal{E} orientiert sein.

Wie zuvor fixieren wir die Basisknoten $v_i = [\mathcal{O}_\infty \times \pi^i \mathcal{O}_\infty]$ und die Basiskanten $e_i = (v_i, v_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

6.2 Repräsentantensystem für Knoten und Kanten

In Kapitel (5) haben wir Identifikationen des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T} durch Restklassenmengen von $GL(V)$, für einen K -Vektorraum V , untersucht. Diese Untersuchung führen wir hier in dem Spezialfall, dass der lokale Körper $K = K_\infty = \mathbb{F}_q((\pi))$ ist, fort. Wir orientieren uns dabei an [Gek95]. Wir streben an, ein Standardrepräsentantensystem für Knoten- und Kantenmenge angeben zu können. Die Knoten beschreiben wir in der aktuellen Situation durch

$$\begin{aligned} GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{V}(\mathcal{T}) \\ g &\mapsto gv_0, \end{aligned}$$

wobei $v_0 = [L_0] = [\mathcal{O}_\infty \times \mathcal{O}_\infty]$ der Basisknoten ist und die Kanten durch

$$\begin{aligned} GL(K_\infty)/\mathfrak{J} \cdot Z(K_\infty) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(\mathcal{T}) \\ g &\mapsto ge_0, \end{aligned}$$

wobei $e_0 = (v_0, v_1)$ mit der Orientierung $o(e_0) = v_0$ und $t(e_0) = v_1$ ist.

Im Folgenden spielt die Orientierung der Kanten eine wesentliche Rolle, so dass wir ein Wort zu der Operation der Matrizen $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und

$\Pi := \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die wir schon in dem Abschnitt „Inversion von Kanten“ in (5.2) gesehen haben, verlieren wollen. In Proposition (5.2.4) haben wir gezeigt, dass die Multiplikation der Matrix $w\Pi$ an eine Kante $e \in \mathcal{E}$ gerade die Orientierung umkehrt.

Weiter der Notation aus Kapitel (5) folgend sei \mathfrak{N} der Normalisator der Iwahori Gruppe \mathfrak{J} in $GL(V) = GL(K_\infty)$.

LEMMA 6.2.1.

Es ist

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{J} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

wobei das nicht-triviale Element $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = w\Pi$ ist, d.h. die Iwahori Gruppe \mathfrak{J} ist eine Untergruppe vom Index 2 in ihrem Normalisator \mathfrak{N} .

Beweis. Der Beweis ist klar, wenn wir uns an die Definition von \mathfrak{N} erinnern:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{J} \cdot Z(K_\infty) \cup w\Pi \mathfrak{J} \cdot Z(K_\infty)$$

□

Die Wahl des Standardrepräsentantensystems basiert auf dem folgenden Satz:

SATZ 6.2.2.

Es gilt die Isomorphie

$$B(K_\infty)/(B(K_\infty) \cap \mathfrak{K}) \cdot Z(K_\infty) \xrightarrow{\cong} GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty) = \mathcal{V}(\mathcal{T}).$$

Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen, schieben ein Lemma ein:

LEMMA 6.2.3.

Es ist

$$GL(K_\infty) = B(K_\infty) \cdot \mathfrak{K}.$$

Beweis. Der Beweis wird an dieser Stelle ausgelassen, da in Teil I des Algorithmus in Kapitel (7) eine explizite Darstellung für ein Element aus $GL(K_\infty)$ in $B(K_\infty) \cdot \mathfrak{K}$ angegeben wird. \square

Beweis von Satz (6.2.2). Auf der Grundlage von Lemma (6.2.3), also

$$GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty) = B(K_\infty) \cdot \mathfrak{K}/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty),$$

ist die Behauptung gerade der erste Isomorphiesatz für Gruppen. Dieser besagt in unserem Fall, dass

$$B(K_\infty) \cdot \mathfrak{K}/\mathfrak{K} \xrightarrow{\cong} B(K_\infty)/(B(K_\infty) \cap \mathfrak{K})$$

gilt, also auch

$$B(K_\infty) \cdot \mathfrak{K}/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty) \xrightarrow{\cong} B(K_\infty)/(B(K_\infty) \cap \mathfrak{K}) \cdot Z(K_\infty),$$

weil das Zentrum die Gültigkeit dieses Satzes nicht einschränkt, also ist die Behauptung gezeigt. \square

Nach der gemachten Vorarbeit sind wir nun in der Lage, ein Standard-Repräsentantensystem für $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ anzugeben.

SATZ 6.2.4.

Die Menge

$$S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})} := \left\{ \begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z}, u \in K_\infty/\pi^k \mathcal{O}_\infty \right\}$$

bildet ein Repräsentantensystem für die Knoten $\mathcal{V}(\mathcal{T})$. Dabei bedeutet $u \in K_\infty/\pi^k \mathcal{O}_\infty$, dass u aus einem Repräsentantensystem dieser Menge ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst (in (i)), dass jede Matrix aus $GL(K_\infty)$ eine Darstellung aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ hat und zeigen in (ii), inwiefern diese Darstellung eindeutig ist.

- i. Es sei $v \in GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty)$ ein beliebiger Knoten. Dieser lässt sich nach Satz (6.2.2) durch eine Matrix mit oberer Dreiecksgestalt darstellen. Sei diese etwa

$$\begin{pmatrix} \pi^\alpha a & \pi^\beta b \\ 0 & \pi^\delta d \end{pmatrix} \in B(K_\infty)/(B(K_\infty) \cap \mathfrak{K}) \cdot Z(K_\infty)$$

mit $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$ und $a, b, d \in \mathcal{O}_\infty^*$. Im Fall, dass der obere rechte Eintrag verschwindet, interpretieren wir im Folgenden β als 0 und b als 0. Multiplizieren wir von rechts mit der Matrix $\begin{pmatrix} (\pi^\delta d)^{-1} & 0 \\ 0 & (\pi^\delta d)^{-1} \end{pmatrix} \in Z(K_\infty)$, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \pi^\alpha a & \pi^\beta b \\ 0 & \pi^\delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\pi^\delta d)^{-1} & 0 \\ 0 & (\pi^\delta d)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{\alpha-\delta} \frac{a}{d} & \pi^{\beta-\delta} \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation von rechts mit der Matrix $\begin{pmatrix} (\frac{a}{d})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in (B(K_\infty) \cap \mathfrak{K})$ ergibt uns die Behauptung, nämlich ein Repräsentant aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$

$$\begin{pmatrix} \pi^{\alpha-\delta} \frac{a}{d} & \pi^{\beta-\delta} \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{a}{d})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $k := \alpha - \delta$ und $u := \pi^{\beta-\delta} \frac{b}{a}$ ist.

- ii. Seien $v = \begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v' = \begin{pmatrix} \pi^{k'} & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zwei Repräsentanten für einen Knoten in $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$. Dann sind v und v' genau dann äquivalent, wenn

$$v = v' \cdot KZ$$

mit $K \in \mathfrak{K}$ und $Z \in Z(K_\infty)$. Sei $KZ = \begin{pmatrix} az & bz \\ cz & dz \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathcal{O}_\infty$ und $z \in K_\infty^*$, dann gilt:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'KZ & \\ (\pi^{k'}a + cu')z & (\pi^{k'}b + du')z \\ cz & dz \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $cz = 0$, $dz = 1$ und $az = 1$ sein muss, also $c = 0$, $d = a = 1$ und $z = 1$, also

$$\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{k'} & \pi^{k'}b + u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

An dieser Darstellung sehen wir nun, dass zwei Matrizen v, v' aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ genau dann äquivalent sind, wenn $k = k'$ ist und $u \equiv u' \pmod{\pi^k \mathcal{O}_\infty}$.

□

BEMERKUNG 6.2.5.

Mit der Darstellung aus Satz (6.2.4) sehen wir, dass die Darstellung eines Knotens lediglich von zwei Parametern abhängt, wobei einer eine ganze Zahl ist und der andere eine Laurent-Reihe, die nach endlich vielen Gliedern abbricht.

Wir wollen eine Kante mittels eines Knotens und einer Richtung, in die die Kante von dem Knoten wegzeigt, darstellen. D.h. die Beschreibung der Kanten unterscheidet sich von der Beschreibung der Knoten lediglich um die Restklassen von $\mathfrak{K}/\mathfrak{J}$. Ein Repräsentantensystem hierfür und für die Kanten $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ gibt uns der folgende Satz.

SATZ 6.2.6.

Es ist

$$S_U := \left\{ w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \kappa \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{K}/\mathfrak{J}$ und

$$S_{\mathcal{E}(\mathcal{T})} := \{ gh \mid g \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}, h \in S_U \}$$

ein Repräsentantensystem für die Kanten von \mathcal{T} .

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass S_U ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{K}/\mathfrak{J}$ ist. Die Behauptung, dass $S_{\mathcal{E}(\mathcal{T})}$ ein Repräsentantensystem für die Kanten \mathcal{E} ist, folgt mit Satz (6.2.4), d.h. mit der Beschreibung der Knoten, und dem zweiten Isomorphiesatz

$$GL(K_\infty)/\mathfrak{J} \cdot Z(K_\infty)/\mathfrak{K}/\mathfrak{J} \cong GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty).$$

Zeigen wir also noch, dass S_U ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{K}/\mathfrak{J}$ ist. Das ist offensichtlich äquivalent dazu, zu zeigen, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \kappa \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

ein solches ist und äquivalent dazu ist, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \kappa \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ein Repräsentantensystem für $GL(\kappa)/B(\kappa)$ ist, wobei

$$B(\kappa) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL(\kappa) \mid a, b, d \in \kappa \right\}$$

ist. Das Letzte wollen wir beweisen, indem wir die Bijektivität der Abbildung

$$GL(\kappa)/B(\kappa) \longrightarrow S_U$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 1 \end{pmatrix}, & \text{wenn } c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{wenn } c = 0 \end{cases}$$

nachweisen:

- i. Die Abbildung ist wohldefiniert, da die Bilder von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq + bs \\ cp & cq + ds \end{pmatrix}$$

mit $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} \in B(\kappa)$ offensichtlich übereinstimmen.

- ii. Weiter ist die Surjektivität trivial.

- iii. Bleibt noch die Injektivität zu zeigen: Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ zwei Matrizen aus $GL(\kappa)/B(\kappa)$ deren Bilder unter obiger Abbildung übereinstimmen. Wir müssen zeigen, dass dann die beiden Matrizen im Urbildraum schon äquivalent sind.

Werden beide Matrizen auf das Element $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ abgebildet, so sind $c = c' = 0$ und daher beide Matrizen aus $B(\kappa)$ und damit äquivalent. Wir benutzen im Folgenden für Matrixeinträge, die uns nicht weiter interessieren einfach das Symbol „*“. Für den allgemeinen Fall muss man zeigen, dass eine Matrix $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in B(\kappa)$ existiert, so dass

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

gilt. Mithilfe der Cramerschen Regel erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} * & * \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bringen wir in der Gleichung davor die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auf die andere Seite und multiplizieren durch, so haben wir

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} * & * \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} * & * \\ -a'c + ac' & * \end{pmatrix},$$

was wegen $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \Leftrightarrow c'a = a'c$ in $B(\kappa)$ liegt, und sind fertig.

□

Wie in [Gek95, S. 371] präsentieren wir eine Möglichkeit, eine Orientierung auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} festzulegen, d.h. wir zerlegen die Kantenmenge in zwei disjunkte Teilmengen.

DEFINITION/LEMMA 6.2.7.

Die Wahl des Endes ∞ ($:=$ Klasse der Halbgeraden $(v_0, v_1, \dots) =$ Klasse der Halbgeraden $([\mathcal{O} \times \mathcal{O}], [\mathcal{O} \times \pi\mathcal{O}], \dots)$) legt uns eine Orientierung $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \dot{\cup} \mathcal{E}^-$ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} fest. Wir nennen alle Kanten $e = (v, w)$ mit $v, w \in \mathcal{V}$, die in Richtung dieses Endes zeigen, POSITIV, und schreiben $e \in \mathcal{E}^+$ und $\text{sgn}(e) = +1$. Zeigt e vom Ende ∞ weg, so heißt e NEGATIV und wir legen $e \in \mathcal{E}^-$ und $\text{sgn}(e) = -1$ fest.

PROPOSITION 6.2.8.

Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \pi^{k-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für eine Matrix aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$, bewirkt anschaulich auf dem Baum \mathcal{T} eine Verschiebung des Knotens der durch $\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ repräsentiert wird in Richtung des Endes ∞ . In Gitterschreibweise entspricht diese der Abbildung

$$[L] \longmapsto [L'] \quad \text{mit} \quad L' = \left(L \cap \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} K_{\infty} \right) + L\pi.$$

Beweis. i. Die Aussage in Gitterschreibweise ist uns wohlbekannt nach Proposition (4.2.12). Die Behauptung hier ist gerade ein Spezialfall dieser Proposition (4.2.12).

- ii. Die Behauptung in Matrixschreibweise führen wir auf die Gitter zurück.
Mit der Bijektion

$$\begin{aligned} GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{V}(\mathcal{T}) \\ g &\longmapsto gv_0 \end{aligned}$$

entspricht für ein $k \in \mathbb{Z}$, $u \in K_\infty/\pi^k \mathcal{O}_\infty$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{der Gitterklasse} \quad \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \pi^k \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \right]}_{=:L}$$

und die Matrix

$$\begin{pmatrix} \pi^{k-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{der Gitterklasse} \quad \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \pi^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \right]}_{=:L'}$$

Wir zeigen nun, dass die Gitterklassen durch die Abbildung in Gitterschreibweise aufeinander abbilden und sind somit fertig. D.h. wir zeigen

$$[L'] = \left[\left(L \cap \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} K_\infty \right) + L\pi \right],$$

wobei wir o.B.d.A. $L = \begin{pmatrix} \pi^k \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty$ wie oben verwenden können. Für einen beliebigen Repräsentanten aus $[L]$ folgt die Behauptung dann, weil sich ein dranzumultipliziertes $x \in K_\infty^*$ einfach herausziehen lässt. Es gilt:

$$\begin{aligned} L' &= \left(L \cap \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} K_\infty \right) + L\pi \\ &= \left(\left(\begin{pmatrix} \pi^k \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \right) \cap \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} K_\infty \right) \\ &\quad + \left(\begin{pmatrix} \pi^k \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \right) \pi \\ &= \left(\begin{pmatrix} \pi^k \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times 0 \right) + \left(\begin{pmatrix} \pi^k \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \right) \pi \\ &= \left(\begin{pmatrix} \pi^{k-1} + \pi^k \\ 0 \end{pmatrix} \pi \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \pi \mathcal{O}_\infty \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \pi^{k-1}(\pi + 1) \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \right) \pi \end{aligned}$$

Weil $\pi+1 \in \mathcal{O}_\infty^* \subset \mathcal{O}_\infty$ ist und die Multiplikation mit π die Gitterklasse nicht ändert, erhält man aus der letzten Zeile die Behauptung:

$$\left[\left(\begin{pmatrix} \pi^{k-1}(\pi+1) & \\ & 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \right) \pi \right] = \left[\begin{pmatrix} \pi^{k-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \times \begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_\infty \right]$$

□

Mithilfe dieser Abbildung können wir nun leichter den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit expliziter Angabe der Knoten aus dem Repräsentantensystem $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ zeichnen.

BEISPIEL 6.2.9.

Das Beispiel (Abbildung (13)) zeigt den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit $\#\kappa = 2$. Wir geben in diesem Diagramm für jeden Knoten um den Standardknoten v_0 seine explizite Beschreibung in der Menge $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ an. Dabei verwenden wir eine abkürzende Schreibweise: Wir schreiben für den Knoten $\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, $u \in K_\infty/\pi^k\mathcal{O}_\infty$ einfach das Paar (k, u) auf.

DEFINITION 6.2.10.

Die HAUPTACHSE $\mathcal{A}(0, \infty)$ ist der Pfad von \mathcal{T} bestehend aus den Kanten

$$\left\{ \vec{e}_i \mid i \in \mathbb{Z} \right\}$$

oder den Knoten

$$\left\{ \text{Klassen von } \begin{pmatrix} \pi^{-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty) \mid i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Als POSITIVE HAUPTACHSE bezeichnen wir die Teilmenge $\left\{ \vec{e}_i \mid i \in \mathbb{N}_0 \right\}$ von $\mathcal{A}(0, \infty)$.

BEMERKUNG 6.2.11.

Die Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ hat also genau zwei Enden 0 und ∞ .

BEMERKUNG 6.2.12.

Die Beschreibung von Knoten und Kanten unterscheiden sich wie in Satz (6.2.6) gesehen um Elemente aus $\mathfrak{K}/\mathfrak{J}$. Wählt man hier das neutrale Element, so beschreiben die Knoten $GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K)$ gleichzeitig auch positiv orientierte Kanten. Daher wollen wir im folgenden die Unterscheidung dieser beiden Darstellungen nicht so strikt sehen.

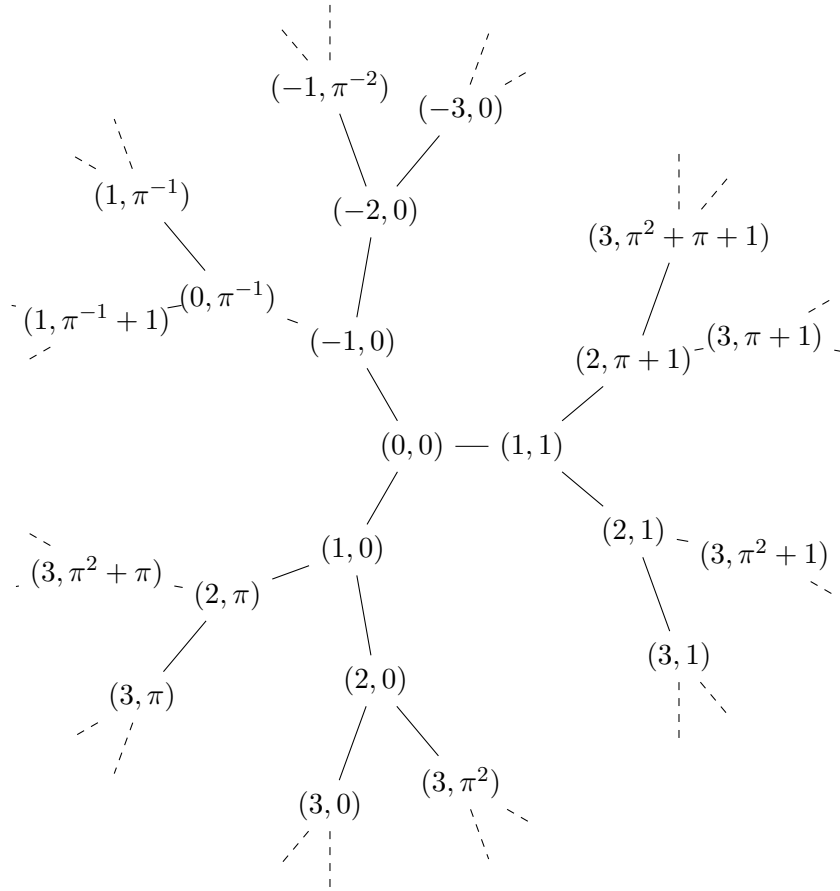


Abbildung 13: Der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} für $\#\kappa = 2$ mit expliziter Beschreibung der Knoten

BEISPIEL 6.2.13.

Das Beispiel in Abbildung (14) zeigt die Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit $\#\kappa = 2$. Die Hauptachse in der Abbildung (14) ist der fett markierte Pfad.

Sei $u \in K_\infty \setminus \pi^k \mathcal{O}_\infty$, $k \in \mathbb{Z}$, dann können wir die Repräsentanten $\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ sogar als $\begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ schreiben, wobei $a, t \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$ und $v \in \mathcal{O}_\infty^*$ ist. Dabei sind a, t eindeutig bestimmt und v ist eindeutig modulo $\pi^a \mathcal{O}_\infty$ bestimmt (und sogar eindeutig bestimmt, wenn wir es als $v = \sum_{0 \leq i < a} v_i \pi^i$ mit $v_i \in \mathbb{F}_q$ schreiben).

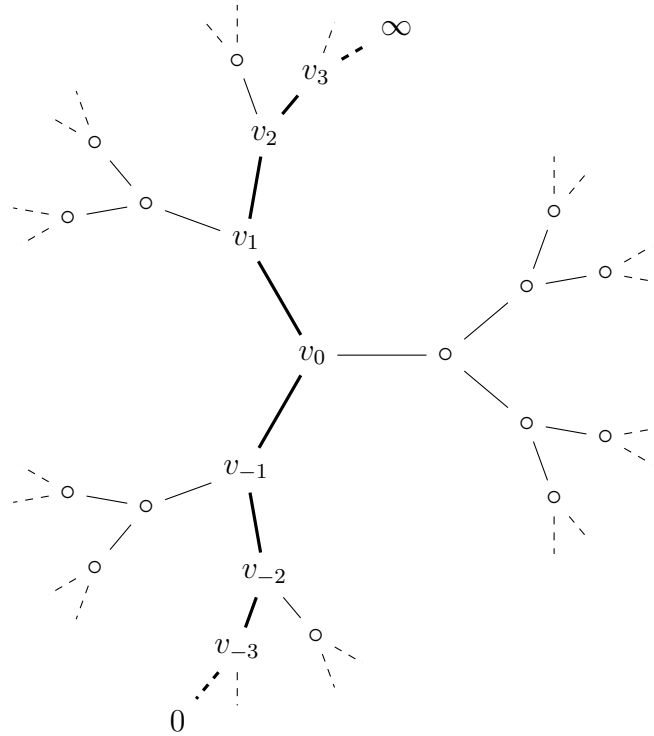


Abbildung 14: Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit dem Restklassenkörper mit zwei Elementen

Dies lässt sich am besten in Termen von Laurent-Reihen erklären. Schreibe

$$u = \sum_{i \geq m} v_i \pi^i$$

mit $m \in \mathbb{Z}$ und $v_i \in \mathbb{F}_q$ für alle $i \geq m$. als Laurent-Reihe. Durch Ausklammern von π^{-m} (und Index-Shift bei den v_i) ergibt sich

$$u = \pi^{-m} \left(\sum_{i \geq 0} v_i \pi^i \right),$$

wobei

$$v := \sum_{i \geq 0} v_i \pi^i \in \mathcal{O}_\infty^*$$

sei. Wegen $a + t = k$ ist

$$t = -m \quad \text{und} \quad a = k - t = k + m.$$

Daran sehen wir auch, dass $a > 0$ ist. Es ist nämlich immer $m < k$, also $a = k + m > 0$ (den Fall $m = k$ haben wir mit $u \in K_\infty \setminus \pi^k \mathcal{O}_\infty$ ausgeschlossen).

BEMERKUNG 6.2.14.

Auf den ersten Blick bringt diese Darstellung Nachteile mit sich, da ein Knoten, bzw. eine orientierte Kante nicht mehr durch zwei Parameter, sondern durch drei Parameter dargestellt wird. Dieser Verlust kompensiert sich aber selbst, da man zu einem v und entweder a oder t den jeweils fehlenden Parameter deterministisch berechnen kann.

DEFINITION 6.2.15.

Mit dieser Darstellung definieren wir für $e \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{A}(0, \infty))$, das je nach $\text{sgn}(e)$ durch g oder $w\Pi g$ mit $g = \begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ repräsentiert wird

$$\begin{aligned} \kappa(e) &:= k, & \tau(e) &:= t, & \alpha(e) &:= a, & \text{wenn } e &\in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{A}(0, \infty)) \text{ und} \\ \kappa(e) &:= k, & \tau(e) &:= k, & \alpha(e) &:= 0, & \text{wenn } &e \in \mathcal{E}(\mathcal{A}(0, \infty)). \end{aligned}$$

BEMERKUNG 6.2.16.

Es sei hier auf die Überladung des Buchstabens κ hingewiesen. Wir benutzen ihn zum Einen (wie bisher) als Abkürzung für den Restklassenkörper $\kappa = \mathcal{O}_\infty / \pi \mathcal{O}_\infty$ oder den Restklassenring $\kappa(n) = \mathcal{O}_\infty / \pi^n \mathcal{O}_\infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und zum Anderen, (in der Situation hier) als eine Funktion, die auf der Kantenmenge „lebt“. Bei der Unterscheidung sollte es aber keine Probleme geben, da beide Gebräuchlichkeiten vollkommen verschieden sind und daher die aktuelle Verwendung aus dem Kontext immer klar ersichtlich sein wird.

BEMERKUNG 6.2.17.

Die Funktionen aus Definition (6.2.15) haben folgende Intuition:

- $\kappa(e)$ misst den Abstand von e nach ∞ und verringert sich um eins, wenn e mit der Abbildung aus Proposition (6.2.8) einen Schritt in Richtung ∞ gerückt wird.
- $\alpha(e)$ misst den Abstand von e zur Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ und
- $\tau(e)$ misst den Abstand nach ∞ vom ersten Knoten auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ der Geodäte von e nach ∞ .

BEISPIEL 6.2.18.

Die Abbildung (15) ist eine Kopie einer Abbildung aus [Gek95, S. 372]. Sie unterstreicht die anschauliche Bedeutung der Funktionen α , κ und τ .

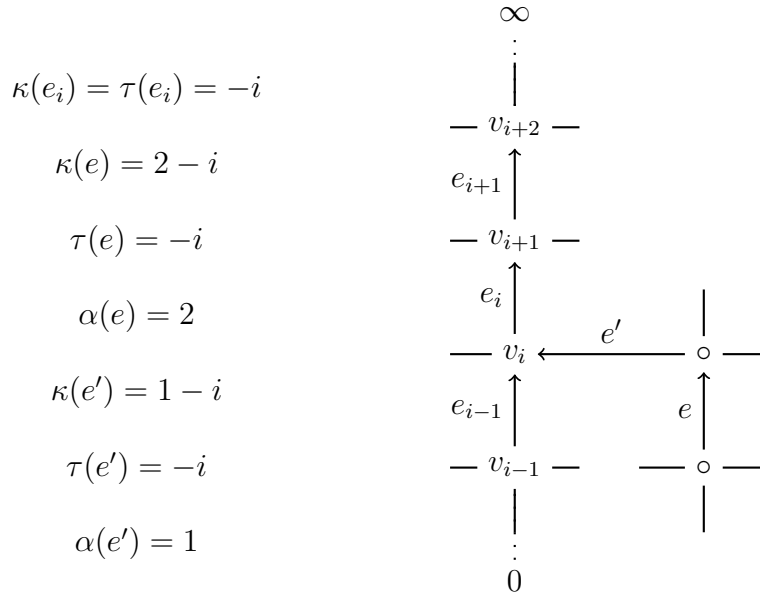


Abbildung 15: Die Funktionen α , κ und τ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit $\#\kappa = 3$

KOROLLAR 6.2.19.

Die Funktionen κ, τ, α sind invariant unter Veränderung der Orientierung.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für eine Kante $\vec{e} \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$

$$\begin{aligned}
\kappa(\overleftarrow{e}) &= \kappa(\vec{e}) \\
\tau(\overleftarrow{e}) &= \tau(\vec{e}) \\
\alpha(\overleftarrow{e}) &= \alpha(\vec{e})
\end{aligned}$$

gilt, wobei $\overleftarrow{e} = w\Pi\vec{e}$ ist. Der Notation aus Definition (6.2.15) folgend, sehen wir, dass sich die Funktionen κ , τ und α nur auf die Darstellung der Matrix g , egal ob \vec{e} positiv oder \overleftarrow{e} negativ orientiert ist, beziehen. \square

KOROLLAR 6.2.20.

Die Funktion τ ist für alle $e \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{A}(0, \infty))$ invariant unter der Abbildung

$$\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \pi^{k-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

der Verschiebung eines Knotens in Richtung ∞ .

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der Tatsache, dass $\tau(e)$ für eine Kante $e \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{A}(0, \infty))$ gerade den Abstand von der Hauptachse nach ∞ misst. Da die Kante e frühestens nach Anwendung der Abbildung auf der Hauptachse liegt ändert sich nur der Abstand zur Hauptachse, nicht aber der Abstand in Richtung ∞ . \square

BEMERKUNG 6.2.21.

Wir setzen nun noch

$$e(t, a, v) := e(t + a, \pi^t v) \in \mathcal{E}^+(\mathcal{T})$$

bzw.

$$\bar{e}(t, a, v) := \bar{e}(t + a, \pi^t v) \in \mathcal{E}^-(\mathcal{T})$$

für Kanten e die durch $\begin{pmatrix} \pi^{t+a} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $w\Pi \begin{pmatrix} \pi^{t+a} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ repräsentiert werden, wobei $t \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ und $v \in \left(\mathcal{O}_\infty / \pi^a \mathcal{O}_\infty\right)^*$ oder $a = 0$ und $v = 0$ sind.

Die folgende Proposition und das Korollar machen eine Aussage über das Verhalten bei Multiplikation mit der Matrix $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 6.2.22.

- i. Ist $a > 0$, dann ist $w(e(t, a, v)) = e(-t, a, v^{-1})$ und
- ii. $w(e(t, 0, 0)) = \bar{e}(1 - t, 0, 0)$ sonst.

Beweis. Den Beweis findet der Leser in [Gek95, S. 372, Lemma 1.11]. \square

KOROLLAR 6.2.23.

Für $e \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ gilt

$$\text{sgn}(w(e)) \neq \text{sgn}(e)$$

genau dann, wenn e auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ liegt.

Beweis. Die vorangehende Proposition (6.2.22) zeigt, dass sich die Orientierung einer Kante genau nur im Fall (ii) umdreht und ansonsten alle Kanten immer (Fall (i)) in Richtung ∞ zeigen. \square

6.3 Der Baum $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ und $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{T}$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Operation der Gruppen $\Gamma = GL(A)$ und Γ_∞ von links auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} . Ziel ist es, eine Beschreibung für die Bäume $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ und $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{T}$ zu finden. Betrachten wir uns daher zuerst die diskreten Untergruppen Γ und Γ_∞ von $GL(K_\infty)$ genauer. Ihr Zusammenhang ist nach Definition $\Gamma_\infty = \Gamma \cap B(K_\infty)$, aber es gilt auch die folgende Proposition:

PROPOSITION 6.3.1.

Es ist

$$\Gamma = \langle \Gamma_\infty, w \rangle,$$

wobei w wie bisher die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist.

BEMERKUNG 6.3.2.

Mit anderen Worten gilt

$$\Gamma = \prod_{\text{endl.}} (\gamma_i \cdot w),$$

wobei $\gamma_i \in \Gamma_\infty$ für alle i ist.

Beweis von Proposition (6.3.1). i. Eine der beiden Inklusionen ist offensichtlich, und zwar

$$\langle \Gamma_\infty, w \rangle \subset \Gamma,$$

weil nämlich $\Gamma_\infty \subset \Gamma$ und $w \in \Gamma$ ist und Γ eine Gruppe ist, d.h. das Produkt von w mit einer Matrix aus Γ (Rechts- und Linksmultiplikation) liegt wieder in Γ .

- ii. Die andere Inklusion ist nicht offensichtlich. Wir beweisen sie hier algorithmisch, d.h. gegeben sei eine Matrix $\gamma \in \Gamma = GL(A) = GL(\mathbb{F}_q[T])$ und gesucht ist eine Zerlegung in $\langle \Gamma_\infty, w \rangle$. Wir gehen so vor, dass wir γ sukzessive mit einer Matrix aus Γ_∞ oder w multiplizieren bis wir eine obere Dreiecksmatrix, d.h. eine Matrix aus Γ_∞ erhalten. Bringen wir die Multiplikatoren durch Inversion auf die andere Seite (beachte, dass diese alle invertierbar sind), erhalten wir die gewünschte Zerlegung. Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir hier im Beweis $l(a)$ für den Leitkoeffizienten des Polynoms $a \in A$, d.h. der Koeffizient vor der größten Potenz von T im Polynom a . Weiter verwenden wir die Multiplikation mit einer Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$ mit $x \in A$, die sich selbst schon als ein Produkt der Matrizen $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ ergibt.

Schreibe die Matrix γ als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

mit Einträgen $a, b, c, d \in A$.

- Fall $\deg a > \deg c$:
Wir multiplizieren

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - xc & b - xd \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei wir $x := T^{\deg a - \deg c} \frac{l(a)}{l(c)}$ wählen. Es liegt dann sicher

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \text{ und es gilt}$$

$$\deg(a - xc) < \deg a$$

und der Grad von c bleibt gleich. Wegen der Abgeschlossenheit der Multiplikation liegt die Matrix $\begin{pmatrix} a - xc & b - xd \\ c & d \end{pmatrix}$ wieder in Γ . Wir überschreiben nun $a := a - xc$ und $b := b - xd$ und schließen den nächsten Iterationsschritt an.

- Fall $\deg a \leq \deg c$:

Durch Multiplikation mit w vertauschen wir die Zeilen von $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, also

$$w \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Dann multiplizieren wir wie folgt weiter

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c - xa & d - xb \end{pmatrix},$$

wobei wir $x := T^{\deg c - \deg a} \frac{l(c)}{l(a)}$ wählen. Es liegt dann sicher

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \in w\Gamma_\infty \text{ und es gilt}$$

$$\deg(c - xa) < \deg c$$

und der Grad von a bleibt gleich. Wegen der Abgeschlossenheit der Multiplikation liegt die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c - xa & d - xb \end{pmatrix}$ wieder in Γ . Wir überschreiben nun $c := c - xa$ und $d := d - xb$ und schließen den nächsten Iterationsschritt an.

Die Iterationsschritte reduzieren immer den Grad von a bis er kleiner ist als der Grad von c (der Grad von c wird dabei festgehalten) und anschließend wird der Grad von c solange reduziert, bis er wieder kleiner als der Grad von a ist (der Grad von a wird dabei festgehalten). Dadurch reduzieren wir schrittweise die Grade von a und c , bis im letzten Schritt der untere linke Eintrag verschwindet und wir auf der rechten Seite eine invertierbare obere Dreiecksmatrix haben, d.h. eine Matrix aus Γ_∞ . Bringen wir nun wie angekündigt die Multiplikatoren auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\Gamma \subset \langle \Gamma_\infty, w \rangle$$

und damit die Gleichheit

$$\Gamma = \langle \Gamma_\infty, w \rangle.$$

□

Nun schauen wir uns zuerst den Graphen $\Gamma_\infty \setminus \mathcal{T}$ an.

THEOREM 6.3.3.

Jedes Element $g \in GL(K_\infty)$ lässt sich in $\Gamma_\infty \setminus \mathcal{V}$ in eindeutiger Weise in der Form

$$\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } u \in \pi \mathcal{O}_\infty / \pi^k \mathcal{O}_\infty, \quad \text{wenn } k > 0$$

und

$$\begin{pmatrix} \pi^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{wenn } k \leq 0$$

darstellen.

Beweis. Dass jedes Element $v \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ eine solche Darstellung (ohne die Bedingungen an u oder k) hat, ist trivial, wenn man sich die Menge $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ anschaut.

Schauen wir uns nun an, wann zwei Elemente $v, v' \in \Gamma_\infty \setminus \mathcal{V}$ äquivalent sind, d.h. wann sie denselben Knoten in $\Gamma_\infty \setminus \mathcal{V}$ beschreiben. Wir schreiben

$$v = \begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v' = \begin{pmatrix} \pi^{k'} & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}.$$

In $\Gamma_\infty \setminus \mathcal{V}$ sind für geeignete Matrizen $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ mit $\alpha, \delta \in A^*$ und $\beta \in A$, $K \in \mathfrak{K}$ und $Z \in Z(K_\infty)$ die Knoten v und v' genau dann äquivalent, wenn

$$v = \gamma \cdot v' \cdot KZ$$

ist, oder wenn

$$v \cdot (KZ)^{-1} = \gamma \cdot v'$$

ist. Sei $(KZ)^{-1} = \begin{pmatrix} az & bz \\ cz & dz \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathcal{O}_\infty$ und $z \in K_\infty^*$. Dann gilt:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} az & bz \\ cz & dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi^{k'} & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\pi^k a + uc)z & (\pi^k b + ud)z \\ cz & dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\pi^{k'} & \alpha u' + \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich (Ziel ist es herauszufinden, wann die Gleichheit erfüllt ist):

- i. $c = 0$, also $a, d \in \mathcal{O}_\infty^*$, weil die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist,
- ii. $dz = \delta$ und $az = \alpha$, also ist $z \in \mathcal{O}_\infty^*$.

D.h. es gilt:

$$\begin{pmatrix} \pi^k \alpha & \pi^k bz + u\delta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\pi^{k'} & \alpha u' + \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Wegen $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ muss schon $k = k'$ sein. Die rechten oberen Einträge stimmen genau dann überein, d.h. es definieren v und v' genau dann denselben Knoten in $\Gamma_\infty \setminus \mathcal{T}$, wenn

$$u \equiv \frac{\alpha}{\delta} u' \pmod{A + \pi^k \mathcal{O}_\infty}$$

mit $\frac{\alpha}{\delta} \in \mathbb{F}_q^*$ ist. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \pi^k bz + u\delta &\equiv \alpha u' + \beta \pmod{\pi^k \mathcal{O}_\infty} \\ \Leftrightarrow u\delta &\equiv \alpha u' + \beta \pmod{\pi^k \mathcal{O}_\infty} \\ \Leftrightarrow u &\equiv \frac{\alpha}{\delta} u' \pmod{A + \pi^k \mathcal{O}_\infty}, \end{aligned}$$

also $\frac{\alpha}{\delta} \in \mathbb{F}_q^*$. Daraus ergibt sich die Behauptung:

- Ist $k \leq 0$, so liegen u und u' in $A + \pi^k \mathcal{O}_\infty$ und verschwinden beide modulo $A + \pi^k \mathcal{O}_\infty$.
- Ist $k > 0$, so liegt ein Teil der Summanden von u , nämlich diejenigen mit π^t , $t \leq 0$, in A , so dass $u \equiv u' \pmod{A + \pi^k \mathcal{O}_\infty}$ mit $u' \in \pi \mathcal{O}_\infty / \pi^k \mathcal{O}_\infty$ ist.

□

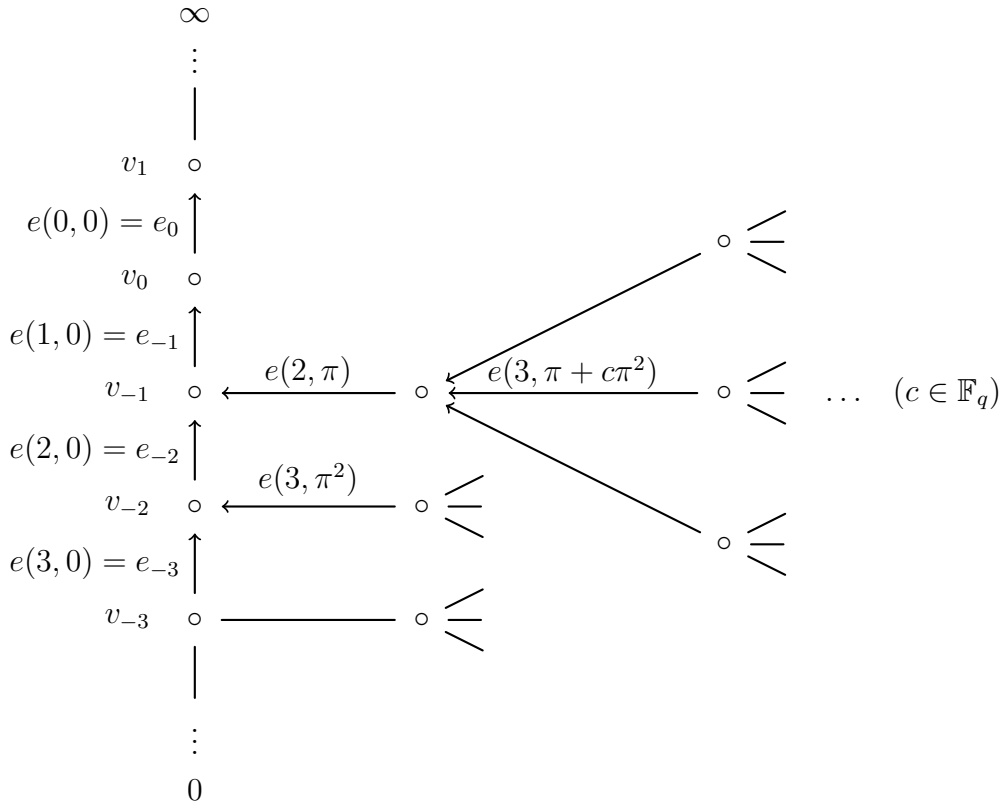


Abbildung 16: Fundamentalbereich für Γ_∞ , bzw. zu $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{T}$ isomorpher Baum

KOROLLAR 6.3.4.

Der Graph in Abbildung (16) (Kopie aus [Gek95, S. 376]) ist ein Fundamentalbereich für Γ_∞ .

Beweis. Der Beweis ist klar nach (6.3.3) und der Abbildung (16). □

BEMERKUNG 6.3.5.

Im ersten Moment erscheint es seltsam, dass in die Knoten v_k mit $k < 0$ von außerhalb der Hauptachse nur ein Pfeil eingeht. Die Richtigkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass die Menge der Diagonalmatrizen über dem Körper κ auf $\mathbb{P}^1(\kappa)$ genau drei Bahnen hat. Das wollen wir noch etwas genauer erläutern: In dieser Erläuterung verwenden wir $G := GL(2, K_\infty)$.

Der Stabilisator

$$G_{v_k} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi^{-k}b \\ \pi^k c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \mid a, b, c, d \in \mathcal{O} \right\}$$

für einen Knoten v_k mit $k < 0$ permutiert die Knoten in $\mathcal{C}_n(v_k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es ist

$$\Gamma_\infty \cap G_{v_k} = \begin{pmatrix} \kappa^* & 0 \\ 0 & \kappa^* \end{pmatrix}.$$

Sei \bar{v}_k die Projektion des Knotens v_k auf $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{T}$. Dann gilt

$$\Gamma_\infty \backslash \mathcal{C}_n(\bar{v}_k) \xrightarrow{\cong} (\Gamma_\infty \cap G_{v_k}) \backslash \mathcal{C}_n(v_k).$$

Diese Menge entspricht

$$\begin{pmatrix} \kappa^* & 0 \\ 0 & \kappa^* \end{pmatrix} \backslash \mathbb{P}^1(\kappa)$$

und man überlegt sich, dass diese Menge aus genau drei Bahnen besteht, die wir in $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{T}$ miteinander identifizieren.

BEISPIEL 6.3.6.

Für den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit $\#\kappa = 2$ ist der Baum aus Korollar (6.3.4) der in Abbildung (17) gezeigte.

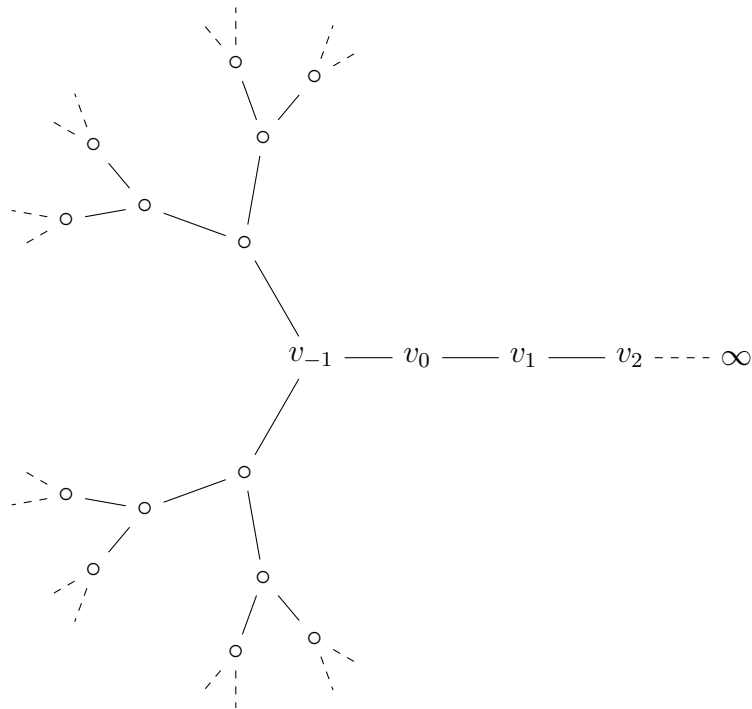


Abbildung 17: Der Fundamentalbereich für Γ_∞ mit $\#\kappa = 2$

Kommen wir nun zu dem Baum $\Gamma \backslash \mathcal{T}$. André Weil zeigt in [Wei70, 3], dass es sich bei dem Graphen $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ um einen zur positiven Hauptachse isomorphen Graphen handelt, d.h. er ist isomorph zu dem Graphen in Abbildung (18).

$$v_0 \xrightarrow{e_0} v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \text{ --- } \dots$$

Abbildung 18: Der Baum $\Gamma \backslash \mathcal{T}$

Genauer beweist er das folgende Theorem:

THEOREM 6.3.7 (Weil).

Jedes Element $g \in GL(K_\infty)$ kann in der Form

$$g = \gamma \begin{pmatrix} \pi^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_0$$

mit $\gamma \in \Gamma$, $k \geq 0$, $g_0 \in \mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty)$ geschrieben werden. Darüberhinaus ist die ganze Zahl k in dieser Formel eindeutig bestimmt, wenn $g \in GL(K_\infty)$ gegeben ist.

BEMERKUNG 6.3.8.

Wenden wir dieses Theorem auf unsere Situation an, so sagt es, dass wir für jeden Knoten aus $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ einen eindeutig bestimmten Knoten auf der Knotenmenge der positiven Hauptachse in

$$\Gamma \backslash \mathcal{V}(\mathcal{T}) \cong \Gamma \backslash GL(K_\infty) / \mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty)$$

finden können. Dies induziert natürlich ein Analogon für die Kanten $\mathcal{E}^+(\mathcal{T})$. Für eine Kante aus $\mathcal{E}^+(\mathcal{T})$ existiert eine eindeutig bestimmte Kante in

$$\Gamma \backslash \mathcal{E}^+(\mathcal{T}) \cong \Gamma \backslash GL(K_\infty) / \mathfrak{J} \cdot Z(K_\infty)$$

auf der positiven Hauptachse.

Kapitel 7

Der Algorithmus

Dieses Kapitel schließt sich thematisch direkt an das vorangehende Kapitel (6) an. Der folgende Algorithmus berechnet auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} über dem lokalen Körper K_∞ , wie im vorangehenden Kapitel (6), zu jedem Knoten den eindeutig bestimmten Knoten in $\Gamma \backslash \mathcal{T}$. Dabei arbeitet der Algorithmus mit überwiegend elementaren Rechnungen, die keine zahlentheoretischen Kenntnisse voraussetzen.

Dieses Kapitel gibt eine übersichtliche Beschreibung des Algorithmus, sowie ein paar Details zur Implementierung und zur Laufzeitanalyse des vorgestellten Algorithmus. Außerdem wird in einem Abschnitt anhand von Beispielen die geometrische Arbeitsweise des Algorithmus auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} vorgestellt.

Die Notation und Situation in diesem Kapitel schließt sich an das vorangehende Kapitel (6) an. Ab und zu verwenden wir eine Matrix mit Einträgen als Großbuchstaben, darunter wird auch der Buchstabe A vorkommen, den man aber (fast unmöglich) mit dem vorangehenden $A = \mathbb{F}_q[T]$ verwechseln kann.

Zur Vereinfachung der Notation erweitern wir die Darstellung für ein Element $A \in K_\infty^*$ in der Schreibweise

$$A = \pi^\alpha a$$

mit $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathcal{O}_\infty^*$ so, dass wir $A \in K_\infty$ zulassen und für das neutrale Element $A = 0$ einfach $a = 0$ und $\alpha = 0$ setzen, d.h. $v_\infty(0) = 0$. D.h. wir erlauben für alle $A \in K_\infty$ eine Darstellung

$$A = \pi^\alpha a$$

mit $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathcal{O}_\infty^* \cup \{0\}$.

7.1 Ziel und Aufgabenstellung

Ziel des Algorithmus ist es, gegeben eine Matrix $g \in GL(K_\infty)$, den zugehörigen Knoten auf dem Graphen $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ zu bestimmen. Genauer suchen wir nach der nicht-negativen ganzen Zahl k in der Darstellung von g wie in (6.3.7), d.h. in

$$g = \gamma \begin{pmatrix} \pi^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_0$$

mit $\gamma \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $g_0 \in \mathfrak{K}Z(K_\infty)$, betrachtet in

$$\Gamma \backslash \mathcal{V} = \Gamma \backslash GL(K_\infty) / \mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty).$$

7.2 Der Algorithmus

Wir teilen den Algorithmus in drei Teile auf.

- Teil I. Bestimme zu der Matrix $g \in GL(K_\infty)$ eine äquivalente obere Dreiecksmatrix in $GL(K_\infty) / \mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty)$.
- Teil II. Bestimme zu einer beliebigen oberen Dreiecksmatrix in $GL(K_\infty) / \mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty)$ den Standardrepräsentanten aus

$$S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})} = \left\{ \begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(K_\infty) \mid k \in \mathbb{Z}, u \in K_\infty / \pi^k \mathcal{O}_\infty \right\}.$$

- Teil III. Bestimme zu einer Matrix aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ die zugehörige natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}_0$ in der Standarddarstellung $\begin{pmatrix} \pi^{-l} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\Gamma \backslash GL(K_\infty) / \mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty)$.

7.2.1 Teil I

Gegeben ist eine Matrix $g \in GL(K_\infty)$, d.h. eine invertierbare 2×2 Matrix mit Einträgen in K_∞ . Diese schreiben wir als

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A, B, C, D \in K_\infty$, wobei o.B.d.A. $C \neq 0$ (sonst sind wir mit Teil I schon fertig) und $D \neq 0$ (sonst multipliziere von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{K}$) ist. Besser arbeiten wir aber mit der Darstellung

$$g = \begin{pmatrix} \pi^\alpha a & \pi^\beta b \\ \pi^\gamma c & \pi^\delta d \end{pmatrix}$$

für g mit $\alpha = v_\infty(A), \beta = v_\infty(B), \gamma = v_\infty(C), \delta = v_\infty(D) \in \mathbb{Z}$ und $a, b, c, d \in \mathcal{O}_\infty^* \cup \{0\}$.

- i. Multipliziere g von rechts mit der Matrix $\begin{pmatrix} \pi^{-m} & 0 \\ 0 & \pi^{-m} \end{pmatrix} \in Z(K_\infty)$, wobei $m := \min\{\gamma, \delta\}$ sei. Dies verschiebt die Bewertungen aller Einträge um m . Überschreibe $\alpha := \alpha - m, \beta := \beta - m, \gamma := \gamma - m$ und $\delta := \delta - m$, dann ist γ oder δ gleich Null.

Ist $\delta = 0$, so multiplizieren wir (mit $\begin{pmatrix} d & 0 \\ -\pi^\gamma c & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{K}$) wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \pi^\alpha a & \pi^\beta b \\ \pi^\gamma c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ -\pi^\gamma c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^\alpha ad - \pi^{\beta+\gamma} bc & \pi^\beta b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Ist $\gamma = 0$, so multiplizieren wir mit $\begin{pmatrix} \pi^\delta d & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{K}$ wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \pi^\alpha a & \pi^\beta b \\ c & \pi^\delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^\delta d & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{\alpha+\delta} ad - \pi^\beta bc & \pi^\alpha a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Zur Implementierung von $\pi^{\alpha+\delta} ad - \pi^\beta bc$ und $\pi^\alpha ad - \pi^{\beta+\gamma} bc$, bzw. zur Implementierung des allgemeineren Falls $\pi^{\alpha+\delta} ad - \pi^{\beta-\gamma} bc$ siehe Abschnitt (7.3.1).

Insgesamt haben wir in diesem Teil unser Ziel erreicht und eine Matrix in der Form

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty)$$

gefunden (wobei „*“ als Platzhalter für eine Element aus K_∞ steht), die zu dem anfänglichen $g \in GL(K_\infty)$ äquivalent ist.

7.2.2 Teil II

Gegeben sei eine 2×2 Matrix in Form einer oberen Dreiecksmatrix, die wir als

$$\begin{pmatrix} \pi^\alpha a & \pi^\beta b \\ 0 & \pi^\delta d \end{pmatrix} \in GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty),$$

wobei $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$, $a, d \in \mathcal{O}_\infty^*$ und $b \in \mathcal{O}_\infty^* \cup \{0\}$ sind, schreiben. Wie vorher setzen wir $\beta = 0$, wenn $b = 0$ ist.

i. Multipliziere diese obere Dreiecksmatrix von rechts mit

$$\begin{pmatrix} \pi^{-\delta} & 0 \\ 0 & \pi^{-\delta} \end{pmatrix} \in Z(K_\infty), \text{ überschreibe also } \alpha := \alpha - \delta \text{ und } \beta := \beta - \delta$$

und $\delta := 0$. Das führt zu

$$\begin{pmatrix} \pi^\alpha a & \pi^\beta b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL(K_\infty)/\mathfrak{K} \cdot Z(K_\infty).$$

ii. Multiplikation von rechts mit der Matrix $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{K}$ ergibt

$$\begin{pmatrix} \pi^\alpha a & \pi^\beta b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^\alpha & \pi^\beta \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})},$$

den Standardknoten, der die ursprüngliche Matrix repräsentiert. Zur detaillierten Angabe der Implementierung von $\frac{b}{d}$ sei auf den Abschnitt (7.3.2) verwiesen. Beachte hierbei, dass wir von Matrizen aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ wissen, dass der rechte obere Eintrag nur modulo $\pi^\alpha \mathcal{O}_\infty$ bestimmt werden muss.

Damit haben wir das Ziel dieses Teils erreicht und wir können im Folgenden von einer Matrix

$$\begin{pmatrix} \pi^\alpha & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$$

mit $\alpha \in \mathbb{Z}$, $B \in K_\infty/\pi^\alpha \mathcal{O}_\infty$ ausgehen.

Damit die Notation besser an das vorangehende Kapitel (6) angepasst ist, benutzen wir im Folgenden die Notation, die wir in der Definition des Standardrepräsentantensystems $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ verwendet haben. D.h. wir betrachten eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pi^k & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ und $u \in K_\infty/\pi^k \mathcal{O}_\infty$ ist. Wir können diesen Knoten auch, wie schon im vorherigen Kapitel (6) gesehen, als

$$\begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$$

mit den „Koordinaten“ $a > 0$, $t \in \mathbb{Z}$ und $v \in \mathcal{O}_\infty^*$ (wenn der Knoten auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ liegt) schreiben, oder als

$$\begin{pmatrix} \pi^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{Z}$ (wenn der Knoten nicht auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ liegt) schreiben.

DEFINITION 7.2.1.

Das Element $v \in \mathcal{O}_\infty^$ hat eine eindeutige Darstellung als Potenzreihe*

$$v = \sum_{0 \leq i < a} v_i \pi^i$$

mit $v_i \in \mathbb{F}_q$ für alle $0 \leq i < a$. Mit obigem t definieren wir, falls $t \leq 0$ ist,

$$v^- := \sum_{0 \leq i \leq -t} v_i \pi^i$$

und $\tilde{v}^+ \in \mathcal{O}_\infty$ durch

$$v^- + \tilde{v}^+ = v.$$

Es ist dann

$$\tilde{v}^+ = \sum_{-t < i < a} v_i \pi^i.$$

Sei $t' = v_\infty(\tilde{v}^+)$ die Bewertung von \tilde{v}^+ . Dann ist $t' > -t \geq 0$ und es existiert ein $v^+ \in \mathcal{O}_\infty^*$ mit

$$\tilde{v}^+ = \pi^{t'} v^+,$$

und es ist

$$v^+ = \sum_{0 \leq i < a-t'} v_i \pi^i.$$

Zur weiteren Berechnung benutzen wir unter Anderem die Proposition (6.2.22).

Zur Erinnerung: Wir haben in Proposition (6.2.22) für die Operation von links von der Matrix $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine explizite Angabe des Ergebnis gefunden, d.h. es gilt, wenn $a > 0$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{a-t} & \pi^{-t} v^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und sonst

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{1-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$.

7.2.3 Teil III

Betrachten wir erst den Fall, dass der

- Knoten aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$

liegt. Ist dies der Fall, so hat dieser Knoten eine Darstellung

$$\begin{pmatrix} \pi^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{Z}$.

- i. Wenn $t \leq 0$ ist, so hat $\begin{pmatrix} \pi^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \setminus \mathcal{V}$ schon die entsprechende Darstellung und $-l = t$.
- ii. Wenn $t > 0$ ist, so multipliziere von links mit der Matrix w und erhalte mit der Regel aus Proposition (6.2.22)

$$\begin{pmatrix} \pi^{1-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \setminus \mathcal{V},$$

so dass wir auch in diesem Fall $l = 1 - t$ direkt angeben können.

Bei dem Fall, dass der

- Knoten aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ nicht auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$

liegt, ist etwas mehr zu tun. Gegeben sei eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$$

mit $a > 0$, $t \in \mathbb{Z}$ und $v \in \mathcal{O}_\infty^* / \pi^a \mathcal{O}_\infty$. In diesem Fall gehen wir iterativ vor, wobei wir zwischen folgenden drei Fällen unterscheiden und hin und her springen. Dabei wird sich der Abstand des Knotens von der Hauptachse sukzessive verringern, so dass der Algorithmus wirklich terminiert.

iii. Fall $t \leq 0$:

Multipliziere von links mit $\begin{pmatrix} 1 & -\pi^t v^- \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \subset \Gamma$, wobei v^- und das folgende \tilde{v}^+ und v^+ wie in Definition (7.2.1) seien, d.h. wir haben

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^t v^- \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t \tilde{v}^+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies können wir mit $0 < t' := v_\infty(\tilde{v}^+)$ als

$$\begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t \tilde{v}^+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{(a-t')+(t+t')} & \pi^{t+t'} v^+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei wir, falls $\tilde{v}^+ = 0$ ist,

$$t' = v_\infty(0) \stackrel{\tilde{v}^+ \in \mathcal{O}_\infty / \pi^a \mathcal{O}_\infty}{=} v_\infty(\pi^a) = a,$$

wegen $t' > 0$, setzen. Für den nächsten Schritt überschreiben wir $a := a - t'$, $t := t + t'$ und $v := v^+$, d.h. wir haben nach einem Schritt in diesem Fall wieder eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist das neue a , wegen $t' > 0$ echt kleiner als das Vorhergehende. Dadurch wird garantiert, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert. Ist $a = 0$ und $v = 0$, so liegt der Knoten auf der Hauptachse. Ansonsten springe zu dem Fall $t > 0$.

iv. Fall $t > 0$:

Multipliziere von links mit der Matrix w . Das ergibt nach der Proposition (6.2.22)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^{a+t} & \pi^t v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{a-t} & \pi^{-t} v^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und springe mit $t := -t$ und $v := v^{-1}$ wieder in den Fall mit $t < 0$.

Der Algorithmus springt in den letzten beiden Fällen hin und her, bis $a = 0$ und $v = 0$ ist. Damit kommt man in einen Fall, der zum unmittelbaren Ende des Algorithmus führt, da der betrachtete Knoten dann auf der Hauptachse liegt.

7.3 Details für die Implementierung

In diesem Abschnitt schauen wir uns die Details der Implementierung genauer an, da manche Operationen nicht zu den Standardbibliotheken von Programmiersprachen gehören. Weiterhin wird uns dieser Abschnitt bei der Laufzeitanalyse (7.4) helfen.

Eine wichtige Aussage über den gesamten Algorithmus ist:

PROPOSITION 7.3.1.

Man kann alle Potenzreihen bzw. Laurent-Reihen, die in dem Algorithmus auftauchen als endlich ansehen, d.h. es gibt einen Index, ab dem alle Koeffizienten mit größerem Index verschwinden.

Beweis. In der Implementierung des Algorithmus ist es nicht notwendig alle Matrixmultiplikationen durchzuführen, teilweise kann man sich auf Indexverschiebung innerhalb der Matrix bzw. auf Multiplikationen von einzelnen Einträgen beschränken. Im Folgenden sprechen wir nur noch von Potenzreihen, statt von Laurent-Reihen, da wir, wie wir wissen, jede Laurent-Reihe als Produkt einer π -Potenz und einer Potenzreihe schreiben.

- i. Beim Skalieren in Teil I (7.2.1) werden die Potenzreihen nicht verändert. Es ändern sich lediglich die Bewertungen und diese Rechnungen finden in \mathbb{Z} statt.
- ii. Wirkliche Kosten entstehen nur bei der Berechnung der Bewertung von $\pi^{\alpha+\delta}ad - \pi^{\beta+\gamma}bc$ wie in Abschnitt (7.3.1). In den Produkten ad , bc der Potenzreihen a, b, c, d müssen nicht alle Koeffizienten berechnet werden. Essentiell ist nur das Wissen über die Bewertung des Ausdrucks $\pi^{\alpha+\delta}ad - \pi^{\beta+\gamma}bc$, welche wir in Abschnitt (7.3.1) bestimmen wollen. Dort wird sich auf jeden Fall eine endliche Bewertung ergeben. Die Begründung, warum es nur auf die Bewertung ankommt liefert der nächste Punkt (iii).
- iii. Betrachten wir den Schritt (ii) von Teil II (7.2.2) genauer, so sieht man, dass es bei dem oberen linken Eintrag in der Matrix tatsächlich nur auf die Bewertung ankommt. Im Schritt (i) werden wieder nur die Bewertungen verändert (d.h. rechnen in \mathbb{Z}), so dass bisher alle auftretenden Potenzreihen als endlich betrachtet werden können. Zum ersten Mal ist in Teil II (7.2.2) im Schritt (ii) im rechten oberen Eintrag mit Potenzreihen zu rechnen. Allerdings rechnet man dort schon im Repräsentantensystem $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$, wo bekannt ist, dass die Potenzreihe im oberen rechten Eintrag der Matrix lediglich

$$\text{modulo } \pi^{\text{Bewertung des oberen linken Eintrags}} \mathcal{O}_{\infty}$$

bestimmt werden muss, d.h. es sind nur endlich viele Koeffizienten auszurechnen. Näheres dazu in Abschnitt (7.3.2).

- iv. Ab jetzt finden alle Rechnungen in $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ statt, d.h. im weiteren Verlauf kommt der Algorithmus mit endlichen Potenzreihen zurecht.

□

7.3.1 Details für $\pi^{\alpha+\delta}ad - \pi^{\beta+\gamma}bc$

Gegeben ist

$$\pi^{\alpha+\delta}ad - \pi^{\beta+\gamma}bc$$

mit $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ und $a, b, c, d \in \mathcal{O}_{\infty}^* \cup \{0\}$. Beachte wieder: Ist $a = 0$, so sei $\alpha = 0$, ist $b = 0$, so sei $\beta = 0$, ist $c = 0$, so sei $\gamma = 0$ und ist $d = 0$, so sei $\delta = 0$. Ziel ist es, die Bewertung dieses Ausdrucks zu bestimmen.

Es ist zuerst festzuhalten, dass $\pi^{\alpha+\delta}ad - \pi^{\beta+\gamma}bc \neq 0$ ist. Das liegt daran, dass

$$\pi^{\alpha+\delta}ad - \pi^{\beta+\gamma}bc = \det \begin{pmatrix} \pi^{\alpha}a & \pi^{\beta}b \\ \pi^{\gamma}c & \pi^{\delta}d \end{pmatrix} \neq 0$$

ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- i. Fall $\alpha + \delta \neq \beta + \gamma$:

In diesem Fall ergibt sich mit $\mu := \min\{\alpha + \delta, \beta + \gamma\}$ die Bewertung

$$v_{\infty}(\pi^{\mu}(\pi^{\alpha+\delta-\mu}ad - \pi^{\beta+\gamma-\mu}bc)) = \mu$$

unmittelbar.

- ii. Fall $\alpha + \delta = \beta + \gamma$:

Wir wissen, dass $\pi^{\alpha+\delta}ad - \pi^{\beta+\gamma}bc = \pi^{\mu}(ad - bc)$ mit $\mu := \alpha + \delta = \beta + \gamma$ ist. Zu bestimmen ist noch die Bewertung von $ad - bc \in \mathcal{O}_{\infty}$. Es seien

$$\begin{aligned} a &:= \sum_{i \geq 0} a_i \pi^i, \\ d &:= \sum_{j \geq 0} d_j \pi^j, \\ b &:= \sum_{i \geq 0} b_i \pi^i \quad \text{und} \\ c &:= \sum_{j \geq 0} c_j \pi^j \end{aligned}$$

mit $a_i, d_j, b_i, c_j \in \mathbb{F}_q$ für alle $i, j \geq 0$. Dann ist

$$ad = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\sum_{i+j=n} a_i d_j \right)}_{=:(ad)_n} \pi^n \quad \text{und}$$

$$bc = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\sum_{i+j=n} b_i c_j \right)}_{=:(bc)_n} \pi^n$$

Die Idee ist, die Anzahl der Nullkoeffizienten in $ad - bc$ sukzessive zu zählen. In Pseudocode könnte die Berechnung der Bewertung von $ad - bc$ wie folgt aussehen: (beachte: Mit den Koeffizienten wird in \mathbb{F}_q gerechnet)

Algorithm 1 Pseudocode für die Berechnung von $v_\infty(ad - bc)$

```

1:  $n = 0$ 
2:  $ad = (ad)_n$  ▷ Berechne 0-ten Koeffizienten  $ad$ 
3:  $bc = (bc)_n$  ▷ Berechne 0-ten Koeffizienten  $bc$ 
4: while  $ad = bc$  do ▷ Vergleiche Koeffizienten  $(ad)_n$  und  $(bc)_n$ 
5:    $n = n + 1$ 
6:    $ad = (ad)_n$  ▷ Berechne n-ten Koeffizienten von  $ad$ 
7:    $bc = (bc)_n$  ▷ Berechne n-ten Koeffizienten von  $bc$ 
8: end while
9: return  $n$  ▷ gesuchte Bewertung von  $ad - bc$ 

```

7.3.2 Details für $\frac{b}{d}$

Die Berechnung von $\frac{b}{d}$ für $b, d \in \mathcal{O}_\infty^*$ tritt in einer Matrix aus $S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ auf, so dass wir wissen, dass nur endlich viele Koeffizienten berechnet werden müssen. Es seien

$$b := \sum_{i \geq 0} b_i \pi^i \quad \text{und}$$

$$d := \sum_{j \geq 0} d_j \pi^j,$$

mit $b_i, d_j \in \mathbb{F}_q$ für alle $i, j \geq 0$ zwei Potenzreihen. Gesucht ist eine Potenzreihe, genauer ein Polynom,

$$c := \sum_{0 \leq i < k} c_i \pi^i \in \mathcal{O}_\infty^*$$

mit $c_i \in \mathbb{F}_q$ für alle $i \geq 0$, so dass $cd = b$ ist, wobei k der erste Index ist, der nicht mehr berechnet werden muss. Ein Algorithmus in Pseudocode könnte wie folgt aussehen:

Algorithm 2 Pseudocode für die Berechnung von $\frac{b}{d}$

```

1: berechne  $d_0^{-1}$  ▷ Berechnung in  $\mathbb{F}_q$ 
2:  $c_0 = d_0^{-1}b_0$  ▷ erster Koeffizient
3: for  $n = 1, \dots, (k - 1)$  do
4:    $c_n = b_n$ 
5:   for  $i = 0, \dots, n - 1$  do
6:      $j = n - i$ 
7:      $c_n = c_n - c_i d_j$ 
8:   end for
9:    $c_n = d_0^{-1}c_n$ 
10: end for
11: return  $c_0 + c_1\pi + c_2\pi^2 + \dots + c_{k-1}\pi^{k-1}$  ▷ gesuchte Potenzreihe

```

In der Schleife, die in Zeile (3) beginnt, berechnet der Algorithmus (2) für alle $1 \leq n < k$

$$c_n = b_n - \sum_{\substack{i+j=n \\ i < n}} c_i d_j.$$

7.4 Laufzeitanalyse

BEMERKUNG 7.4.1.

Die Rechnungen mit den Koeffizienten der Potenz- oder Laurent-Reihen finden alle über dem endlichen Körper \mathbb{F}_q statt. Diese können alle in maximal linearer Laufzeit bewältigt werden. Das Rechnen mit den Bewertungen lässt sich in den ganzen Zahlen \mathbb{Z} durchführen.

BEMERKUNG 7.4.2.

Über den Teil des Algorithmus, der in (7.3.1) beschrieben wird, können wir nur sagen, dass nur endlich viele Glieder in den Potenzreihen betrachtet werden müssen, jedoch weiß man a priori nicht, wieviele das exakt sind. Dieses Problem hängt davon ab, wie „nahe“ sich die Ausdrücke $\pi^{\alpha+\delta}ad$ und $\pi^{\beta+\gamma}bc$ sind.

PROPOSITION 7.4.3.

Der Teil des Algorithmus, der in (7.3.2) beschrieben wird kommt mit

$$\frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1$$

Rechenoperationen zurecht.

Beweis. Wir analysieren den Algorithmus (2).

- i. In Zeile (1) und (2) wird jeweils eine Rechenoperation in \mathbb{F}_q durchgeführt,
- ii. In der äußeren Schleife von Zeile (3) bis (10) wird jeweils eine Operation in Zeile (9) ausgeführt und
- iii. jeweils die Schleife von Zeile (5) bis Zeile (8), in der drei Rechenoperationen durchgeführt werden, durchlaufen. Dabei hängt die innere Schleife von der äußeren Schleife ab.

Insgesamt sind also

$$\begin{aligned} 2 + (k-1) + \sum_{1 \leq i < k} 3i &= 2 + (k-1) + \frac{3}{2}k(k-1) \\ &= 1 + k + \frac{3}{2}k^2 - \frac{3}{2}k \\ &= \frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1 \end{aligned}$$

Operationen durchzuführen. □

KOROLLAR 7.4.4.

Der Algorithmus (2) hat quadratische Laufzeit in der Variablen $k = \alpha - \beta$ der maximal zu bestimmenden Koeffizienten der Potenzreihe im rechten oberen Eintrag der Matrix $\begin{pmatrix} \pi^\alpha & \pi^{\beta \frac{b}{d}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$.

Beweis. Dies ist eine Umformulierung der vorangehenden Proposition (7.4.3). \square

BEMERKUNG 7.4.5.

Die Teile I (7.2.1) und II (7.2.2) bedürfen keiner exakten Analyse der Laufzeit. Es ist offensichtlich, dass sie (ausgenommen der Berechnungen in (7.3.1) und (7.3.2)) konstante Laufzeit haben.

Betrachten wir jetzt noch den Teil III (7.2.3) des Algorithmus.

PROPOSITION 7.4.6.

Im „worst-case“ müssen in Teil III

$$2a + 1 \quad \text{Fälle}$$

betrachtet werden.

Beweis. Der Algorithmus startet mit der Überprüfung, ob der Knoten schon auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ liegt oder nicht. Im ersten Fall ergibt sich das Ergebnis nach spätestens zwei Schritten. Wir betrachten also den Fall, dass der Knoten nicht auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ liegt. Offensichtlich springt der Algorithmus nur in den Fällen $t \leq 0$ und $t > 0$ hin und her.

Im „worst-case“ reduziert sich a im Fall $t \leq 0$ immer nur um eins. Der anschließende Fall $t > 0$ lässt a konstant, d.h. der aktuelle Knoten liegt nach spätestens $2a - 1$ vielen Schritten auf der Hauptachse. Den „worst-case“ betrachtet, springt der Algorithmus von dem Fall, dass der Knoten nicht auf der Hauptachse liegt und $t \leq 0$ ist zu dem Fall, dass der Knoten auf der Hauptachse liegt, aber $t > 0$ ist. Insgesamt sind das genau $2a + 1$ Fälle die im „worst-case“ betrachtet werden. \square

BEMERKUNG 7.4.7.

Schauen wir uns nun die einzelnen Fälle bezüglich der Anzahl der Rechenoperationen etwas genauer an:

- i. Die Fälle, dass der Knoten auf der Hauptachse liegt kommen mit maximal einer Rechenoperation aus.

- ii. Schauen wir uns also die Fälle an, wo der Knoten nicht auf der Hauptachse liegt. Die Berechnung von t' im Fall $t \leq 0$ ist lediglich ein Abzählen der Nullkoeffizienten von \tilde{v}^+ ($= v - v^-$). Der maximale Koeffizient ist a , also muss man maximal a Vergleiche anstellen. Je mehr Nullkoeffizienten es gibt, desto schneller terminiert der Algorithmus aber, weil sich $a = a - t'$ schneller reduziert. Mit $a = a - t'$ und $t = t + t'$ sind zwei weitere Rechenoperationen in \mathbb{Z} notwendig.
- iii. Der Fall $t > 0$ ist am aufwendigsten zu berechnen, weil man hier eine Potenzreihe invertieren muss. Dazu kann man den in (7.3.2) vorgestellten Algorithmus mit $b = 1$ und $d = v$ verwenden. Die Laufzeit dieses Teil des Algorithmus haben wir schon in Proposition (7.4.3) berechnet.

BEMERKUNG 7.4.8.

Wegen (7.3.1) können wir keine Gesamtaussage über die Laufzeit des Algorithmus treffen.

7.5 Graphische Arbeitsweise des Algorithmus an Beispielen

In diesem Abschnitt präsentieren wir die Arbeitsweise des vorgestellten Algorithmus. Bevor wir ein Beispiel zeigen, das wir auch an einem Beispielbaum veranschaulichen wollen, betrachten wir den Algorithmus zuerst aus arithmetischer Sicht ausführlich:

BEISPIEL 7.5.1.

Wir betrachten den Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} mit dem Restklassenkörper κ mit 5 Elementen. Gegeben sei der Knoten $(\pi^4, 3\pi + 2\pi^2) = (\pi^{3+1}, \pi^1(3 + 2\pi))$.

- i. An dieser Darstellung können wir die Werte für a, t, v ablesen, nämlich:

$$a = 3, \quad t = 1 \quad \text{und} \quad v = 3 + 2\pi$$

ii. Wir sind in dem Fall $t > 0$, d.h. wir ersetzen $t := -t, v := v^{-1}$. Berechnen wir also v^{-1} mit dem Algorithmus (2):

($d = d_0 + d_1\pi = 3 + 2\pi$,
 $k = a = 3, b = 1 + 0\pi + 0\pi^2 + \dots$,
beachte: $\#\kappa = q = 5$)

$$(1) \quad d_0^{-1} = 2;$$

$$(2) \quad c_0 = d_0^{-1}b_0 = 2 \cdot 1 = 2;$$

$$(3) \quad n = 1;$$

$$(4) \quad c_1 = b_1 = 0;$$

$$(5) \quad i = 0;$$

$$(6) \quad j = n - i = 1 - 0 = 1;$$

$$(7) \quad c_1 = c_1 - c_0d_1 = 0 - 2 \cdot 2 = 0 - 4 = -4;$$

$$(9) \quad c_1 = d_0^{-1}c_1 = 2 \cdot (-4) = -8;$$

$$(3) \quad n = 2;$$

$$(4) \quad c_2 = b_2 = 0;$$

$$(5) \quad i = 0;$$

$$(6) \quad j = n - i = 2 - 0 = 2;$$

$$(7) \quad c_2 = c_2 - c_0d_2 = 0 - 2 \cdot 0 = 0;$$

$$(5) \quad i = 1;$$

$$(6) \quad j = n - i = 2 - 1 = 1;$$

$$(7) \quad c_2 = c_2 - c_1d_1 = 0 - (-8) \cdot 2 = 0 + 16 = 16;$$

$$(9) \quad c_2 = d_0^{-1}c_2 = 2 \cdot 16 = 32;$$

$$(11) \quad \text{return } 2 + 2\pi + 2\pi^2;$$

Also ist v^{-1} in $\mathcal{O}_\infty^*/\pi^3\mathcal{O}_\infty^*$ kongruent zu $2 + 2\pi + 2\pi^2$. Die neuen Werte sind

$$a = 2, \quad t = -1 \quad \text{und} \quad v = 2 + 2\pi + 2\pi^2$$

und wir sind bei dem Knoten $(\pi, 2\pi^{-1} + 2 + 2\pi)$.

iii. Jetzt kommen wir in den Fall $t \leq 0$. D.h. wir rechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^{-1}(2 + 2\pi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^{3+(-1)} & \pi^{-1}(2 + 2\pi + 2\pi^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \pi^{3+(-1)} & \pi^{-1}(2\pi^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi^{(3-2)+((-1)+2)} & \pi^{(-1)+2}(2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für den nächsten Schritt überschreiben wir $a := a - t'$, $t := t + t'$ und $v := v^+$, d.h. wir haben

$$a = 1, \quad t = 1 \quad \text{und} \quad v = 2,$$

d.h. aktuell sind wir bei dem Knoten $(\pi^2, 2\pi)$.

iv. Nun führt uns der Algorithmus wieder in den Fall $t > 0$, d.h. wir setzen

$$a = 1, \quad t = -t = -1 \quad \text{und} \quad v = v^{-1} = 2^{-1} = 3.$$

(Wir führen den expliziten Algorithmus zur Berechnung der inversen jetzt nicht mehr durch.) Wir sind also bei dem Knoten $(1, 3\pi^{-1})$.

v. Aus dem Fall $t \leq 0$ ergibt sich jetzt, weil das \tilde{v}^+ aus dem Algorithmus verschwindet, dass $t' = a$ ist und für die neuen Werte:

$$a = a - t' = 0, \quad t = t + t' = 0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

Der aktuelle Knoten ist $(1, 0)$.

vi. Nun sind wir fertig, der Knoten $(1, 0)$ liegt auf der Hauptachse. Also ist $l = 0$.

Ab jetzt betrachten wir bei allen weiteren Beispielen in diesem Abschnitt den Bruhat-Tits Baum mit dem Restklassenkörper mit $q = \#\kappa = 2$ Elementen. Außerdem führen wir die einzelnen Rechenschritte nicht mehr aus. Wir geben lediglich eine Auflistung der Fälle, die der Algorithmus durchläuft. Der Eintrag, der in der Spalte „Fall“ steht beschreibt, durch welchen Fall des Algorithmus die Werte der vorangehende Zeile gehen mussten, dass der aktuelle Zustand, der in dieser Zeile steht, erreicht wurde.

BEISPIEL 7.5.2.

Gegeben sei der Knoten $(\pi^4, \pi + \pi^3)$. Die Vorgehnsweise des Algorithmus in diesem Beispiel ist in Tabelle (1) zu sehen.

Der Knoten $(1, 0)$ liegt auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ und das Ergebnis ist, wegen $t \leq 0$:

$$l = 0$$

Die Abbildung (19) zeigt die einzelnen Knoten, die in diesem Beispiel durchlaufen werden.

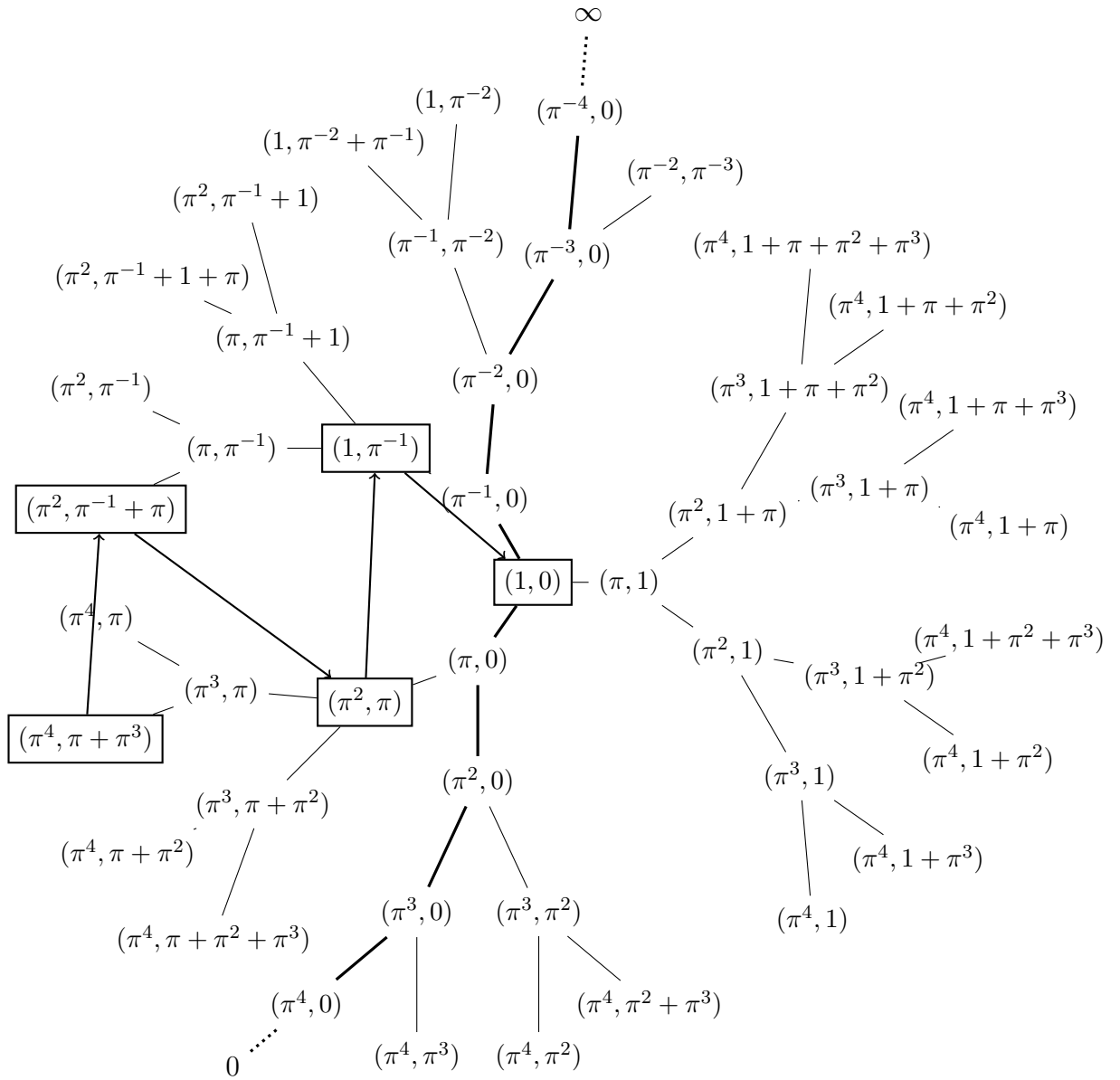


Abbildung 19: Arbeitsweise des Algorithmus für Beispiel (7.5.2)

Fall	a	t	v	Knoten $(\pi^{a+t}, u = \pi^t v)$
	3	1	$\pi^2 + 1$	$(\pi^4, \pi + \pi^3)$
$t > 0$	3	-1	$\pi^2 + 1$	$(\pi^2, \pi^{-1} + \pi)$
$t \leq 0$	1	1	1	(π^2, π)
$t > 0$	1	-1	1	(π^0, π^{-1})
$t \leq 0$	0	0	0	$(1, 0)$

Tabelle 1: Vorgehensweise des Algorithmus für den Knoten $(\pi^4, \pi + \pi^3)$ auf dem Bruhat-Tits Baum mit $\#\kappa = q = 2$

BEISPIEL 7.5.3.

Gegeben sei der Knoten (π^4, π^3) . Die Vorgehensweise des Algorithmus in diesem Beispiel ist in Tabelle (2) zu sehen.

Fall	a	t	v	Knoten $(\pi^{a+t}, u = \pi^t v)$
	1	3	1	(π^4, π^3)
$t > 0$	1	-3	1	(π^{-2}, π^{-3})
$t \leq 0$	0	-2	0	$(\pi^{-2}, 0)$

Tabelle 2: Vorgehensweise des Algorithmus für den Knoten (π^4, π^3) auf dem Bruhat-Tits Baum mit $\#\kappa = q = 2$

Der Knoten $(\pi^{-2}, 0)$ liegt auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ und das Ergebnis ist, wegen $t \leq 0$:

$$l = 2$$

Die Abbildung (20) zeigt die einzelnen Knoten, die in diesem Beispiel durchlaufen werden.

BEISPIEL 7.5.4.

Gegeben sei der Knoten $(\pi^3, 1 + \pi^2)$. Die Vorgehensweise des Algorithmus in diesem Beispiel ist in Tabelle (3) zu sehen.

Der Knoten $(\pi^{-1}, 0)$ liegt auf der Hauptachse $\mathcal{A}(0, \infty)$ und das Ergebnis ist, wegen $t \leq 0$:

$$l = 1$$

Die Abbildung (21) zeigt die einzelnen Knoten, die in diesem Beispiel durchlaufen werden.

BEISPIEL 7.5.5.

Dieses Beispiel wird durch Abbildung (22) gegeben. Die Abbildung zeigt

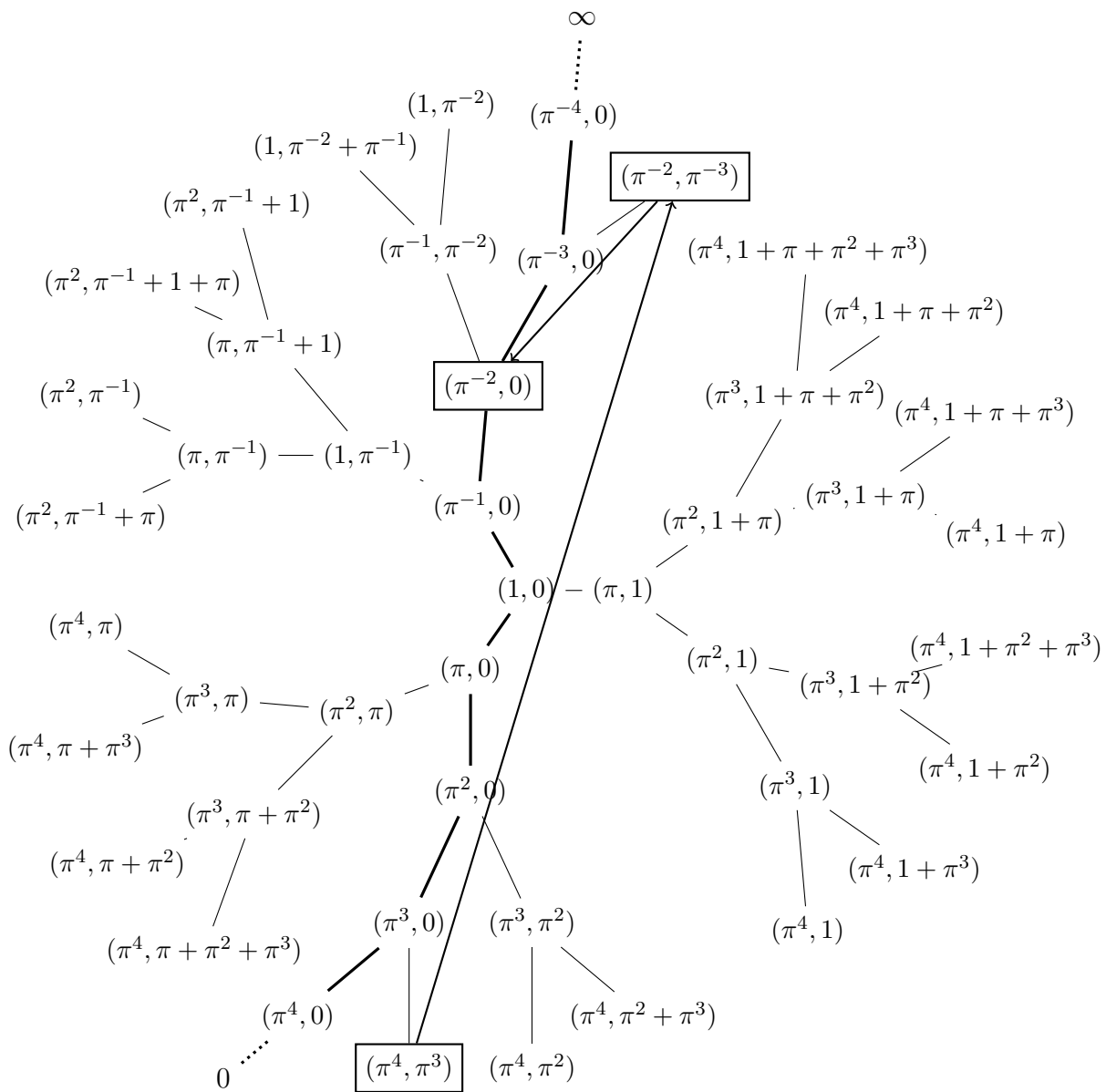


Abbildung 20: Arbeitsweise des Algorithmus für Beispiel (7.5.3)

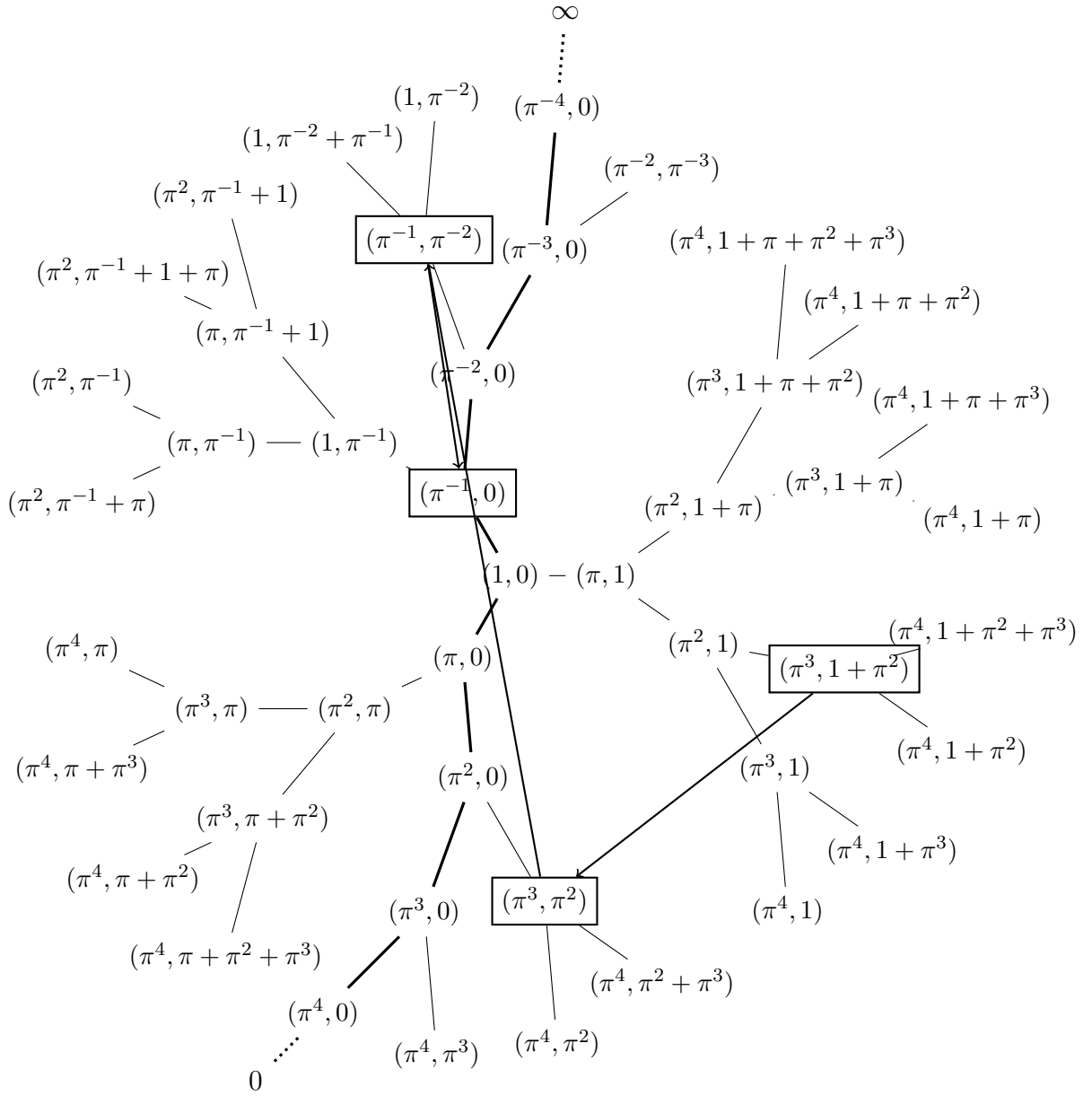


Abbildung 21: Arbeitsweise des Algorithmus für Beispiel (7.5.4)

Fall	a	t	v	Knoten $(\pi^{a+t}, u = \pi^t v)$
	3	0	$1 + \pi^2$	$(\pi^3, 1 + \pi^2)$
$t \leq 0$	1	2	1	(π^3, π^2)
$t > 0$	1	-2	1	(π^{-1}, π^{-2})
$t \leq 0$	0	-1	0	$(\pi^{-1}, 0)$

Tabelle 3: Vorgehensweise des Algorithmus für den Knoten $(\pi^3, 1 + \pi^2)$ auf dem Bruhat-Tits Baum mit $\#\kappa = q = 2$

für jeden Knoten den zugehörigen Knoten auf der positiven Hauptachse. Werden mehrere Knoten auf den gleichen Knoten abgebildet, so wird das durch die Verwendung gleicher Symbole gekennzeichnet. D.h. Knoten, die in $\Gamma \setminus \mathcal{T}$ äquivalent sind, haben dieselbe Berandung. Wieder betrachten wir den Fall, dass der Restklassenkörper $\#\kappa = q = 2$ Elemente hat.

BEISPIEL 7.5.6.

Als letztes Beispiel wollen wir ein wenig die Verteilung untersuchen: Wieviele Knoten, die einen Abstand kleiner gleich einer gegebenen natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ von dem Basisknoten haben, landen in $\Gamma \setminus \mathcal{T}$ auf dem gleichen Knoten? Dies untersuchen wir wieder in dem Fall, dass der Restklassenkörper κ zwei Elemente hat. Die Ergebnisse notieren wir in der Tabelle (4).

$n \setminus -l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	12	6	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	24	12	6	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	48	24	12	6	3	1	0	0	0	0	0	0	0
6	96	48	24	12	6	3	1	0	0	0	0	0	0
7	192	96	48	24	12	6	3	1	0	0	0	0	0
8	384	192	96	48	24	12	6	3	1	0	0	0	0
9	768	384	192	96	48	24	12	6	3	1	0	0	0
10	1536	768	384	192	96	48	24	12	6	3	1	0	0
11	3072	1536	768	384	192	96	48	24	12	6	3	1	0
12	6144	3072	1536	768	384	192	96	48	24	12	6	3	1

Tabelle 4: Verteilung der Knoten in $\Gamma \setminus \mathcal{T}$ für $\#\kappa = 2$

Man erkennt eine starke Regelmäßigkeit, die sich auch auf höhere Werte fortsetzt, die ich nicht mehr in die Tabelle eingetragen habe.

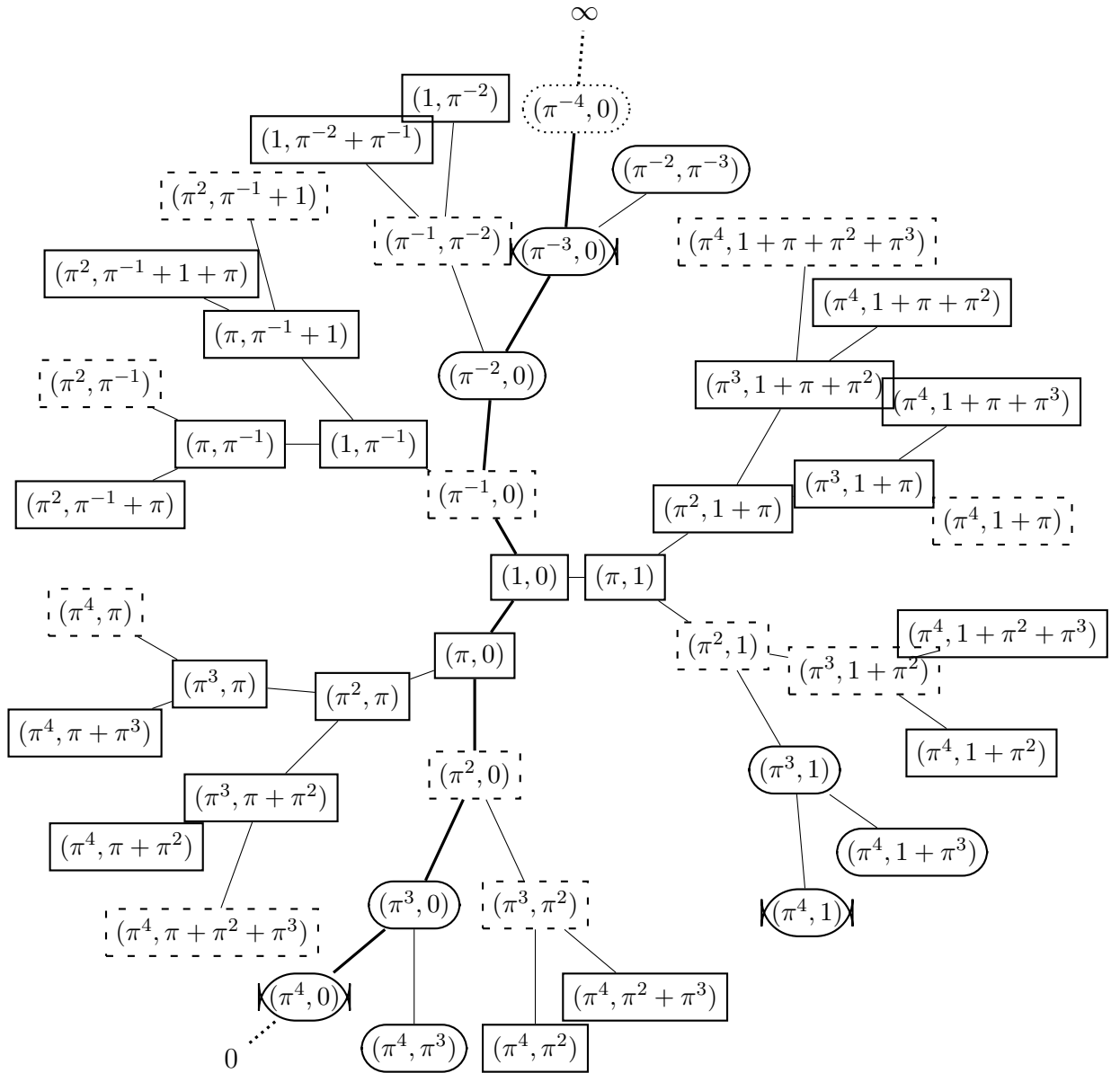


Abbildung 22: Zusammenfassung des Ergebnis des Algorithmus für die Knoten in einer Umgebung von $[\mathcal{O}_\infty \times \mathcal{O}_\infty]$ im Beispiel mit $\#\kappa = 2$

Symbolverzeichnis

Das Symbolverzeichnis ist wie folgt aufgebaut: Die erste Tabelle zeigt die allgemeinen Symbole, die für die gesamte Arbeit ihre Gültigkeit haben. In den weiteren Tabellen werden nur die im jeweiligen Kapitel neu eingeführten Symbole aufgelistet.

Allgemeingültig:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$	die Menge der natürlichen Zahlen mit Null
\mathbb{Z}	die Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	die Menge nicht-negativen reellen Zahlen
\mathbb{F}_q	der Körper mit q (=Primzahlpotenz) vielen Elementen
$\mathbb{F}_q[T]$	der Polynomring über \mathbb{F}_q in der Unbestimmten T
$\mathbb{F}_q[[\pi]]$	der Körper der Potenzreihen über \mathbb{F}_q in der Unbestimmten π
$\mathbb{F}_q(T)$	der Körper der rationalen Funktionen über \mathbb{F}_q in der Unbestimmten T
$\mathbb{F}_q((\pi))$	der Körper der Laurent-Reihen über \mathbb{F}_q in der Unbestimmten π

Kapitel 1: Graphen und Bäume

$\Gamma = \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{E})$	ungerichteter Graph Γ mit Knotenmenge \mathcal{V} und ungerichteter Kantenmenge \mathcal{E}
$\Gamma = \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{E}^\pm)$	gerichteter Graph Γ mit Knotenmenge \mathcal{V} und gerichteter Kantenmenge \mathcal{E}^\pm

$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\Gamma)$	Knotenmenge des Graphen Γ
$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Gamma)$	ungerichtete Kantenmenge des Graphen Γ
$\mathcal{E}^\pm = \mathcal{E}(\Gamma)$	gerichtete Kantenmenge des Graphen Γ
$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$	ungerichteter Baum mit Knotenmenge \mathcal{V} und ungerichteter Kantenmenge \mathcal{E}
$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{E}^\pm)$	gerichteter Baum mit Knotenmenge \mathcal{V} und ungerichteter Kantenmenge \mathcal{E}^\pm
$d(v, w)$	Abstandsfunktion auf einem zusammenhängenden Graphen Γ ; misst den Abstand von $v \in \mathcal{V}(\Gamma)$ nach $w \in \mathcal{V}(\Gamma)$
$o(e)$	Abbildung, die auf den Ursprung der Kante $e \in \mathcal{E}^\pm$ abbildet
$t(e)$	Abbildung, die auf den Terminus der Kante $e \in \mathcal{E}^\pm$ abbildet
$\bar{e} = \overleftarrow{e},$	invers orientierte Kante zu $e = \overrightarrow{e} \in \mathcal{E}^\pm$
$(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$	Pfad entlang der Kanten e_0, e_1, \dots, e_{n-1}
(v_0, v_1, \dots, v_n)	Pfad entlang der Knoten v_0, v_1, \dots, v_n
\cong	Isomorphiezeichen für zwei Graphen ($\Gamma \cong \Gamma'$)

Kapitel 2: Projektive Geometrie

K	Körper
K^*	Einheitengruppe des Körpers K
V	Vektorraum über K
R	lokaler kommutativer Ring
R^*	Einheitengruppe des Rings R
\mathfrak{m}	(eindeutiges) maximales Ideal des lokalen Rings R
M	freier Modul über dem Ring R
$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_K(V)$	projektiver Raum des K -Vektorraums V
$\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$	kanonischer projektiver Raum über K der projektiven Dimension $n \in \mathbb{N}_0$
$\dim_K \mathbb{P}(V)$	projektive Dimension von $\mathbb{P}(V)$
$(v_0 : v_1 : \dots : v_n)$	Punkt im projektiven Raum in homogenen Koordinaten
∞	„unendlich ferner Punkt“ (ausgezeichneter Punkt im projektiven Raum)

Kapitel 3: Beschreibung des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T}

K	diskret bewerteter Körper
K^*	Einheitengruppe des diskret bewerteten Körpers K
v	diskrete Bewertung des Körpers K
$\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$	diskreter Bewertungsring des Körpers K
\mathfrak{m}	(eindeutiges) maximales Ideal des Körpers K
π	Uniformisierende des Körpers K
$\mathcal{O}^* = \mathcal{O}_K^*$	Einheitengruppe des diskreten Bewertungsringes des Körpers K
$\kappa = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$	Restklassenkörper von \mathcal{O}
$\kappa(n) = \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$	Restklassenring von \mathcal{O}
$V = K \times K$	zweidimensionaler Vektorraum über K
$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$	Bruhat-Tits Baum mit Knotenmenge \mathcal{V} und ungerichteter Kantenmenge \mathcal{E}
$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{T})$	Knotenmenge des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T}
$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{T})$	ungerichtete Kantenmenge des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T}
$[L]$	Gitterklasse eines Gitters $L \subset V$
$ $	gewöhnlicher Absolutbetrag auf \mathbb{R}
$d([L], [L'])$	Abstand(-sfunktion) auf der Menge der Gitterklassen

Kapitel 4: Geometrie auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}

\widehat{K}	Komplettierung des Körpers K
$K = \widehat{K}$	(ab Abschnitt (4.2)) vollständig diskret bewerteter Körper
$ = _v$	Betragsbewertung auf K zur diskreten Bewertung v
$\widehat{\mathcal{O}}$	diskreter Bewertungsring des vollständigen Körpers \widehat{K}
$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\widehat{K}} = \widehat{\mathcal{O}}$	(ab Abschnitt (4.2)) diskreter Bewertungsring des vollständigen diskret bewerteten Körpers $K = \widehat{K}$
\widehat{V}	Komplettierung des zweidimensionalen Vektorraums V
$V = \widehat{V}$	(ab Abschnitt (4.2)) vollständiger zweidimensionaler Vektorraum
$\widehat{\mathcal{T}}$	Komplettierung des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T}
$\mathcal{T} = \widehat{\mathcal{T}}$	(ab Abschnitt (4.2)) Komplettierung des Bruhat-Tits Baums \mathcal{T}
$\mathcal{C}_n(v)$	Menge aller Knoten, die von $v \in \mathcal{V}$ den Abstand $n \in \mathbb{N}_0$ haben (Kreis vom Radius $n \in \mathbb{N}_0$ um $v \in \mathcal{V}$)
$\mathcal{C}(v)$	Menge aller Knoten, die von $v \in \mathcal{V}$ den Abstand eins

$\partial\mathcal{T}$	haben (Kreis vom Radius eins um $v \in \mathcal{V}$) Rand von \mathcal{T} (Menge von Enden von \mathcal{T})
Kapitel 5:	Operationen von $GL(V)$ auf dem Bruhat-Tits Baum \mathcal{T}
$G = GL(V)$	Automorphismengruppe des Vektorraums V (= $GL(2, K) = GL(K)$)
$SL(V)$	Automorphismengruppe des Vektorraums V mit Determinante eins
$PGL(V)$	projektive lineare Automorphismengruppe von V (= $GL(V)/Z(K)$)
$Z(K)$	Zentrum von $GL(K)$
$B(K)$	Borel Gruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \mid a, b, d \in K \right\}$ von G (Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen)
$C(K)$	Cartan Gruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \mid a, d \in K \right\}$ von G
w	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Π	$\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
P	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$
G_x	Stabilisator/ Fixgruppe des Elements x unter G
\mathfrak{I}	Iwahori Gruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \mid a, b, c, d \in \mathcal{O} \text{ und } c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$
\mathfrak{I}_n	verallgemeinerte Iwahori Gruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \mid a, b, c, d \in \mathcal{O} \text{ und } c \equiv 0 \pmod{\pi^n} \right\}$
\mathfrak{N}	Normalisator $\mathfrak{I}Z(K) \dot{\cup} \mathfrak{I}Z(K)w\Pi$ der Iwahori Gruppe \mathfrak{I} in G
L_0	Basisgitter $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$
v_0	Basisknoten $[L_0] \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$
L_n	$\mathcal{O} \times \pi^n \mathcal{O}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
v_n	$[L_n]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
\vec{e}_0	orientierte Basiskante $(v_0, v_1) \in \mathcal{E}^\pm$
e_0	nicht-orientierte Basiskante $\{v_0, v_1\} \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$
\vec{p}_n	Basisweg $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ mit orientierten Kanten der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit den Knoten $v_i, 0 \leq i \leq n$
\vec{p}_∞	Basishalbgerade $(v_n)_{n \geq 0} = (v_0, v_1, \dots)$
s	Basisende (Klasse von \vec{p}_∞)
$s_1 s_2$	Basisgerade $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots)$

Kapitel 6:	Der Bruhat-Tits Baum \mathcal{T} über dem Körper der Laurent-Reihen
$K = \mathbb{F}_q(T)$	der Körper der rationalen Funktionen über \mathbb{F}_q
$K_\infty = \mathbb{F}_q((\pi))$	Komplettierung von K an der Stelle ∞ (Körper der Laurent-Reihen in $\pi = T^{-1}$)
T	Unbestimmte
$\pi = T^{-1}$	Uniformisierende von K_∞
v_∞	diskrete Bewertung des Körpers K_∞
$\mathcal{O}_\infty = \mathbb{F}_q[[\pi]]$	Ring der ∞ -adischen ganzen Zahlen (Ring der Potenzreihen in π)
$A = \mathbb{F}_q[T]$	Polynomring in der Unbestimmten T
$\deg f$	Grad des Polynoms $f \in A$
$\mathfrak{K} = GL(K_\infty)$	Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen über \mathcal{O}_∞
\mathfrak{I}	Iwahori Gruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{K} \mid a, b, c, d \in \mathcal{O}_\infty, c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$
\mathfrak{N}	Normalisator der Iwahori Gruppe \mathfrak{I} in $GL(K_\infty)$
$Z(K_\infty)$	Zentrum der Gruppe $GL(K_\infty)$
$B(K_\infty)$	Borel Gruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL(K_\infty) \mid a, b, d \in K_\infty \right\}$ von $GL(K_\infty)$
$\Gamma = GL(A)$	Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen in A
$\Gamma_\infty = \Gamma \cap B(K_\infty)$	Gruppe der invertierbaren oberen 2×2 Matrizen über A
$S_{\mathcal{V}(\mathcal{T})}$	Repräsentantensystem der Knoten von \mathcal{T}
$S_{\mathcal{E}(\mathcal{T})}$	Repräsentantensystem der Kanten von \mathcal{T}
S_U	Repräsentantensystem für $\mathfrak{K}/\mathfrak{I}$
$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{T})$	orientierte Kantenmenge des Bruhat-Tis Baums \mathcal{T}
v_n	$[\mathcal{O}_\infty \times \pi^n \mathcal{O}_\infty]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
$\mathcal{A}(0, \infty)$	Hauptachse $\left\{ \vec{e}_i \mid i \in \mathbb{Z} \right\}$
κ	Funktion auf der Kantemenge $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ (und wie bisher $\kappa = \mathcal{O}_\infty / \pi \mathcal{O}_\infty$)
τ	Funktion auf der Kantemenge $\mathcal{E}(\mathcal{T})$
α	Funktion auf der Kantemenge $\mathcal{E}(\mathcal{T})$
$\text{sgn}(e)$	Signum einer Kante $e \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$; gibt an, ob eine Kante positiv oder negativ orientiert ist

Kapitel 7: Der Algorithmus

In Kapitel 7 werden keine neuen Symbole eingeführt.

Index

- äquivalent, 35
- Abstand, 16, 29
- Abstandsfunktion, 16
- adjazent, 11, 31
- assoziierter ungerichteter Graph, 11
- Bahn, 54
- Basisende, 54
- Basisgerade, 54
- Basisgitter, 54
- Basishalbgerade, 54
- Basiskante, 54
- Basisknoten, 54
- Basisweg, 54
- Baum, 17
- benachbart, 11, 31
- Betragsbewertung, 40
- Borel Untergruppe, 66
- Bruhat-Tits Baum, 32
 - Ende, 46
 - Gerade, 50
 - Halbgerade, 45
 - Kanten, 32
 - gerichtet, 32
 - nicht-orientiert, 32
 - orientiert, 32
 - ungerichtet, 32
 - Knoten
 - adjazent, 31
 - benachbart, 31
 - Knotenmenge, 26
 - Kreis mit Radius 1, 43
 - Kreis mit Radius n , 44
- Rand, 47
- Cartan Untergruppe, 66
- Diagramm, 13
- einfach, 35
- Ende, 46
- Extremitäten, 11
- Faktor, 34
- Fixgruppe, 54
- Geodäte, 14
- Gerade, 50
- gerichtet, 10, 32
- Gitter, 26
- Gitterklasse, 26
 - Abstand, 29
 - Dreiecksungleichung, 31
- Graph
 - Abstand, 16
 - Abstandsfunktion, 16
 - assoziert ungerichtet, 11
 - Fundamentalebene, 87
 - gerichtet, 10
 - isomorph, 12
 - kombinatorisch, 15
 - nicht-orientiert, 11
 - orientiert, 10
 - Orientierung, 12
 - ungerichtet, 11
 - zusammenhängend, 15
- Halbgerade, 45

Hauptachse, 77
 positiv, 77
 homogene Koordinaten, 20

 inverse Kante, 11
 irreduzibel, 35
 isomorph, 12
 Iwahori Untergruppe, 60

 Jordan-Hölder Reihe, 35

 kanonischer projektiver Raum, 20
 Kante, 10, 32
 Extremitäten, 11
 inverse, 11
 negativ, 75
 positiv, 75
 Signum, 75
 Terminus, 11
 Ursprung, 11
 Knoten, 10
 adjazent, 11
 benachbart, 11
 Knotenmenge, 26
 kombinatorischer Graph, 15
 Kompletierung, 40
 Kompositionsreihe, 33
 äquivalent, 35
 Faktor, 34
 Kreis, 15, 43, 44

 Länge, 34
 lokaler Körper, 40

 Metrik, 16, 39
 metrischer Raum, 16

 negativ, 75
 nicht-orientiert, 11, 32

 Operation, 53
 Orbit, 54
 orientiert, 32

 orientierter Graph, 10
 Orientierung, 12

 Pfad, 14
 reduziert, 15
 positiv, 75
 positive Hauptachse, 77
 projektive Dimension, 20
 projektive lineare Automorphismen-
 gruppe, 56
 projektiver Raum, 19
 homogene Koordinaten, 20
 kanonischer, 20
 Punkt, 19
 Punkt, 19

 Rand, 47
 reduziert, 15

 Stabilisator, 54

 Terminus, 11
 transitiv, 54

 ungerichtet, 11, 32
 Ursprung, 11

 verallgemeinerte Iwahori Untergruppe,
 64
 Verfeinerung, 34
 vollständig, 40

 Weg, 14

 Zurückgehen, 14
 zusammenhängender Graph, 15
 zusammenhangender Graph, 15
 Zykel, 15

Literaturverzeichnis

- [Aig04] Martin Aigner. *Diskrete Mathematik*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course]. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, fifth edition, 2004.
- [Fis79] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*, volume 35 of *Grundkurs Mathematik [Foundational Course in Mathematics]*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, second edition, 1979.
- [Gek] Ernst-Ulrich Gekeler. Bruhat-Tits Tree. *Encyclopedia of Mathematics*. Erscheint.
- [Gek95] Ernst-Ulrich Gekeler. Improper Eisenstein series on Bruhat-Tits trees. *Manuscripta Math.*, 86(3):367–391, 1995.
- [Heu91] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, ninth edition, 1991.
- [Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.
- [Neu07] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer, 2007.
- [Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer-Verlag, Berlin, 1980. Translated from the French by John Stillwell.
- [Sol77] Alexandru Solian. *Theory of modules (an introduction to the theory of module categories)*. Editura Academiei, Bucharest, 1977. Translated from the Romanian by Mioara Buiculescu.
- [Wei70] André Weil. On the analogue of the modular group in characteristic p . In *Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968)*, pages 211–223. Springer, New York, 1970.