Zur Arithmetik von Kettenbrüchen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des Grades
des Bachelor of Science

vorgelegt
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von

Philipp Stopp

angefertigt
am Lehrstuhl von Herrn Prof. Dr. E.-U. Gekeler

unter Betreuung von
Herrn Dipl.-Math. J. Lengler

Saarbücken
September 2009

Ich erkläre hiermit an Eides statt, diese Arbeit selbstständig geschrieben und keine Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Die bereits von vielen bedeutenden Mathematikern auf verschiedenste Eigenschaften hin untersuchte Kreiszahl $\pi \approx 3,1415926536$ lässt sich auch in der Form

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{291 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

schreiben, wobei sich dieser Ausdruck noch unendlich weit fortsetzt. Diese, zunächst sehr willkürlich wirkende Darstellung von π enthält bemerkenswerte Informationen über die Arithmetik der Kreiszahl, welche man etwa aus der Dezimalbruchentwicklung nicht ablesen kann.

Die entsprechenden Untersuchungen werden in allgemeinerem Rahmen in der vorliegenden Bachelorarbeit durchgeführt, welche sich mit den grundlegenden Eigenschaften von Ausdrücken der Gestalt

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}$ und $b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, beschäftigt. Diese Darstellungen fasst man unter dem Begriff *regelmäßige Kettenbrüche* zusammen, wobei sich relativ schnell herausstellen wird, dass jede reelle Zahl in eindeutiger Weise in einer solchen Form dargestellt werden kann.

Der Ursprung der Kettenbruchtheorie wird in den meisten Quellen dem italienischen Mathematiker Rafael Bombelli (1526-1572) zugeschrieben. Wie unter anderem in [BAU3] erwähnt wird, beschäftigte sich dieser in seinen *L'Algebra Opera* von 1572 damit, Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen mittels unendlicher Kettenbrüche zu bestimmen. Der eigentliche Beginn der systematischen Erforschung der Eigenschaften von Kettenbrüchen ist dem niederländischen Astronom, Mathematiker und Physiker Christiaan Huygens (1629-1695) zu verdanken. Laut [LUE, XV, §6] stand dieser bei der Konstruktion eines Modells unseres Sonnensystems vor technischen Problemen, zu deren Lösung er eine Theorie entwickelte, welche eine der wesentlichen Grundlagen zur Erforschung der Kettenbrüche legte. Die entsprechenden

Ergebnisse wurden in seiner Arbeit *descriptio automati planetarii* veröfffentlicht, welche 1703 posthum erschien.

Huygens war bei weitem nicht der Einzige, der sich mit Kettenbrüchen beschäftigte: Erste Versuche unternahmen außerdem Piedro Cataldi (1548-1626), Daniel Schwenter (1585-1636) und John Wallis (1616-1703), wobei sich auch viele weitere namhafte Mathematiker wie zum Beispiel William Brouncker (1620-1684), Leonhard Euler (1707-1783), Johann Heinrich Lambert (1728-1777) und Joseph Louis Lagrange (1736-1813) im Laufe der Zeit mit dieser Thematik beschäftigten, und dabei auf wichtige Ergebnisse stießen.

Eine erste vollständige Abhandlung über die Theorie der Kettenbrüche, in der diese Aussagen zusammengefasst und ergänzt wurden, lieferte der deutsche Mathematiker Oskar Perron (1880-1975) mit seiner Arbeit *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, welche bis heute als das Standwerk zu diesem Thema gilt. Deren zweite Auflage von 1929 liegt auch dieser Bachelorarbeit zugrunde. Vorrangig in der englischsprachigen Literatur sind im Laufe der Zeit weitere verschiedene Einführungen zur Kettenbruchtheorie erschienen. Auch die meisten Lehrbücher zur Zahlentheorie enthalten einen Abschnitt zur Thematik der Kettenbrüche. Allerdings werden meist nur die notwendigsten Begriffe und Eigenschaften eingeführt, sodasss man, um einen vollständigen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse zu erhalten, gezwungen ist, sich durch verschiedene Werke mit stark unterschiedlichen Notationen zu arbeiten.

Der Anspruch der vorliegenden Arbeit liegt deshalb darin, eine möglichst geschlossene und übersichtlich dargestellte Einführung in die Arithmetik der Kettenbrüche zu geben. Dabei erschien es sinnvoll, bei einigen Problemstellungen noch einen Augenblick innezuhalten, und dem geneigten Leser in Form von tiefergehenden Überlegungen oder ausführlichen Beispielen einen Einblick in weitere interessante Ergebnisse der Kettenbruchtheorie zu geben. Diese Abschnitte, deren Argumente für das weitere Verständnis nicht zwingend notwendig sind, aber dennoch eine nicht unerhebliche Rolle in der Theorie der Kettenbrüche spielen, können beim ersten Lesen ausgelassen werden. Dabei handelt es sich meist um den letzten Kapitelteil, worauf an entsprechender Stelle nochmals hingewiesen wird.

Als Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit wird im sechsten Kapitel eine sehr elegante Strategie zur Bestimmung der sogenannten Grundeinheit eines reellquadratischen Zahlkörpers präsentiert. Dieses Resultat ist fast vollständig der von uns bis zu diesem Zeitpunkt entwickelten Kettenbruchtheorie zu verdanken, denn es ist bislang kein anderer Weg bekannt, der eine vergleichsweise ähnlich einfache konstruktive Herangehensweise zur Berechnung der Grundeinheit liefert.

Von diesen Zielsetzungen ausgehend, wurde die folgende Vorgehensweise zur systematischen Untersuchung der regelmäßigen Kettenbrüche gewählt:

Im ersten Kapitel steht zunächst die Einführung eines möglichst kompakten aber vollständigen Begriffapparats im Vordergrund. Ausgehend davon werden wir zunächst die wichtigsten Zusammenhänge zwischen den einzelnen Komponenten eines Kettenbruchs - die Teilnenner; die Näherungsbrüche, welche sich bei einem vorzeitigen Abbruch der Kettenbruchentwicklungen ergeben, und die dabei verbleibenden Restzahlen - herleiten, bevor wir in den letzten beiden Abschnitten die Menge aller Zahlen mit endlicher bzw. unendlicher Kettenbruchentwicklung klassifizieren. Dabei sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es unabdingbar für das Verständnis der vorliegenden Arbeit ist, die Bezeichnungen und Ergebnisse des ersten Kapitels verinnerlicht zu haben.

Im zweiten Kapitel, welches weitgehend unabhängig von den restlichen Überlegungen dieser Arbeit steht, begeben wir uns zu den Ursprüngen der Kettenbruchtheorie. Auf Christiaan Huygens, von dem bereits die Rede war, geht das sogenannte Gesetz der besten Näherung zurück. Grob gesprochen geht es um die Lösung des Problems, zu einer reellen Zahl einen Bruch mit möglichst kleinem Nenner zu finden, sodass es keinen Bruch mit kleinerem Nenner gibt, der „näher“ bei dieser liegt. Um diesen Begriff der „Nähe“ zu präzisieren, führen wir zu Anfang des Kapitels zwei geeignete Bedingungen ein, wobei wir die Zahlen, welche ihnen genügen, als beste Approximationen erster bzw. zweiter Art bezeichnen. Nachdem uns im folgenden Teil das sogenannte Näherungsgesetz eine erste Aussage über die Güte der Approximation einer Zahl durch ihre Näherungsbrüche liefert, stellen wir im dritten Abschnitt den Zusammenhang zwischen der Kettenbruchtheorie und den Bestapproximationen her. Wir weisen nach, dass die Näherungsbrüche dem stärkeren der beiden Kriterien genügen, und Bestapproximationen zweiter Art sind. Nachfolgend vertiefen wir die Thematik der Approximation reeller Zahlen durch rationale: Zum einen betrachten wir nochmals die Bestaproximationen erster Art, da es sich hierbei um die natürlichere Definition handelt; und zweitens studieren wir noch Verschärfungen des Näherungsgesetzes.

Von den Ergebnissen des zweiten Kapitels werden wir im Laufe unserer Untersuchungen noch häufiger Gebrauch machen. Allerdings beschäftigen wir uns im Anschluss daran mit einer davon weitgehend unabhängigen Thematik: Ziel ist die vollständige Klassifizierung derjenigen reellen Zahlen, welche eine sogenannte periodische Kettenbruchentwicklung besitzen. Diese Form der Kettenbrüche, bei denen sich die Teilnenner ab einem gewissen Index regelmäßig wiederholen, führen wir im ersten Teil des dritten Kapitels ein, bevor wir dann im zweiten Abschnitt die Menge der Zahlen mit einer solchen Kettenbruchentwicklung bestimmen. Danach sammeln wir noch einige Aussagen zur Periode: Im dritten Abschnitt bestimmen und untersuchen wir Zahlen, deren Kettenbruchentwicklung bereits ab dem ersten Glied periodisch ist, während wir im vierten Teil Paare von Kettenbruchentwicklungen mit zueinander inversen Perioden betrachten, woran sich die Untersuchung von Kettenbrüchen mit symmetrischer Periode anschließt.

Nachdem wir abschließend ein erstes Resümee bezüglich der bis zu diesem Zeitpunkt durchgeführten Überlegungen ziehen, wenden wir im vierten Kapitel die Ergebnisse der Untersuchungen der periodischen Kettenbrüche auf die Bestimmung der Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl an. Diese besitzt eine Periode von einer sehr speziellen Form. Noch genauere Aussagen findet man für die Kettenbruchentwicklungen von Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen, welche wir im zweiten Abschnitt untersuchen. Hier erhalten wir obere und untere Abschätzungen für die Nenner und Zähler der Restzahlen, sowie Kriterien für die Periodenlänge. Im letzten Abschnitt sehen wir uns ergänzend einige Beispiele dazu an, wie man aus einer gegebenen Kettenbruchentwicklung, welche die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl darstellt, diese Zahl ableiten kann.

Die Kettenbruchentwicklungen der Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen spielen die entscheidende Rolle bei der Bestimmung der ganzzahligen Lösungspaare der sogenannten Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$, welche wir im fünften Kapitel ausführlich untersuchen. Nachdem wir uns kurz mit deren trivialen Lösungen beschäftigt haben, beweisen wir im zweiten Abschnitt die Existenz einer sogenannten Fundamentallösung, aus der sich alle weiteren Lösungen berechnen lassen. Da die Pellsche Gleichung im Zusammenhang mit unterschiedlichen Problemstellungen eine wichtige Rolle spielt, betrachten wir im ergänzenden dritten Abschnitt einige Beispiele hierzu.

Im sechsten Kapitel befassen wir uns mit einer Thematik, die auf den ersten Blick nichts mit der Kettenbruchtheorie gemein zu haben scheint: Die Untersuchung reellquadratischer Zahlkörper. Nachdem wir im ersten Abschnitt die Grundlagen zu diesem Themenkreis, mit welchem der Leser eventuell noch nicht vertraut ist, eingeführt haben, stellen wir im zweiten Abschnitt die Verbindung zur Kettenbruchtheorie her: Die Einheitengruppe derjenigen Zahlen eines reellquadratischen Körpers, welche zusätzlich noch Nullstellen eines ganzzahligen Polynoms sind, lässt sich aus den Lösungen einer Pellschen Gleichung und ähnlichen ableiten, mit denen wir uns schon im vorangegangenen Kapitel auseinandergesetzt hatten. Daraus resultiert die Gestalt dieser Gruppe, zu deren Bestimmung es genügt, die sogenannte Grundeinheit anzugeben. Eine einfach durchzuführende Strategie zu deren Bestimmung werden wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels herleiten. Dieses Ergebnis stellt den Höhepunkt unserer Untersuchung der regelmäßigen Kettenbrüche dar.

Allerdings haben wir an dieser Stelle bei weitem noch nicht alle Möglichkeiten ausgeschöpft, die sich beim Arbeiten mit Kettenbrüchen ergeben, weshalb wir im letzten Kapitel nochmals die eulersche Zahl e und die Kreiszahl π betrachten. Anhand der bislang bekannten Eigenschaften von deren Kettenbruchentwicklungen kann man eine schöne Auswahl an Vorschlägen für weitere Denkansätze geben. Die Anführung dieser zum Teil noch offenen, weiterführenden Fragestellungen bildet den Abschluss unserer Untersuchungen zur grundlegenden Arithmetik von Kettenbrüchen.

Literatur. Wie schon erwähnt, gibt es zur Theorie der Kettenbrüche vielfältige Veröffentlichungen, auf die auch beim Schreiben dieser Arbeit zurückgegriffen wurde. Zu den wichtigsten Sätzen habe ich jeweils am Ende des Beweises ein Zitat dafür angegeben, wo dieser mit einer ähnlichen Strategie geführt wird. Allerdings sind viele Aussagen mittlerweile „Standard“ und wurden auf vielfältige Art bewiesen, sodass ich sie auch als solche angebe. Für diese und alle anderen Aussagen ohne Quellenangabe habe ich entweder keinen Urheber ausmachen können, oder selbst einen neuen Beweis gegeben. Bei denen, die ich damit übergangen habe, entschuldige ich mich. Neben dem Standardwerk von Oskar Perron [PER] bildeten auch die Bücher von C. D. Olds [OLD] und A. Y. Khinchin [KHI] die Grundlage zur Anfertigung dieser Arbeit. Weiterhin sind die Abschnitte in den Lehrbüchern von G. H. Hardy und E. M. Wright [HAWR, X/XI], D. M. Burton und H. Dalkowski [BUDA, 14] bzw. H. Koch [KOC, 9], und das Werk von A. M. Rockett und P. Szüsz [ROSZ] als zusätzliche Literatur zu empfehlen.

Notationen. Neben den grundlegenden Konventionen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\ \text{und} \quad \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, \ldots\}\,, \end{aligned}$$

bezeichnen wir wie allgemein üblich mit dem Symbol $\mathbb{Q}$ den Körper der rationalen und mit $\mathbb{R}$ den Körper der reellen Zahlen. Weitere Notation werden an der entsprechenden Stelle erläutert und sind auch im Symbolverzeichnis aufgeführt. Die im Stichwortverzeichnis aufgeführten Begriffe sind bei ihrem erstmaligen Erscheinen im Text hervorgehoben.

Dank. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mich in der Vorbereitung und während dem Schreiben dieser Bachelorarbeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Dipl.-Math. Johannes Lengler für das interessante Thema, seine stete Hilfe sowie die wertvollen Anregungen und Ideen. Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für den notwendigen Rückhalt und ihre Unterstützung. Besonders danke ich dabei meiner Mutter, die viel Zeit investiert hat, um diese Arbeit Korrektur zu lesen.

KAPITEL 1

Regelmäßige Kettenbrüche

Gegenstand der Untersuchungen der vorliegenden Bachelorarbeit sind die sogenannten *regelmäßigen Kettenbrüche*. Manche Autoren verwenden auch die Begriffe „reguläre“ und „einfache“ Kettenbrüche; in der englischsprachigen Literatur lauten die entsprechenden Ausdrücke „regular“ bzw. „simple continued fractions“. Dieses einführende Kapitel stellt die grundlegendsten Definitionen und die von uns verwendeten Notationen vor. Weiterhin werden die sich daraus ergebenden fundamentalen Eigenschaften der Bestandteile eines regelmäßigen Kettenbruchs erarbeitet. Speziell auf diese Ergebnisse werden wir noch sehr häufig zurückgreifen.

Die besondere Form der regelmäßigen Kettenbrüche führen wir im ersten Abschnitt detailliert ein; es folgen erste Eigenschaften. Zentrales Problem im Rest des Kapitels sind die Fragen, für welche Zahlen die Kettenbruchentwicklung „abbricht“ und wie man diese im konkreten Fall bestimmen kann. Wir wenden uns im dritten und vierten Teil des Kapitels diesen Fragestellungen zu, nachdem wir im zweiten Abschnitt die grundlegendsten Eigenschaften der sogenannten Näherungsnenner und -zähler erarbeitet haben.

1.1. Definition

Um eine möglichst geschlossene Darstellung unserer Theorie zu erreichen, führen wir zunächst die wichtigsten Definitionen und Sprechweisen ein. Wie wir sehen werden, bauen alle weiteren Überlegungen zur Untersuchung der Eigenschaften von regelmäßigen Kettenbrüchen auf diesen grundlegenden Begriffen auf.

1.1.1. Definition. *Ein* regelmäßiger Kettenbruch *ist von der Form*

$$x = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \tag{1.1.1}$$

wobei b_0 eine ganze Zahl ist und $b_1, b_2 \ldots$ natürliche Zahlen sind.

Die b_i heißen die Teilnenner *von x.*

Weiterhin nennen wir einen regelmäßigen Kettenbruch endlich, *wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $i > n$ schon $b_i = 0$ gilt. Diese Kettenbrüche haben die Form*

$$x = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_n}}}},$$

das heißt, sie sind $(n+1)$-gliedrig.

Als abkürzende Schreibweise für unendliche regelmäßige Kettenbrüche verwenden wir die folgende Darstellung:

$$x = [b_0, b_1, b_2, \ldots] .$$

Im Fall eines endlichen regelmäßigen Kettenbruchs schreiben wir also

$$x = [b_0, b_1, \ldots, b_n] .$$

Folglich hat man in beiden Fällen $x = [b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}, \beta_i]$, mit

$$\beta_i = b_i + \cfrac{1}{b_{i+1} + \cfrac{1}{\ddots}} > 1 , \tag{1.1.2}$$

und nennt β_i die Restzahlen *oder* vollständige Koeffizienten. *Aufgrund der Tatsache, dass diese Restzahlen im allgemeinen Fall keine natürlichen Zahlen sind, wollen wir gegebenenfalls in unserer Kurzschreibweise als letzten Eintrag eine positive reelle Zahl echt größer als 1 zulassen.*

Da ein endlicher regelmäßiger Kettenbruch als Quotient zweier ganzer Zahlen geschrieben werden kann, setzen wir

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_i] =: \frac{A_i}{B_i} ,$$

wobei die Darstellung unter der Annahme, dass A_i und B_i teilerfremd sind, eindeutig ist. Man nennt $\frac{A_i}{B_i}$ den Näherungsbruch *oder die* Konvergente i-ter Ordnung. *Entsprechend führen wir für die Bestandteile dieser Zahlen dazu analoge Bezeichnungen ein: A_i heißt der* Näherungszähler *und B_i der* Näherungsnenner i-ter Ordnung.

Bemerkung. Mit dem Begriff *Kettenbruch* bezeichnet man allgemein Ausdrücke der Form

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}},$$

wobei die a_i und b_i beliebige reelle oder komplexe Zahlen sind, und auch hier sowohl endlich als auch unendlich viele Terme zugelassen werden. Wir untersuchen also den Spezialfall, dass die sogenannten *Teilzähler* a_i alle gleich 1 und die Teilnenner b_i, mit Ausnahme von b_0, welches als ganzzahlig vorausgesetzt wurde, natürliche Zahlen sind. Die für diesen Fall eingeführten Bezeichnungen lassen sich ohne Einschränkungen auf allgemeine Kettenbrüche übertragen. Ebenso gibt es zu den Sätzen in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels entsprechende Aussagen für nicht-regelmäßige Kettenbrüche (vgl. dazu [PER, I]).

Um die Sprechweise zu vereinfachen, reden wir im Folgenden nur noch von einem „Kettenbruch“ und meinen damit stets einen regelmäßigen Kettenbruch, da wir uns ausschießlich mit diesen beschäftigen.

Wie schon angedeutet findet man in der Literatur für diese Kettenbrüche zahlreiche mehr oder weniger suggestive Darstellungen. Unter anderem sind folgende Schreibweisen geläufig:

- $x = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \dots,$
- $x = b_0 \dot{+} \frac{1}{b_1} \dot{+} \frac{1}{b_2} \dot{+} \dots,$
- $x = b_0 + \frac{1}{b_1 +} \frac{1}{b_2 +} \dots .$

Eine weitere Variante, bei der alle Teilzähler, außer eventuell b_0, ein negatives Vorzeichen haben, findet man zum Beispiel bei [ZAG, II, §13]:

- $x = b_0 - \frac{1|}{|b_1} - \frac{1|}{|b_2} - \frac{1|}{|b_3} - \dots .$

Diese Darstellung bringt allerdings einige Nachteile mit sich. So ist es zum Beispiel nicht offensichtlich, dass dann gilt: Eine Zahl ist genau dann rational, wenn ab einem gewissen Index alle Teilnenner gleich 2 sind (vgl. [ZAG, II, §13]). Für die von uns betrachteten Kettenbrüche werden wir in Abschnitt 1.3 ein sehr viel einfacheres Kriterium bezüglich der Rationalität einer Zahl angeben. Diese beiden verschiedenen Typen von Kettenbrüchen hängen aber dennoch miteinander zusammen: Die Umrechnung geschieht mit der Formel

$$[b_0, b_1, \dots, b_n] = (b_0+1) \underbrace{- \frac{1\,|}{|\,2} - \dots - \frac{1\,|}{|\,2}}_{b_1 - 1} - \frac{1\,|}{|\,b_2+2} \underbrace{- \frac{1\,|}{|\,2} - \dots - \frac{1\,|}{|\,2}}_{b_3 - 1} - \frac{1\,|}{|\,b_4+2} - \dots,$$

welche ebenfalls bei [ZAG, II, §13, Aufg.3] erwähnt wird.

Ausgehend von den wenigen bislang eingeführten Begriffen lässt sich nun eine sehr interessante Theorie entwickeln. Als erster Schritt bietet sich ein genauerer Blick auf die Näherungsbrüche an.

1.2. Näherungsbrüche

Neben den Teilnennern sind die Näherungsnenner bzw. -zähler die wichtigsten Invarianten einer Kettenbruchentwicklung. Vorrangig ist die Frage, wie man diese bestimmen kann.

Dazu führen wir zunächst zwei Rekursionsformeln ein, die sich alsbald als die richtigen herausstellen werden. Wir setzen:

$$\widetilde{A}_0 = b_0, \quad \widetilde{A}_i = b_i \widetilde{A}_{i-1} + \widetilde{A}_{i-2}, \qquad i \geq 1,$$
$$\widetilde{B}_0 = 1, \quad \widetilde{B}_i = b_i \widetilde{B}_{i-1} + \widetilde{B}_{i-2}, \qquad i \geq 1,$$

wobei wir aufgrund der Vorläufigkeit dieser Aussage die entsprechenden Ausdrücke mit $\widetilde{A}_i$ bzw. $\widetilde{B}_i$ bezeichnet haben.

Bevor wir zeigen, dass diese Formeln in der Tat die gesuchten sind, betrachten wir ein daraus resultierendes Verfahren zur Berechnung der Näherungsnenner und -zähler. Es gilt:

$$\widetilde{A}_0 = b_0 \qquad\qquad \widetilde{B}_0 = 1$$
$$\widetilde{A}_1 = b_1 b_0 + 1 \qquad\qquad \widetilde{B}_1 = b_1$$

$$\widetilde{A}_2 = b_2b_1b_0 + b_2 + b_0 \qquad \widetilde{B}_2 = b_2b_1 + 1$$
$$\widetilde{A}_3 = b_3b_2b_1b_0 + b_3b_2 + b_3b_0 + b_1b_0 + 1 \qquad \widetilde{B}_3 = b_3b_2b_1 + b_3 + b_1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Dies lässt sich auch durch die folgende *Matrizenschreibweise* ausdrücken:

$$P_0 := \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{-1} & \widetilde{A}_{-2} \\ \widetilde{B}_{-1} & \widetilde{B}_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_i := \begin{pmatrix} \widetilde{A}_i & \widetilde{A}_{i-1} \\ \widetilde{B}_i & \widetilde{B}_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{i-1} & \widetilde{A}_{i-2} \\ \widetilde{B}_{i-1} & \widetilde{B}_{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rekursives Einsetzen ergibt:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}_i & \widetilde{A}_{i-1} \\ \widetilde{B}_i & \widetilde{B}_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} b_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Überlegungen resultiert eine Aussage, von deren letztem Teil wir noch sehr oft Gebrauch machen werden:

1.2.1. Lemma. *Wegen det* $\begin{pmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$*, unabhängig von* b_i*, gilt*

$$det(P_i) = (-1)^i\,,$$

und damit auch für alle i:

$$\widetilde{A}_i\widetilde{B}_{i-1} - \widetilde{B}_i\widetilde{A}_{i-1} = (-1)^i\,.$$

Zunächst können wir daraus unmittelbar die Teilerfremdheit der Näherungsnenner und -zähler folgern:

1.2.2. Korollar. *Es gilt für alle i:*

$$\mathrm{ggT}(\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i) = \mathrm{ggT}(\widetilde{A}_{i-1}, \widetilde{A}_i) = \mathrm{ggT}(\widetilde{B}_{i-1}, \widetilde{B}_i) = 1\,,$$

wobei „ggT“ den größten gemeinsamen Teiler des jeweiligen Zahlenpaares bezeichnet.

Beweis. Wegen dem vorangehenden Lemma müssen gemeinsame Teiler von $\widetilde{A}_i$ und $\widetilde{B}_i$ auch $(-1)^i$ teilen. Also: $\mathrm{ggT}(\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i) = 1$.
Für die anderen Zahlenpaare argumentiert man analog. □

Mit dieser Vorarbeit können wir nun die bereits betrachteten Ausdrücke als Rekursionsformeln für die Näherungsnenner und -zähler etablieren.

1.2.3. Lemma. *Die Näherungsnenner und -zähler sind durch folgende Rekursionsformeln bestimmt:*

$$A_{-1} := 1, \quad A_0 = b_0, \quad A_i = b_iA_{i-1} + A_{i-2}, \quad i \geq 1, \tag{1.2.1}$$
$$B_{-1} := 0, \quad B_0 = 1, \quad B_i = b_iB_{i-1} + B_{i-2}, \quad i \geq 1. \tag{1.2.2}$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach i.

Im Fall $i = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Für $i = 1$ gilt:

$$b_0 + \frac{1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + 1}{b_1} = \frac{b_1 A_0 + A_{-1}}{b_1 B_0 + B_{-1}}\,.$$

Sei nun die Behauptung für ein i gezeigt, sodass sich die Näherungsnenner und -zähler mit kleinerem Index mittels der Rekursionsformeln berechnen lassen.

Induktionsschluss: $i \to i+1$. Es gilt:

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{b_i A_{i-1} + A_{i-2}}{b_i B_{i-1} + B_{i-2}}\,.$$

Um $\frac{A_{i+1}}{B_{i+1}}$ zu erhalten, muss man nur b_i durch $b_i + \frac{1}{b_{i+1}}$ ersetzen, da die vorkommenden Näherungsnenner und -zähler nicht von b_i abhängen. Also gilt

$$\begin{aligned}
\frac{A_{i+1}}{B_{i+1}} &= \frac{(b_i + \frac{1}{b_{i+1}})A_{i-1} + A_{i-2}}{(b_i + \frac{1}{b_{i+1}})B_{i-1} + B_{i-2}} \\
&= \frac{b_{i+1}(b_i A_{i-1} + A_{i-2}) + A_{i-1}}{b_{i+1}(b_i B_{i-1} + B_{i-2}) + B_{i-1}} \\
&= \frac{b_{i+1} A_i + A_{i-1}}{b_{i+1} B_i + B_{i-1}}\,,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung benutzt wurde. Identifiziert man nun den Zähler mit A_{i+1} und den Nenner mit B_{i+1}, so folgt aufgrund der bereits bewiesenen Teilerfremdheit des Nenners und Zählers die Behauptung. □

Im Hinblick auf spätere Rechnungen wählen wir weiterhin noch formal:

$$A_{-2} := 0, \qquad B_{-2} := 1\,.$$

Die bereits bewiesenen Eigenschaften, die sich aus den Rekursionsformeln für die Näherungsnenner- und zähler ergeben, stellen wir nochmals in einem Lemma zusammen:

1.2.4. Lemma. *Es gilt jeweils für alle i:*

(i) $A_i B_{i-1} - B_i A_{i-1} = (-1)^i\,.$

(ii) $\mathrm{ggT}(A_i, B_i) = \mathrm{ggT}(A_{i-1}, A_i) = \mathrm{ggT}(B_{i-1}, B_i) = 1\,.$

(iii) $\begin{pmatrix} A_i & A_{i-1} \\ B_i & B_{i-1} \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} b_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Ein erstes Beispiel zeigt, wie man im konkreten Fall bereits mit den bisherigen Ergebnissen arbeiten kann:

1.2.5. Beispiel. Betrachte die Kettenbruchentwicklung $\frac{3141}{2718} = [1, 6, 2, 2, 1, 6]$. Wie man diese erhält, sehen wir im nächsten Abschnitt; vergleiche dazu Beispiel 1.3.3.

- Die Näherungsbrüche lassen sich leicht mit der folgenden Tafel bestimmen. Dabei werden sie automatisch als vollständig gekürzte Brüche erzeugt, was uns zeigt, dass 3141 und 2718 nicht teilerfremd sind:

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
b_i		1	6	2	2	1	6	
A_{i-1}	0	1	1	7	15	37	52	349
B_{i-1}	1	0	1	6	13	32	45	302

Man benutzt dafür die Rekursionsformeln wie folgt: Der Eintrag für A_{i-1} ergibt sich durch Multiplikation des vorangehenden Eintrags derselben Zeile mit dem darüberstehenden Wert und anschließender Addition der zwei Spalten links von A_{i-1} stehenden Zahl. Analoges überlegt man sich leicht für B_{i-1}.

- Alternativ kann man die Näherungsnenner und -zähler auch mit der Matrizenschreibweise berechnen:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_0 & A_{-1} \\ B_0 & B_{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ B_1 & B_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} A_2 & A_1 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} A_3 & A_2 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 37 & 15 \\ 32 & 13 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} A_4 & A_3 \\ B_4 & B_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 37 & 15 \\ 32 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 52 & 37 \\ 45 & 32 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} A_5 & A_4 \\ B_5 & B_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 52 & 37 \\ 45 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 349 & 52 \\ 302 & 45 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Als weitere unmittelbare Folgerungen aus den Rekursionsformeln können wir zunächst einige Beobachtungen festhalten.

1.2.6. Bemerkung. Da die Restzahlen b_i für alle $i > 0$ per Definition größer oder gleich 1 sind, folgt schon $0 < B_0 < B_1 < B_2 < \ldots$ und, falls $b_0 \geq 0$ ist, auch $0 \leq A_0 < A_1 < A_2 < \ldots$. Die Folgen der Nährungsnenner und -zähler sind insbesondere, wie man leicht sieht, in jedem Fall streng monoton wachsend.

Weiter kann man mit Hilfe der Rekursionsformeln aus Lemma 1.2.3 direkt eine untere Schranke für die Näherungsnenner angeben, die allerdings nur selten eine gute Abschätzung liefert. Es gilt:

$$B_i = b_i B_{i-1} + B_{i-2} \geq B_{i-1} + B_{i-2} \geq 2B_{i-2}\,.$$

Nach $\frac{i-1}{2}$ Schritten erhält man so:

$$B_i \geq 2^{\frac{i-1}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{i-1} .$$

Analog kann man eine solche Rechnung auch für die Näherungszähler durchführen und findet die Abschätzung

$$A_i \geq \left(\sqrt{2}\right)^{i-1} .$$

Ein Blick zurück auf Beispiel 1.2.5 zeigt, dass diese Abschätzungen wirklich nur grob sind, denn der Vergleich mit den dort berechneten Werten liefert etwa

$$B_5 = 302 \gg 2^{\frac{5}{2}} \approx 5,6569 .$$

Nur in Spezialfällen, beispielsweise falls $B_1 = 1$ wäre, gilt die Gleichheit. Mit diesen Abschätzungen müssen wir uns aber nur vorübergehend begnügen, denn die Überlegungen aus Bemerkung 2.5.5 (ii) werden unmittelbar eine scharfe Schranke für das Wachstum der A_i und B_i liefern.

Die in Lemma 1.2.3 gefundenen Rekursionsformeln für die Näherungsnenner und -zähler ähneln sich sehr. Ihren Zusammenhang zeigt das folgende Korollar. Wir folgen dabei den Ausführungen von [PER, I, §5] und benutzen den Begriff der *Indexerhöhung* für die Näherungszahlen. Mit einer Erhöhung des Index um j ist die Zahl

$$\frac{A_{i,j}}{B_{i,j}} = [b_j, \ldots, b_{i+j}]$$

gemeint.

1.2.7. Korollar. *Man erhält B_i aus der Rekursionsformel für A_{i-1} durch Erhöhung der Indizes um 1.*

Beweis. Aus der Rekursionsformel

$$A_{-1} = 1, \qquad A_0 = b_0, \qquad A_{i-1} = b_{i-1}A_{i-2} + A_{i-3}$$

ergibt sich durch Indexerhöhung um 1:

$$A_{-1,1} = 1, \qquad A_{0,1} = b_1, \qquad A_{i-1,1} = b_i A_{i-2,1} + A_{i-3,1} .$$

Das heißt, $A_{i-1,1}$ genügt der gleichen Rekursionsformel wie B_i, die Gleichheit folgt induktiv. □

Abschließend bekommen wir als Folgerung aus den Rekursionsformeln eine Darstellung von x durch seine Näherungs- und Restzahlen. Diese ist sowohl im Fall einer endlichen als auch einer unendlichen Kettenbruchentwicklung gültig.

1.2.8. Lemma. *Für $x = [b_0, b, \ldots, b_{i-1}, \beta_i]$ gilt*

$$x = \frac{A_{i-1}\beta_i + A_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}} , \qquad (1.2.3)$$

für alle $i \geq 0$.

Beweis. Betrachte die aus den Rekursionsformeln folgende Gleichung

$$[b_0, b_1, \ldots, b_n] = \frac{A_n}{B_n} = \frac{b_n A_{n-1} + A_{n-2}}{b_n B_{n-1} + B_{n-2}}.$$

Also gilt analog:

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}, \beta_i] = \frac{A_{i-1}\beta_i + A_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}}.$$

□

Hiermit haben wir die wichtigsten Zusammenhänge in Bezug auf die Näherungszahlen herausgearbeitet. Im weiteren Verlauf ergeben sich noch einige bemerkenswerte Eigenschaften dieser Werte, die an der entsprechenden Stelle Erwähnung finden.

Nun stellt sich die Frage, welche Zahlen in einen Kettenbruch umgewandelt werden können, und wie man im konkreten Fall die Kettenbruchentwicklung bestimmt. Die Antworten dazu finden wir in den folgenden beiden Teilen dieses Kapitels.

1.3. Endliche Kettenbrüche

Ziel dieses Abschnitts ist die Bestimmung der Menge aller Zahlen mit endlicher Kettenbruchentwicklung.

Betrachten wir zunächst den *euklidischen Algorithmus* zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ggT zweier natürlicher Zahlen am Beispiel 355 und 113:

$$\begin{aligned} 355 &= 3 \cdot 113 + 16 \\ 113 &= 7 \cdot 16 + 1 \\ 16 &= 16 \cdot 1 + 0\,. \end{aligned}$$

Diese Rechnung liefert:

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{133} = 3 + \frac{1}{\frac{133}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}.$$

Das heißt, zwei Kettenbruchentwicklungen für $\frac{355}{113}$ lauten $[3, 7, 16]$ und $[3, 7, 15, 1]$. Die Frage, ob es für diese Zahl noch andere Entwicklungen in reguläre Kettenbrüche gibt, und ob man durch entsprechende Konventionen sogar eine eindeutige Darstellung angeben kann, stellen wir noch einen Moment zurück.

Zunächst wird die Vermutung, dass man die Kettenbruchentwicklung für alle rationalen Zahlen durch den euklidischen Algorithmus erhält, durch den Beweis des folgenden Satzes bestätigt.

1.3.1. Satz. *Ein Kettenbruch ist genau dann endlich, wenn er eine rationale Zahl darstellt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“ Diese Richtung folgt aus dem euklidischen Algorithmus:
Es sei $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ echt größer als Null, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\mathrm{ggT}(p, q) = r_n$, wobei r_n der Rest im n-ten Schritt des euklidischen Algorithmus ist. Betrachte den euklidischen Algorithmus mit $n+1$ Schritten zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von p und q:

$$\begin{aligned} p &= b_0 q + r_1 && \text{mit } 0 \leq r_1 < q, \\ q &= b_1 r_1 + r_2 && \text{mit } 0 \leq r_2 < r_1, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= b_{n-1} r_{n-1} + r_n && \text{mit } 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= b_n r_n + 0. \end{aligned}$$

Aus $p = b_0 q + r_1$ folgt $\frac{p}{q} = b_0 + \frac{r_1}{q}$, und durch sukzessives Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= b_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{r_2}{r_1}} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}}} \\
&\vdots \\
&= b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{r_n}{r_{n-1}}}}} \\
&= b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}} .
\end{aligned}$$

Das enspricht der gesuchten Darstellung von x als Kettenbruch.

„$\Rightarrow$“ Dies ist klar aufgrund der Form eines endlichen Kettenbruchs wie sie in Definition 1.1.1 eingeführt wurde. □

Wegen der maximalen Anzahl der Schritte des euklidischen Algorithmus in obiger Situation ergibt sich die folgende Abschätzung für die Länge des zu x gehörenden Kettenbruchs:

1.3.2. Korollar. *Für rationale $x = \frac{p}{q}$ mit Kettenbruchentwicklung $[b_0, b_1, \ldots, b_n]$ gilt $n \leq \log_\phi(q) + 1$, wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass der euklidische Algorithmus maximal

$$\log_\phi(q) + 1$$

Schritte besitzt. Dies ist offensichtlich äquivalent zur Aussage, dass $\phi^{n-1} \leq q = r_0$ ist. Weiter kann man leicht durch vollständige Induktion zeigen, dass $F_i \leq r_{n+1-i}$ für alle $0 \leq i \leq n+1$ gilt, wobei F_i die i-te *Fibonaccizahl* ist, welche durch die Rekursion $F_i := F_{i-1} + F_{i-2}$ für $i \geq 2$ gebildet werden, und deren Startwerte durch $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ gegeben sind: Für $i = 0$ gilt offensichtlich

$$r_{n+1} = 0 = F_0 ,$$

und für $i = 1$ folgt, da r_n als natürliche Zahl echt größer als 0 sein muss:

$$r_n \geq 1 = F_1 .$$

Für den Induktionsschluss von $i-2$ und $i-1$ nach i, wobei $1 \leq i < n$ sei, erhalten wir mit den Induktionsvoraussetzungen

$$\begin{aligned}
F_{i-1} &\leq r_{n+2-i} , \\
F_{i-2} &\leq r_{n+3-i}
\end{aligned}$$

sofort

$$\begin{aligned}
F_i &= F_{i-1} + F_{i-2} \\
&\leq r_{n+2-i} + r_{n+3-1} \leq r_{n+1-i} ,
\end{aligned}$$

wobei man die letzte Abschätzung wegen $b_{i+1} \geq 1$ direkt aus $r_i = b_{i+1}r_{i+1} + r_{i+1}$ folgern kann.
Somit bleibt also zu zeigen:

$$\phi^{n-1} \leq F_{n+1}\,,$$

was man ebenfalls ohne Schwierigkeiten durch vollständige Induktion erhält. □

Die Fibonaccizahlen und den Wert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ werden wir in Bemerkung 2.5.5 (ii) genauer untersuchen. Der dort erläuterte Zusammenhang wird uns zeigen, dass obige Abschätzung für die Näherungsbrüche von $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ scharf ist.
Kommen wir nun nochmals auf Beispiel 1.2.5 aus dem letzten Abschnitt zurück:

1.3.3. Beispiel. Betrachte die Zahl $\frac{3141}{2718}$. Die Kettenbruchentwicklung erhält man durch Anwenden des euklidischen Algorithmus auf 3141 und 2718:

$$\begin{aligned} 3141 &= 1 \cdot 2718 + 423 \\ 2718 &= 6 \cdot 423 + 180 \\ 423 &= 2 \cdot 180 + 63 \\ 180 &= 2 \cdot 63 + 54 \\ 63 &= 1 \cdot 54 + 9 \\ 54 &= 6 \cdot 9 + 0\,. \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{3141}{2718} = [1, 6, 2, 2, 1, 9]\,.$$

Da der Nenner des betrachteten Bruchs relativ groß ist, gibt uns Korollar 1.3.2 keine gute Abschätzung für die Länge des Kettenbruchs: Dieses liefert $\log_\phi(2718) > 18$, wir waren aber bereits nach 6 Schritten fertig.

Aufgrund der beiden folgenden Aussagen zur Eindeutigkeit der Darstellung einer rationalen Zahl durch einen Kettenbruch treffen wir eine *Konvention*: Der letzte Teilnenner eines endlichen Kettenbruchs muss immer echt größer als 1 sein.

1.3.4. Satz. *Jede rationale Zahl x lässt sich auf eindeutige Weise in einen endlichen Kettenbruch entwickeln, dessen letzter Teilnenner größer oder gleich 2 ist.*

Beweis. Die Existenz der endlichen Kettenbruchentwicklung wurde bereits in Satz 1.3.1 bewiesen. Es bleibt zu zeigen:
Gilt $x = [b_0, b_1, \ldots, b_n] = [c_0, c_1, \ldots, c_m]$, mit $b_n > 1$ und $c_m > 1$, so ist $m = n$ und $b_i = c_i$ für $0 \leq i \leq n$.
Dies beweisen wir durch vollständige Induktion nach $k = min\{n, m\}$:
Sei $k = 0$. Es soll also gelten: $x = [b_0] = [c_0, c_1, \ldots, c_m]$. Dann ist x wegen $x = b_0$ eine ganze Zahl und echt größer als 1. In $x = c_0 + \frac{1}{[c_1,\ldots,c_m]}$ ist c_0 der ganzzahlige Anteil von x. Aus $[c_1, \ldots, c_m] > 1$ und somit $\frac{1}{[c_1,\ldots,c_m]} \in (0, 1)$ folgt, da x eine ganze Zahl ist, schon $m = 0$.
Sei nun die Behauptung für ein k gezeigt.
Induktionsschluss: $k \to k + 1$. Sei $x = [b_0, \ldots, b_{k+1}] = [c_0, \ldots, c_l]$ mit $l \geq k + 1$. Wegen dem gleichen Argument wie im Induktionsanfang ist $c_0 = b_0$. Weiter folgt damit aus

$$x = b_0 + \frac{1}{[b_1, \ldots, b_{k+1}]} = c_0 + \frac{1}{[c_1, \ldots, c_l]}\,,$$

dass $[b_1, \ldots, b_{k+1}] = [c_1, \ldots, c_l]$. Mit der Induktionsvoraussetzung muss, da der linke Kettenbruch k-gliedrig ist, schon $k+1 = l$ und $b_i = c_i$ für alle $1 \le i \le k+1$ gelten. □

Zusammengefasst ergeben die vorangegangenen Überlegungen:

1.3.5. Korollar. *Jede rationale Zahl x besitzt jeweils genau eine Darstellung als endlicher Kettenbruch mit gerader oder ungerader Gliederanzahl.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$[b_0, b_1, \ldots, b_n] = \begin{cases} [b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1, 1] & \text{, falls } b_n \ge 1 \text{ oder } n = 0 \\ [b_0, \ldots, b_{n-1} + 1] & \text{, falls } b_n = 1 \text{ und } n \ge 1 \end{cases}$$

wobei im Fall $b_n = 1$ die obere Kettenbruchentwicklung in der Klammer $(n+1)$-gliedrig ist. □

Die Kettenbruchentwicklung der zu Beginn des Abschnittes betrachteten Zahl $\frac{355}{113}$ ist also mit unserer Konvention eindeutig durch $[3, 7, 16]$ gegeben. Die Ähnlichkeit zur Kettenbruchentwicklung von π aus der Einleitung ist nicht zufällig, wie wir im abschließenden Teil dieses Kapitels sehen werden.

1.4. Unendliche Kettenbrüche

Es stellen sich dieselben Fragen wie im vorangegangenen Abschnitt. Neu hinzu kommt das Problem, ob bzw. wann die Kettenbruchentwicklung überhaupt konvergiert.

Zunächst finden wir ein Verfahren, welches an das aus dem euklidischen Algorithmus abgeleiteten Vorgehen im Fall eines endlichen Kettenbruches erinnert, denn aus Defintion 1.1.1 ergibt sich der folgende *Kettenbruchalgorithmus*:

$$\begin{aligned} x = x_0 &= b_0 + \frac{1}{x_1} \\ x_1 &= b_1 + \frac{1}{x_2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

wobei $b_i = \lfloor x_i \rfloor$ gilt. Die Zahl x_i ist dabei mit einer sogenannten *Gaußklammer* versehen; diese bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x_i ist.

Falls x eine rationale Zahl mit $(n+1)$-gliedriger Kettenbruchentwicklung ist, so endet das Verfahren nach $n+1$ Schritten, da $x_n = b_n$ eine ganze Zahl ist. Für eine irrationale Zahl x wird der Kettenbruchalgorithmus nie abbrechen.

Beantworten wir davon ausgehend nun zuerst die Frage nach der Konvergenz der Kettenbruchentwicklung:

1.4.1. Satz. *Jeder unendliche Kettenbruch konvergiert und stellt eine irrationale Zahl dar.*

Beweis. *Zur Konvergenz.*

Unter Benutzung von Lemma 1.2.4 (i) folgt:

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1}}{B_n B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}} .$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{A_n}{B_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i}{B_i} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right) + \frac{A_0}{B_0} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{B_i B_{i-1}} \, .$$

Da die Zahlen $\frac{1}{B_i B_{i-1}}$ nach Bemerkung 1.2.6 eine streng monotone Nullfolge bilden, ist ihre alternierende Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent. Damit folgt auch, dass die Folge der Nährerungbrüche $\frac{A_n}{B_n}$ konvergiert. [AVA, 7, §2]

Ein unendlicher Kettenbruch stellt eine irrationale Zahl dar.

Für $x = [b_0, b_1, \ldots]$ gilt $x \geq b_0$. Analog folgt aus $[b_i, b_{i+1}, \ldots] = \beta_i$ für $i \geq 1$ schon $\beta_i \geq b_i \geq 1$. Mit Lemma 1.2.8 gilt

$$x = [b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}, \beta_i] = \frac{A_{i-1}\beta_i + A_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}} \, ,$$

also:

$$\begin{aligned} B_{i-1}x - A_{i-1} &= \frac{B_{i-1}A_{i-1}\beta_i + B_{i-1}A_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}} - \frac{A_{i-1}B_{i-1}\beta_i + A_{i-1}B_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}} \\ &= \frac{B_{i-1}A_{i-2} - A_{i-1}B_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}} \\ &= \frac{(-1)^{i-1}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}} \, . \end{aligned}$$

Das heißt, $|B_{i-1}x - A_{i-1}|$ wird für $i \to \infty$ beliebig klein, aber nicht 0. Wäre x rational, d.h. $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, so würde

$$|B_{i-1}x - A_{i-1}| = \frac{|B_{i-1}p - A_{i-1}q|}{q}$$

gelten, also wäre der Ausdruck in der Klammer stets echt größer als $\frac{1}{q}$ oder identisch Null. Somit stellt ein unendlicher Kettenbruch eine irrationale Zahl dar. [PER, II, §12] □

Weitere Aussagen zur Konvergenz werden wir im folgenden Kapitel über Bestapproximationen zeigen.

Auch für eine irrationale Zahl ist die Darstellung als Kettenbruch mit Hilfe des Kettenbruchalgorithmus eindeutig, wie der abschließende Satz zeigt:

1.4.2. Satz. *Jede irrationale Zahl x lässt sich auf eindeutige Weise in einen unendlichen Kettenbruch entwickeln.*

Beweis. *Existenz.*

Die Existenz garantiert der Kettenbruchalgorithmus, der nicht abbricht, da ansonsten x eine rationale Zahl wäre.

Bleibt zu zeigen, dass die Kettenbruchentwicklung auch wirklich gegen x konvergiert. Mit Lemma 1.2.8 folgt:

$$x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} = \frac{A_{i-2}B_{i-1} - A_{i-1}B_{i-2}}{B_{i-1}(B_{i-1}\beta_i + B_{i-2})} = \frac{(-1)^{i-1}}{B_{i-1}(B_{i-1}\beta_i + B_{i-2})} \, .$$

Die Betrachtung der Beträge und die Tatsache, dass $B_i \to \infty$ für $i \to \infty$ liefert:

$$x = \lim_{i \to \infty} \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \, .$$

Eindeutigkeit.

Zu zeigen: Ist $x = [b_0, \ldots] = [b_0^{|}, \ldots]$, so ist $b_i = c_i \; \forall i \in \mathbb{N}$.

Beweis durch vollständige Induktion: Es gilt $b_0 = b_0^{|}$, da b_0 bzw. $b_0^{|}$ den ganzzahligen Anteil beschreibt, und dieser in beiden Darstellungen gleich sein muss.

Sei die nun die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Induktionsschluss: $k \to k+1$. Laut Induktionsvoraussetzung muss wegen $b_i = b_i^{|}$ für $0 \leq i \leq k$ auch $A_i = A_i^{|}$und $B_i = B_i^{|}$ für $0 \leq i \leq k$ gelten. Damit folgt aus Lemma 1.2.8 die Gleichung

$$\frac{\beta_{k+1} A_k + A_{k-1}}{\beta_{k+1} B_k + B_{k-1}} = \frac{\beta_{k+1}^{|} A_k^{|} + A_{k-1}^{|}}{\beta_{k+1}^{|} B_k^{|} + B_{k-1}^{|}},$$

wobei $\beta_{k+1} = [b_{k+1}, \ldots]$ und $\beta_{k+1}^{|} = [b_{k+1}^{|}, \ldots]$.

Für die von b_{k+1} unabhängigen Elementen kann der Strich nach Induktionsvoraussetzung weggelassen werden, und es folgt

$$\frac{\beta_{k+1} A_k + A_{k-1}}{\beta_{k+1} B_k + B_{k-1}} = \frac{\beta_{k+1}^{|} A_k + A_{k-1}}{\beta_{k+1}^{|} B_k + B_{k-1}},$$

also $\beta_{k+1} = \beta_{k+1}^{|}$. Das heißt: $[b_{k+1}, b_{k+2} \ldots] = [b_{k+1}^{|}, b_{k+2}^{|} \ldots]$.

Analog zum Induktionsanfang folgt daraus $b_{k+1} = b_{k+1}^{|}$, wodurch der Induktionsschritt vollzogen ist. $\square$

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir noch zwei Beipiele für die Funktionsweise des Kettenbruchalgorithmus betrachten. Diese sollen als Motivition für unser weiteres Vorgehen dienen, und einen kleinen Ausblick auf das letzte Kapitel dieser Arbeit geben, in dem wir die beiden Zahlen e und π und deren Kettenbruchentwicklungen genauer betrachten.

1.4.3. Beispiel. Bestimmung der Kettenbruchentwicklung der eulerschen Zahl e und der Kreiszahl π mit dem Kettenbruchalgorithmus.

Für e ergibt sich aus $e \approx 2,7182818286$:

$$\begin{array}{rccc}
e \approx & 2,7182818286 & = & [2.7182818286] \\
= & 2 + \frac{1}{1,392211191} & = & [2, 1.392211191] \\
= & 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2,54964678}} & = & [2, 1, 2.54964678] \\
= & 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1,319350238}}} & = & [2, 1, 2, 1.319350238] \\
= & \ldots & = & [2, 1, 2, 1, 1.220479294] \\
= & \ldots & = & [2, 1, 2, 1, 1, 4.535573296] \\
= & \ldots & = & [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1.367158067] \\
= & \ldots & = & [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1.153192293] \\
= & \ldots & = & [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6.527743518]
\end{array}$$

Wir erhalten also: $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$. In der bisherigen Kettenbruchentwicklung von e kann man schon ein gewisses Muster erkennen. Ob sich dieses fortsetzt und was wir dann über die eulersche Zahl aussagen können, sehen wir im achten Kapitel. Dass es auch Zahlen mit noch „regelmäßigerer“ Kettenbruchentwicklung gibt, ist Bestandteil der Problemstellung von Kapitel 3.

Für π ergibt sich aus $\pi \approx 3,1415926536$:

$$\begin{array}{rcccc}
\pi & \approx & 3,1415926535 & = & [3.1415926535] \\
 & = & 3 + \frac{1}{7,06251331} & = & [3, 7.06251331] \\
 & = & 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15,99659326}} & = & [3, 7, 15.99659326] \\
 & = & 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1,03418385}}} & = & [3, 7, 15, 1.03418385] \\
 & = & \ldots & = & [3, 7, 15, 1, 292.5358077] \\
 & = & \ldots & = & [3, 7, 15, 1, 292, 1.86634269] \\
 & = & \ldots & = & [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1.15427746]
\end{array}$$

Bis hierhin erhalten wir also: $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots]$. Die Kettenbruchentwicklung weist (noch) keine offensichtliche Regelmäßigkeit auf.

Brechen wir die Entwicklung vor der 292 ab, so erhalten wir den oben im Beispiel zum euklidischen Algorithmus betrachteten Bruch $\frac{355}{113}$. Die Bedeutung dieser Zahl, und warum es günstig ist, genau an dieser Stelle die Entwicklung abzubrechen, untersuchen wir im folgenden Kapitel.

KAPITEL 2

Bestapproximationen

Wir werden in diesem Kapitel das Problem der Approximation reeller Zahlen durch rationale Zahlen betrachten. Einfach formuliert geht es um die Bestimmung derjenigen rationalen Brüche, welche von einer gegebenen rationalen oder irrationalen Zahl einen festgelegten minimalen Abstand haben und dabei einen möglichst kleinen positiven Nenner besitzen. Motiviert wird die Betrachtung dieser Fragestellung durch ein in der Praxis oft auftretendes Problem, dem sich auch Lagrange stellte. Zunächst der französische Text (übernommen von [LUE, XV, §6], und dann meine Übersetzung:

> *Problème:*
> *Une fraction exprimée par un grand nombre de chiffres étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes qui approchent si près de la vérité, qu'il soit impossible d'en approcher davantage sans en employer de plus grandes.*

> *Problem:*
> *Ein Bruch mit einer großen Ziffernanzahl sei gegeben; finde alle Brüche mit kleineren Ausdrücken, die der Wahrheit am nächsten kommen, sodass es unmöglich sei ihm näherzukommen ohne dafür größere zu verwenden.*

Hinter dieser abstrakten Formulierung verbirgt sich die Aufgabe, ausgehend von einer Zahl mit großem Zähler und Nenner, eine zweite Zahl zu finden, die möglichst nahe bei der ersten liegt, und kleineren Zähler und Nenner besitzt. Mit der gewöhnlichen Dezimalbruchdarstellung kann man zum Beispiel keine guten Ergebnisse erwarten, da die Nenner auf Potenzen von 10 beschränkt sind. Die Nenner sind also in diesem Fall komplett unabhängig von der arithmetischen Natur der zu approximierenden Zahl. Bei der Entwicklung einer Zahl in ihren Kettenbruch hingegen sind die Nenner der sich daraus ergebenden Näherungsbrüche vollständig durch die Zahl bestimmt, die sie darstellen. Um Fehlinterpretationen zu vermeiden, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass im Folgenden mit der Bezeichnung der *Näherungsbrüche* einer Zahl stets die Quotienten der zugehörigen Kettenbruchentwicklung, so wie sie im ersten Kapitel eingeführt wurden, gemeint sind.

Zunächst führen wir die Begriffe und zugehörigen Kriterien der sogenannten Bestapproximationen erster und zweiter Art ein. Bevor wir die Vebindung zu den Kettenbrüchen herstellen, werden wir im zweiten Abschnitt das sogenannte Näherungsgesetz formulieren und beweisen, welches eine erste Vorstellung von der Güte der Approximation einer reellen Zahl durch die Näherungsbrüche ihrer Kettenbruchentwicklung gibt. Diesen für die Praxis wichtigen Satz benötigen wir, um zu zeigen, dass genau die Näherungsbrüche der einer Zahl zugehörigen Kettenbruchentwicklung den entsprechenden Anforderungen genügen, und Bestapproximationen an diese sind. Jener Aussage, die zusammen mit der entsprechenden Umkehrung unter dem Namen „Gesetz der besten Näherung“ bekannt ist, widmen wir einen eigenen Abschnitt. Die beiden letzten Teile dieses Kapitels stellen eine Vertiefung der bis dorthin behandelten Thematik dar. Einerseits werden wir uns ausführlicher mit den Bestapproximationen erster Art beschäftigen. Danach betrachten wir abschließend noch einige Verschärfungen des Näherungsgesetzes, bei denen man allerdings den Verlust der Gültigkeit für alle Näherungsbrüche in Kauf nehmen muss.

In dem Gesetz der besten Näherung liegen, neben den in der Einleitung erwähnten Versuchen, auch die eigentlichen historischen Wurzeln zur Entwicklung der Theorie über die Kettenbrüche. Auf die Fragestellungen, welche den niederländischen Astronom und Physiker Christiaan Huygens (1629-1695), auf den diese Aussagen zurückgehen, zu den entsprechenden Überlegungen inspirierten, werden wir in Teil A des Anhangs zurückblicken.

2.1. Definition

2.1.1. Definition. *Eine rationale Zahl* $\frac{a}{b}$ *mit* $b > 0$ *heißt* Bestapproximation erster Art *an eine relle Zahl* x*, wenn es keine von* $\frac{a}{b}$ *verschiedene rationale Zahl mit gleichem oder kleinerem Nenner gibt, die bezüglich des euklidischen Absolutbetrages näher bei* x *liegt. Das heißt, dann gilt für alle rationalen Zahlen* $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$ *mit* $0 < d \leq b$*:*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \left| x - \frac{c}{d} \right| .$$

Zu dieser natürlichen Definition gibt es eine Verschärfung, die man folgendermaßen formuliert:

2.1.2. Definition. *Eine rationale Zahl* $\frac{a}{b}$ *mit* $b > 0$ *heißt* Bestapproximation zweiter Art *an eine relle Zahl* x*, wenn für alle rationalen Zahlen* $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$ *mit* $0 < d \leq b$ *gilt:*

$$|bx - a| < |dx - c| .$$

Dass es sich tatsächlich um eine Verschärfung handelt, sieht man wie folgt:
Sei $|bx - a| < |dx - c|$ für alle c, d mit $0 < d \leq b$, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$. Dann gilt:

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| = \frac{1}{b} |bx - a| < \frac{1}{b} |d - ac| \leq \frac{1}{d} |dx - c| = \left| x - \frac{c}{d} \right| .$$

Betrachten wir noch ein Gegenbeispiel dafür, dass die Umkehrung nicht richtig ist:
Sei $x = \frac{1}{5}$. Dann ist $\frac{1}{3}$ eine Bestapproximation erster Art an x, denn:

$$\left| \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right| = \frac{2}{15} < \left| \frac{1}{5} - 0 \right| < \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right| < \left| \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right| < \left| \frac{1}{5} - 1 \right| ,$$

Allerdings handelt es sich wegen

$$\left| 1 \cdot \frac{1}{5} - 0 \right| < \left| 3 \cdot \frac{1}{5} - 1 \right|$$

nicht um eine Bestapproximation zweiter Art, da $\frac{0}{1}$, trotz eines kleineren Nenners, im Sinn von Definition 2.1.2 näher als die Zahl $\frac{1}{3}$ bei $x = \frac{1}{5}$ liegt.

Bevor wir einsehen, weshalb diese Begriffe auch bei der Untersuchung der Arithmetik der Kettenbrüche eine wichtige Rolle spielen, müssen wir zunächst Aussagen darüber finden, ob und wie man aus der Kettenbruchentwicklung einer Zahl Approximationen an diese erhält.

2.2. Das Näherungsgesetz

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine genügend große Güte der Approximation der Näherungsbrüche bezüglich derjenigen reellen Zahl nachzuweisen, die sich aus der ihnen zugrundeliegenden Kettenbruchentwicklung ergibt.

Zunächst wollen wir dazu festhalten, dass sich die Näherungsbrüche mit steigendem Index immer mehr der zur Kettenbruchentwicklung gehörenden Zahl annähern:

2.2.1. Lemma. *Es gelten folgende Ungleichungen:*

$$\left|x - \frac{A_i}{B_i}\right| < \left|x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}\right| ,$$

für alle $i > 1$, und

$$\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \frac{A_4}{B_4} < \ldots < x < \ldots < \frac{A_5}{B_5} < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1} .$$

Das heißt, die Näherungsbrüche mit geradem Index sind stets kleiner als x und die Näherungsbrüche mit ungeradem Index sind stets größer als x.

Beweis. Aus der bekannten Gleichung

$$x = \frac{A_{i-1}\beta_i + A_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}}$$

folgt:

$$\beta_i(B_{i-1}x - A_{i-1}) = -(B_{i-2}x - A_{i-2}) .$$

Man darf nun durch $B_{i-1}x - A_{i-1}$ teilen, denn falls dieser Ausdruck Null ist, gilt, da dann auch die rechte Seite verschwindet, schon $A_{i-1}B_{i-2} - A_{i-2}B_{i-1} = 0$, was aber im Widerspruch zur Aussage von Lemma 1.2.4 (i) steht. Also folgt:

$$\beta_i = -\frac{B_{i-2}x - A_{i-2}}{B_{i-1}x - A_{i-1}} . \tag{2.2.1}$$

Da per Definition $\beta_i > 1$ ist, müssen die Zahlen $B_ix - A_i$ vom Absolutbetrag her mit wachsendem Index abnehmen und alternierende Vorzeichen besitzen. Genauer folgt aus dem Fall $i = 0$, dass $B_ix - A_i$ das Vorzeichen $(-1)^i$ besitzt. Ebenso ist es notwendig, da in der Darstellung (2.2.1) von β_i der Betrag des Zählers echt größer als der des Nenners sein muss, dass alle Zahlen $\left|x - \frac{A_i}{B_i}\right|$ mit wachsendem Index kleiner werden und das Vorzeichen von $x - \frac{A_i}{B_i}$ entsprechend $(-1)^i$ ist. Daraus folgen unmittelbar die angegebenen Ungleichungen. [PER, II, §13] □

2.2.2. Beispiel. Der zum Ende des vorangegangenen Kapitels bestimmte Anfangsteil der Kettenbruchentwicklung von π bestätigt unser Lemma, denn man erhält die folgenden Näherungsbrüche:

$$\frac{3}{1}, \qquad \tfrac{22}{7} \approx 3,143 , \qquad \frac{333}{106} \approx 3,14151 ,$$

$$\frac{355}{113} \approx 3,1415929 , \qquad \tfrac{103993}{33102} \approx 3,1415926530 , \qquad \ldots$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit dem ungefähren Wert $\pi \approx 3,1415926536$, so sieht man tatsächlich, dass die Näherungsnenner abwechselnd ein wenig zu klein bzw. zu groß sind. Der absolute Fehler wird immer kleiner, was die folgende Tabelle belegt:

$[b_0, \ldots, b_n]$	$\frac{A_n}{B_n}$	$\lvert\pi - \frac{A_n}{B_n}\rvert$
$[3]$	$\frac{3}{1}$	$\approx 3,14$
$[3,7]$	$\frac{22}{7}$	$\approx 1,26 \cdot 10^{-3}$
$[3,7,15]$	$\frac{333}{106}$	$\approx 8,32 \cdot 10^{-5}$
$[3,7,15,1]$	$\frac{355}{113}$	$\approx 2,67 \cdot 10^{-7}$
$[3,7,15,1,292]$	$\frac{103993}{33102}$	$\approx 5,78 \cdot 10^{-10}$

Für jeden einzelnen der im Beispiel berechneten Brüche gilt, dass es keinen Bruch mit kleinerem Nenner gibt, der π besser approximiert, wie das sogenannte Näherungsgesetz zeigt:

2.2.3. Satz. (Näherungsgesetz) *Es gilt folgende Abschätzung für die Genauigkeit der Approximation von x durch seine Näherungsbrüche:*

$$\left| x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| < \frac{1}{B_{i-1}^2} .$$

Diese Abschätzung, auch *Dirichlets Approximationssatz* genannt, rechtfertigt insbesondere die Bezeichnung „Näherungsbrüche“.

Beweis. Mit der bekannten Gleichung

$$x = \frac{A_{i-1}\beta_i + A_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}}$$

folgt:

$$x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} = \frac{A_{i-2}B_{i-1} - A_{i-1}B_{i-2}}{(B_{i-1}\beta_i + B_{i-2})B_{i-1}} = \frac{(-1)^{i-1}}{B_{i-1}(B_{i-1}\beta_i + B_{i-2})} , \tag{2.2.2}$$

wobei für die letzte Gleichheit Lemma 1.2.4 (i) ausgenutzt wurde. Wegen $\beta_i \geq b_i$ erhält man:

$$\left| x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| \leq \frac{1}{B_{i-1}(B_{i-1}b_i + B_{i-2})} = \frac{1}{B_{i-1}B_i} < \frac{1}{B_{i-1}^2} .$$

□

2.2.4. Bemerkung. (i) Am Wachstum der Folge der Teilnenner einer Kettenbruchentwicklung kann man also ablesen, wie gut die Zahl durch ihre Näherungsbrüche approximiert wird, denn die Näherungsnenner B_i sind aufgrund der Rekursionsformel vollständig durch die b_i bestimmt.

(ii) Um eine Zahl durch einen Bruch mit möglichst kleinem Nenner abzuschätzen, ist es günstig die Kettenbruchentwicklung vor einem „großen“ Teilnenner b_i abzubrechen. Denn falls b_i groß ist, so ist B_{i-1} relativ klein zu $B_i = b_iB_{i-1} + B_{i-2}$ und damit ist der Betrag der Differenz (2.2.2) sehr klein. Vergleiche dazu auch das nachfolgende Beispiel.

(iii) Oft genügt auch die folgende im Verlauf des Beweises gezeigte Ungleichung:

$$\left| x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| \leq \frac{1}{B_{i-1} B_i} , \tag{2.2.3}$$

wobei in der Abschätzung die Gleichheit genau dann eintritt, wenn x eine rationale Zahl und b_i deren letzter Teilnenner ist.

2.2.5. Beispiel. Bricht man die Kettenbruchentwicklung von π vor dem Teilnenner 292 ab, so erhält man einen Näherungsnenner von 113, während wir, wenn man noch eine Stelle weiter entwickelt, eine enorme Vergrößerung des Nenners in Kauf nehmen müssen, wie Beispiel 2.2.2 zeigt.

2.2.6. Korollar. *Man kann mit den Berechnungen in Satz 2.2.3 auch leicht eine untere Abschätzung für den Fehler des $(i-1)$-ten Näherungsbruchs angeben:*
Wegen $\beta_i < b_i + 1$ gilt:

$$B_{i-1}\beta_i + B_{i-2} < B_{i-1}(b_i + 1) + B_{i-2} = B_i + B_{i-1} .$$

Die Gleichung (2.2.2) liefert dann unmittelbar:

$$\left| x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| > \frac{1}{B_{i-1}(B_i + B_{i-1})} .$$

Schärfere Abschätzungen werden wir im letzten Kapitelabschnitt betrachten. Zunächst wenden wir uns dem nicht nur für praktische Zwecke wichtigen Gesetz der besten Näherung zu.

2.3. Das Gesetz der besten Näherung

Die Verbindung zwischen den im ersten Abschnitt eingeführten Bestapproximationen und den Kettenbrüchen stellen die beiden folgenden unter dem Namen *Gesetz der besten Näherung* bekannten Sätze her:

2.3.1. Satz. *Jede Bestapproximation zweiter Art einer reellen Zahl x entspricht einem Näherungsbruch in der zugehörigen Kettenbruchentwicklung.*

BEWEIS. Sei $\frac{A}{B}$ (mit $B \geq 1$) eine Bestapproximation zweiter Art der Zahl $x = [b_0, b_1, \ldots]$ mit den Näherungsbrüchen $\frac{A_i}{B_i}$. Falls $\frac{A}{B} < b_0$ ist, so gilt

$$|1 \cdot x - b_0| < \left| x - \frac{A}{B} \right| \leq |Bx - A| ,$$

das heißt, in diesem Fall kann $\frac{A}{B}$ keine Bestapproximation zweiter Art von x sein.
Sei also $\frac{A}{B} \geq b_0$. Dann muss, falls $\frac{A}{B}$ nicht mit einem der Näherungsbrüche von x übereinstimmt, wegen Lemma 2.2.1 schon gelten, dass $\frac{A}{B}$ für ein i zwischen den Näherungsbrüchen $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$ und $\frac{A_{i+1}}{B_{i+1}}$ liegt, oder echt größer als $\frac{A_1}{B_1}$ ist.
Im ersten Fall haben wir

$$\left| \frac{A}{B} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| \geq \frac{1}{B B_{i-1}} ,$$

und wegen Lemma 1.2.4 (i) gilt:

$$\left| \frac{A}{B} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| < \left| \frac{A_i}{B_i} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| = \frac{1}{B_i B_{i-1}} ,$$

woraus sich ergibt:

$$B > B_i\,. \tag{2.3.1}$$

Andererseits muss aber auch

$$\left|x - \frac{A}{B}\right| \geq \left|\frac{A_{i+1}}{B_{i+1}} - \frac{A}{B}\right| \geq \frac{1}{BB_{i+1}}$$

gelten, das heißt:

$$|Bx - A| \geq \frac{1}{B_{i+1}}\,.$$

Aus

$$|B_i x - A_i| \leq \frac{1}{B_{i+1}}$$

folgt damit:

$$|B_i x - A_i| \leq |Bx - A|\,. \tag{2.3.2}$$

Die Ungleichungen (2.3.1) und (2.3.2) liefern also, dass in diesem Fall $\frac{A}{B}$ keine Bestapproximation zweiter Art von x sein kann.
Verbleibt noch die Möglichkeit, dass $\frac{A}{B} > \frac{A_1}{B_1}$. In diesem Fall gilt

$$\left|x - \frac{A}{B}\right| > \left|\frac{A_1}{B_1} - \frac{A}{B}\right| \geq \frac{1}{BB_1}\,,$$

also:

$$|Bx - A| > \frac{1}{B_1} = \frac{1}{A_1}\,.$$

Andererseits ist es aber offensichtlich, dass

$$|1 \cdot x - b_0| \leq \frac{1}{A_1}\,,$$

woraus wegen $B \geq 1$ folgt:

$$|Bx - A| > |1 \cdot x - b_0|\,.$$

Dies widerspricht abermals der Definition einer Bestapproximation zweiter Art von x.
Also muss insgesamt $\frac{A}{B}$ schon ein Näherungsbruch von x gewesen sein, womit die Behauptung folgt. [KHI, II, §6] □

Dieser Satz lässt sich fast vollständig umkehren:

2.3.2. Satz. *Jeder Näherungsbruch $\frac{A_i}{B_i}$, mit $i \geq 1$, einer reellen Zahl x enstpricht einer Bestapproximation zweiter Art von x.*

Insbesondere gibt es also für irrationale Zahlen unendlich viele Bestapproximationen zweiter Art an diese.

Die Voraussetzung $i > 0$ ist in der Tat notwendig: Beispielsweise für $x = b_0 + \frac{1}{2}$ ist $\frac{A_0}{B_0} = \frac{b_0}{1}$ keine Bestapproximation zweiter Art, denn:

$$|1 \cdot x - (b_0 + 1)| = |1 \cdot x - b_0|\,.$$

Beweis. Betrachten wir den Ausdruck

$$|qx - p| \,,$$

wobei q die Werte $1, 2, \ldots, B_i$ annimmt und p eine beliebige ganze Zahl ist. Wir bezeichnen mit q_0 den Wert von q, für den obiger Ausdruck bei geeigneter Wahl von p minimal wird. Falls es mehrere solche q_0 gibt, wählen wir aus diesen Zahlen diejenige mit dem kleinsten Absolutbetrag. Weiter bezeichnen wir mit p_0 das p, für welches $|q_0x - p|$ minimal wird. Dieses p_0 ist eindeutig bestimmt, wie die folgenden Überlegungen zeigen:

Falls für $p_0 \neq p_0^{\prime}$ gilt, dass

$$\left| x - \frac{p_0}{q_0} \right| = \left| x - \frac{p_0^{\prime}}{q_0} \right| \,,$$

so folgt

$$x = \frac{p_0 + p_0^{\prime}}{2q_0} \,,$$

wobei dieser Bruch vollständig gekürzt ist, denn: Wenn $p_0 + p_0^{\prime} = lm$ und $2q_0 = ln$ ist, mit natürlichen Zahlen l, m und n, so folgt für $l > 2$:

$$n < q_0 \text{ und } x = \frac{m}{n} \,,$$

also

$$|nx - m| = 0 \,,$$

was aber im Widerspruch zur Definition von q_0 steht. Falls $l = 2$ gilt, ist $n = q_0$ und

$$|nx - m| = |q_0x - m| = 0 < |q_0x - p_0| \,,$$

was im Widerspruch zur Definition von p_0 steht.

Entwickeln wir die Zahl x in einen Kettenbruch, so erhalten wir für $x = \frac{A_i}{B_i}$ und $b_i \geq 2$:

$$\begin{aligned} A_i &= p_0 + p_0^{\prime} \\ B_i &= 2q_0 = B_{i-1}b_i + B_{i-2} \,. \end{aligned}$$

Dann folgt für $i > 1$ die Ungleichung $B_{i-1} < q_0$, und es ist

$$|B_{i-1}x - A_{i-1}| = \frac{1}{B_i} = \frac{1}{2q_0} \leq \frac{1}{2} \leq |q_0x - p_0| \,,$$

im Widerspruch zur Definition von q_0. Für $i = 1$ stoßen wir auf den Fall $x = b_0 + \frac{1}{2}$ und $q_0 = 1$, den wir im Vorfeld dieses Beweises schon betrachtet haben.

Damit sind also die beiden Zahlen p_0 und q_0 durch die von uns gemachten Einschränkungen eindeutig definiert. Weiter folgt damit direkt, dass $\frac{p_0}{q_0}$ eine Bestapproximation von x ist, denn für $\frac{a}{b} \neq \frac{p_0}{q_0}$ und $b \leq p_0$ würde die Ungleichung

$$|bx - a| \leq |q_0x - p_0|$$

der Definition von p_0 und q_0 widersprechen. Deshalb muss nach Satz 2.3.1 für ein $j \leq i$ gelten:

$$p_0 = A_j \quad \text{und} \quad q_0 = B_j \,.$$

Damit die Behauptung folgt, bleibt noch zu zeigen, dass $j = i$ gilt. Angenommen es sei $j < i$, das heißt es gilt:

$$|B_j x - A_j| > \frac{1}{B_j + B_{j+1}} \geq \frac{1}{B_{i-1} + B_i} ,$$

und

$$|B_i x - A_i| \leq \frac{1}{B_{i+1}} .$$

Aus der Definition von $A_j = p_0$ und $B_j = q_0$ folgt dann

$$|B_j x - A_j| \leq |B_i x - A_i| ,$$

also insgesamt

$$\frac{1}{B_{i-1} + B_i} < \frac{1}{B_{i+1}} .$$

Allerdings ist die Ungleichung $B_{i+1} < B_i + B_{i-1}$ aufgrund der Rekursionsformel für die Nährungsnenner aus Lemma 1.2.3 unerfüllbar. Somit war die Annahme falsch. [KHI, II, §6] □

Die Näherungsbrüche sind also, eventuell abgesehen von $\frac{A_0}{B_0}$, nach den Überlegungen zu Beginn dieses Kapitels zugleich Bestapproximationen erster Art an x, allerdings nicht die einzigen. Es gibt auch noch andere Zahlen, die genau dies erfüllen: Die sogenannten Nebennäherungsbrüche. Im nächsten Abschnitt werden wir uns einen Überblick über diese Zahlen verschaffen.

2.3.3. Bemerkung. (i) In Verbindung mit dem Näherungsgesetz kann man eine Zahl wegen den obigen Aussagen umso besser durch Brüche mit kleinem Nenner approximieren, je schneller die Folge ihrer Teilnenner wächst.

(ii) Die beiden gerade bewiesenen „Gesetze der besten Näherung“ waren, wie bereits erwähnt, wahrscheinlich als erstem Christiaan Huygens vollständig bekannt, und dienten historisch gesehen als die eigentliche Triebfeder für die Erforschung der Kettenbrüche. Hintergründe zu den Problemen mit denen er sich beschäfigte, und wie er dabei auf den geeigneten Lösungsansatz stieß, sind in Teil A des Anhangs nachzulesen.

2.4. Nebennäherungsbrüche

Da es sich bezüglich der beiden verschiedenen im ersten Teil des Kapitels eingeführten Typen der Bestapproximationen bei der sogenannten ersten Art um die natürlichere Definition des Begriffes handelt, wollen wir nun einen kurzen Überblick zu dieser Problemstellung geben. Wir orientieren uns dabei an [PER, II, §16], wo auch die hier nicht geführten Beweise nachzulesen sind.

Im vorangehenden Abschnitt konnten wir aus Satz 2.3.2 schließen, dass, bis auf eventuell $\frac{A_0}{B_0}$, alle Näherungsbrüche $\frac{A_i}{B_i}$ der Kettenbruchentwicklung einer reellen Zahl x Bestapproximationen erster Art an diese sind. Um zu zeigen, dass dies nicht alle Zahlen sind, welche der Bedingung aus Definition 2.1.1 genügen, führen wir zunächst eine geeignete Klasse von Zahlen ein:

2.4.1. Definition. *Für zwei Näherungsbrüche $\frac{A_{i-2}}{B_{i-2}}$ und $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$ von x, wobei $i > 1$ sei, nennt man die Zahlen*

$$\frac{A_{i-1} + A_{i-2}}{B_{i-1} + B_{i-2}}, \frac{2A_{i-1} + A_{i-2}}{2B_{i-1} + B_{i-2}}, \ldots, \frac{(b_0 - 1)A_{i-1} + A_{i-2}}{(b_0 - 1)B_{i-1} + B_{i-2}}$$

die Nebennäherungsbrüche.

Bemerkung. Um Verwechselungen zu vermeiden, bezeichnen wir die Näherungsbrüche in diesem Abschnitt als *Hauptnäherungsbrüche*. Weiterhin nennen wir die Elemente der Menge der Haupt- und Nebennäherungsbrüche auch die *Näherungszahlen*.

Fassen wir zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Nebennäherungsbrüche zusammen.

2.4.2. Lemma. *(i) Die zu den Nebennäherungsbrüchen*

$$\frac{cA_{i-1} + A_{i-2}}{cB_{i-1} + B_{i-2}},$$

mit $1 \leq c \leq b_i - 1$*, gehörenden Kettenbruchentwicklungen sind*

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}] \qquad \text{, falls } c = 1\,,$$

bzw.

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}, c] \qquad \text{, falls } 2 \leq c \leq b_i - 1\,.$$

(ii) Die Nebennäherungsbrüche liegen alle zwischen $\frac{A_{i-2}}{B_{i-2}}$ *und* $\frac{A_i}{B_i}$.

(iii) Ist i *gerade, so sind alle Glieder der in diesem Fall streng monoton wachsenden Folge der Nebennäherungsbrüche echt kleiner als* x*. Falls* i *ungerade ist, so sind alle Glieder der in diesem Fall streng monoton fallenden Folge der Nebennäherungsbrüche echt größer als* x.

(iv) Der Nenner und der Zähler eines Nebennäherungsbruchs, so wie sie in Definition 2.4.1 eingeführt wurden, sind stets teilerfremd.

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Lemma 1.2.8.
Für die zweite und dritte Aussage ergibt sich für $i > 1$ aus den Überlegungen zu den Näherungsnennern und -zählern des ersten Kapitels und unter Beachtung von Lemma 2.2.1:

Ist i gerade, so ist

$$\frac{A_{i-2}}{B_{i-2}} < \frac{1 \cdot A_{i-1} + A_{i-2}}{1 \cdot B_{i-1} + B_{i-2}} < \ldots < \frac{(b_i - 1)A_{i-1} + A_{i-2}}{(b_i - 1)B_{i-1} + B_{i-2}} < \frac{A_i}{B_i}\,.$$

Ist i ungerade, so ist

$$\frac{A_{i-2}}{B_{i-2}} > \frac{1 \cdot A_{i-1} + A_{i-2}}{1 \cdot B_{i-1} + B_{i-2}} > \ldots > \frac{(b_i - 1)A_{i-1} + A_{i-2}}{(b_i - 1)B_{i-1} + B_{i-2}} > \frac{A_i}{B_i}\,.$$

Die vierte Behauptung folgt direkt aus der Identität

$$(cA_{i-1} + A_{i-2})B_{i-1} - (cB_{i-1} + B_{i-2})A_{i-1} = (-1)^{i-1}\,,$$

welche nach Lemma 1.2.4 (i) für alle $c \in \mathbb{N}$ gültig ist. □

Mit diesen Eigenschaften der Nebennäherungsbrüche kann man folgende Aussage herleiten, welche die Einführung dieser Zahlen rechtfertigt:

2.4.3. Satz. *Ist eine rationale Zahl* $\frac{a}{b}$ *eine Bestapproximation erster Art an eine reelle Zahl* x*, so muss es sich schon um eine Näherungszahl handeln.*

Beweis. [PER, II, §16, Satz21] □

Dieser Satz lässt sich, im Gegensatz zu den Hauptnäherungsbrüchen, für die Nebennäherungsbrüche nicht vollständig umkehren. Es gilt aber:

2.4.4. Satz. *Ein Nebennäherungsbruch*

$$\frac{cA_{i-1} + A_{i-2}}{cB_{i-1} + B_{i-2}},$$

mit $1 \leq i \leq b_i - 1$*, ist genau dann eine Bestapproximation erster Art an eine Zahl* x *mit der Kettenbruchentwicklung* $[b_0, b_1, b_2, \ldots]$*, wenn entweder* $2c > b_i$ *ist, oder* $2c = b_i$ *gilt und zusätzlich* $[b_i, b_{i-1}, \ldots, b_2, b_1] > [b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots]$ *ist.*

Beweis. [PER, II, §16, Satz22] □

Dieser Satz sagt uns, dass folglich, wenn man die Nebennäherungsbrüche wie in Definition 2.4.1 ordnet, maximal die zweite Hälfte, welche die vergleichsweise größeren Nenner besitzt, Bestapproximationen erster Art darstellen.

Die praktischen Anwendungen dieser Sachverhalte sind sehr interessant, weshalb wir bei den beiden vorangegangenen Sätzen jeweils nur auf den Beweis von Perron verwiesen haben. Stattdessen betrachten wir abschließend zur Veranschaulichung ein ausführliches Beispiel, welches auch bei [PER, II, §16] nachzulesen ist.

2.4.5. Beispiel. Wir berechneten in Beispiel 2.2.2 aus dem Anfang der Kettenbruchentwicklung

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots]$$

die folgenden Hauptnäherungsbrüche:

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}.$$

Die zugehörigen Nebennäherungsbrüche sind deshalb von der Form

$$\begin{aligned} &\frac{3c+1}{c} && \text{, mit } 1 \leq c \leq 6\,, \\ &\frac{22c+3}{7c+1} && \text{, mit } 1 \leq c \leq 14\,, \\ &\frac{355c+333}{113c+106} && \text{, mit } 1 \leq c \leq 291\,, \end{aligned}$$

wobei keine Brüche der Form $\frac{333c+22}{106c+7}$ in Frage kommen, da $b_3 = 1$ ist, sodass wir schon für $c = 1$ den nächsten Hauptnäherungsbruch erhalten.

Die Nebennäherungsbrüche, welche Bestapproximationen erster Art an π sind, erhält man in den jeweiligen Fällen aus

$$\begin{aligned} 4 \leq c \leq 6\,, &\quad \text{also: } \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}\,, \\ 8 \leq c \leq 14\,, &\quad \text{also: } \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}\,, \\ 147 \leq c \leq 291\,, &\quad \text{also: } \frac{52\,518}{16\,717}, \frac{52\,873}{16\,830}, \ldots, \frac{103\,638}{32\,989}\,. \end{aligned}$$

Im letzten Fall müssen wir noch überprüfen, ob auch für $c = 146$ eine Bestapproximation erster Art vorliegt. Laut Satz 2.4.4 ist es dazu notwendig, dass

$$[b_4, b_3, b_2, b_1] > [b_4, b_5, b_6, \ldots]$$

gilt. Einsetzen liefert

$$[292, 1, 15, 7] > [292, 1, 1, \ldots],$$

was tatsächlich richtig ist, da $15 > 1$ gilt, und dies die beiden ersten Teilnenner sind, in denen sich die beiden Kettenbrüche unterscheiden. Also ist auch $\frac{355\cdot 146+333}{113\cdot 146+106} = \frac{52\,163}{16\,604}$ eine Bestapproximation erster Art an π.

Die vorangegangenen Überlegungen lieferten uns also für die Kreiszahl π die folgenden Näherungszahlen mit minimalem Nenner:

$$\frac{3}{1}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92},$$

$$\frac{311}{99}, \frac{333}{106}, \frac{355}{133}, \frac{52\,163}{16\,604}, \frac{52\,518}{16\,717}, \frac{52\,873}{16\,830}, \ldots, \frac{103\,638}{32\,989}.$$

Oder, wenn man sie der Größe nach anordnet:

$$\frac{3}{1} < \frac{179}{57} < \frac{201}{64} < \frac{223}{71} < \frac{245}{78} < \frac{267}{85} < \frac{289}{92} < \frac{311}{99} < \frac{333}{106} < \frac{52\,163}{16\,604} < \frac{52\,518}{16\,717}$$

$$< \frac{52\,873}{16\,830} < \ldots < \frac{103\,638}{32\,989} < \pi < \frac{355}{113} < \frac{22}{7} < \frac{19}{6} < \frac{16}{5} < \frac{13}{4}.$$

2.5. Schärfere Abschätzungen

Nach dem Näherungsgesetz hat jeder Näherungsbruch $\frac{A_i}{B_i}$ einer Zahl x die Eigenschaft, dass

$$\left| x - \frac{A_i}{B_i} \right| < \frac{1}{B_i^2}$$

gilt. Man kann noch viel bessere Approximationen angeben. Allerdings muss man dafür in Kauf nehmen, dass diese nicht mehr für alle Näherungsnenner gelten. Eine erste Abschätzung dieser Art ist:

2.5.1. Satz. *Von zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen einer reellen Zahl x erfüllt mindestens einer die Ungleichung*

$$\left| x - \frac{A_i}{B_i} \right| < \frac{1}{2B_i^2}.$$

Beweis. Da x nach Lemma 2.2.1 zwischen $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$ und $\frac{A_i}{B_i}$ liegt, gilt

$$\left| x - \frac{A_i}{B_i} \right| + \left| x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| = \left| \frac{A_i}{B_i} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| = \frac{1}{B_i B_{i-1}} < \frac{1}{2B_i^2} + \frac{1}{2B_{i-1}^2},$$

wobei im letzten Schritt, welcher aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel folgt, nur dann Gleichheit auftreten kann, falls $B_{i-1} = B_i$ gilt, was aber nicht möglich ist. Somit folgt schon die Behauptung. [KHI, II, §8] $\square$

Nach dem Näherungsgesetz kann ein irreduzibler Bruch $\frac{A}{B}$ nur dann ein Näherungsbruch einer reellen Zahl x sein, wenn $\left| x - \frac{A}{B} \right| < \frac{1}{B^2}$ ist. Diese Bedingung ist jedoch nur notwendig. Das vorangegangene Lemma besitzt die folgende Umkehrung, welche eine notwendige und hinreichende Bedingung liefert:

2.5.2. Satz. *Jeder irreduzible Bruch $\frac{A}{B}$, der der Ungleichung*

$$\left|x-\frac{A}{B}\right|<\frac{1}{2B^2}$$

genügt, ist ein Näherungsbruch der Zahl x.

Beweis. Nach Satz 2.3.1 genügt es zu zeigen, dass $\frac{A}{B}$ eine Bestapproximation zweiter Art von x ist.
Falls für $D>0$ und $\frac{C}{D}\neq\frac{A}{B}$ gilt, dass

$$|Dx-C|\leq|Bx-A|<\frac{1}{2B}\,,$$

so folgt

$$\left|x-\frac{C}{D}\right|<\frac{1}{2BD}\,,$$

und damit

$$\left|\frac{C}{D}-\frac{A}{B}\right|\leq\left|x-\frac{C}{D}\right|+\left|x-\frac{A}{B}\right|<\frac{1}{2BD}+\frac{1}{2B^2}=\frac{B+D}{2B^2D}\,.$$

Andererseits muss, da $\frac{C}{D}\neq\frac{A}{B}$ ist, schon

$$\left|\frac{C}{D}-\frac{A}{B}\right|\geq\frac{1}{BD}$$

sein. In Verbindung mit der vorangegangen Gleichung erhalten wir also

$$\frac{1}{BD}<\frac{B+D}{2B^2D}\,,$$

was $D>B$ impliziert. Damit muss $\frac{A}{B}$ nach Definition 2.1.2 eine beste Approximation zweiter Art an x sein. [KHI, II, §8] □

Abschließend eine weitere Verschärfung, die man für allgemeine reelle Zahlen nicht verbessern kann:

2.5.3. Lemma. *Von drei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen einer reellen Zahl x erfüllt mindestens einer die Ungleichung*

$$\left|x-\frac{A_i}{B_i}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}B_i^2}\,.$$

Insbesondere ist diese Abschätzung scharf, denn: Falls $c<\frac{1}{\sqrt{5}}$ ist, gibt es irrationale Zahlen, für die die Ungleichung

$$\left|x-\frac{A}{B}\right|<\frac{c}{B^2}$$

nicht für unendlich viele rationale Zahlen $\frac{A}{B}$ gilt.

Vor dem Beweis zeigen wir noch eine Hilfsaussage (beide sind in [KHI, II, §8] nachzulesen). Dafür setzen wir für $k\geq 1$:

$$\varphi_i:=\frac{B_{i-2}}{B_{i-1}}\quad\text{und}\quad\psi_i:=\varphi_i+\beta_i\,.$$

2.5.4. Lemma. *Sind $i \geq 2$, $\psi_i \leq \sqrt{5}$ und $\psi_{i-1} \leq \sqrt{5}$, so gilt*

$$\varphi_i > \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Beweis. Wegen der allgemein gültigen Gleichungen

$$\frac{1}{\varphi_j} = \frac{B_j}{B_{j-1}} = b_j + \varphi_j \tag{2.5.1}$$

und

$$\beta_j = b_j + \frac{1}{\beta_{j+1}}\,,$$

folgt, dass

$$\frac{1}{\varphi_{j+1}} + \frac{1}{\beta_{j+1}} = \varphi_j + \beta_j = \psi_j\,.$$

Aus den Voraussetzungen erhält man deshalb:

$$\varphi_i + \beta_i \leq \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varphi_i} + \frac{1}{\beta_i} \leq \sqrt{5}\,.$$

Also gilt

$$(\sqrt{5} - \varphi_i)(\sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_i}) \geq 1\,,$$

bzw. weil φ_i rational ist:

$$5 - \sqrt{5}(\varphi_i + \frac{1}{\varphi_i}) > 0\,.$$

Weiter folgt, dass

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_i\right)^2 < \frac{1}{4}\,.$$

Damit erhalten wir wegen $\varphi_i > 0$:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_i < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_i > \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Dies liefert die Behautung. □

Beweis. (von Lemma 2.5.3) Angenommen, es existiert ein j so, dass für $i \in \{j, j-1, j-2\}$ gilt:

$$\left| x - \frac{A_i}{B_i} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}B_i^2}\,.$$

Dann folgt, unter Beachtung von Gleichung (1.1.2), dass

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{A_i}{B_i} \right| &= \left| \frac{A_i\beta_{i+1} + A_{i-1}}{B_i\beta_{i+1} + B_{i-1}} - \frac{A_i}{B_i} \right| \\ &= \frac{1}{B_i(B_i\beta_{i+1} + B_{i-1})} \\ &= \frac{1}{B_i^2(\beta_{i+1} + \varphi_{i+1})} \\ &= \frac{1}{B_i^2\psi_{i+1}}\,, \end{aligned}$$

also

$$\psi_{i+1} \leq \sqrt{5}$$

für $i \in \{j, j-1, j-2\}$. Mit der vorangegangenen Hilfsaussage folgt somit:

$$\varphi_j > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{und} \quad \varphi_{j+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Aus Gleichung (2.5.1) erhalten wir

$$b_j = \frac{1}{\varphi_{j+1}} - \varphi_j < \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1\,,$$

was aber nicht möglich ist. Damit war unsere Annahme falsch, und es folgt die Behauptung.

Zum Beweis des zweiten Teils der Aussage betrachten wir nochmals den Absolutbetrag von Gleichung (2.2.2):

$$\left| x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| = \frac{1}{B_{i-1}(B_{i-1}\beta_i + B_{i-2})} = \frac{1}{B_{i-1}^2(\beta_i + \frac{B_{i-2}}{B_{i-1}})}\,.$$

Die rechte Seite ist genau dann echt kleiner als $\frac{c}{B_{i-1}^2}$, wenn gilt:

$$\beta_i + \frac{B_{i-2}}{B_{i-1}} > c^{-1}\,.$$

Betrachten wir nun speziell den Kettenbruch, in dem alle Teilnenner 1 sind, also die Zahl

$$x = [1, 1, 1, \ldots]\,.$$

Zunächst wollen wir ihren Wert bestimmen: Für die Restzahlen erhält man dieselbe Kettenbruchentwicklung wie für x. Es muss also gelten:

$$x = 1 + \frac{1}{x}\,.$$

Das heißt, x ist Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Also:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,$$

wobei die andere Lösung der quadratischen Gleichung wegen $x > 1$ nicht in Frage kommt. Aus

$$\frac{B_{i-1}}{B_{i-2}} = [1, 1, \ldots, 1]\,,$$

wobei der Kettenbruch $i-1$ Einträge mit Wert 1 besitzt, folgt, dass sich diese Zahl für ein hinreichend großes i beliebig an $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ annähert. Also geht der Wert von $\beta_i + \frac{B_{i-2}}{B_{i-1}}$ für große i gegen

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}\,,$$

kann also auf keinen Fall größer als c^{-1} sein, womit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

2.5.5. Bemerkung. (i) Insbesondere zeigt der zweite Teil des Beweises des vorangegangenen Lemmas 2.5.3, dass die Ungleichung für alle Zahlen, in deren Kettenbruchentwicklung ab einem gewissen Index alle Teilnenner gleich 1 sind, scharf ist.

(ii) Die zur Kettenbruchentwicklung $[1, 1, 1, \ldots]$ gehörende Zahl $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wird der *goldene Schnitt* genannt. Diese Zahl tritt in den verschiedensten Gebieten der Mathematik (unter anderem zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks [RESC, 10, §5]), Biologie (zum Beispiel bei Sonnenblumen und Seesternen [BER, 97], [OLD, 3, §10]) und Chemie (bei Kristallen [HAU, II, 3]) auf, und wurde auch in die Architektur (zum Beispiel beim Rathaus zu Leipzig [BER, 97]), Kunst (unter anderem: Raffael Santi: *Die sixtinische Madonna* (1512/1513), Leonardo da Vinci: *Der vitruvianische Mensch* (1492)) und Musik (im Geigenbau) übernommen. In der Bildkomposition spielt die Unterteilung einer Strecke in zwei Teile, deren Längen im Verhältnis des goldenen Schnittes zueinander stehen, eine wichtige Rolle, da dies als besonders ästhetisch gilt. Man überlegt sich leicht, dass zwei Strecken genau dann im goldenen Schnitt zueinander stehen, wenn sich die größere zur kleineren Strecke verhält, wie die Summe aus beiden zur größeren.

Für die Näherungsbrüche des goldenen Schnittes erhält man:

$$0, 1, 1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8} \, .$$

Die Folge der Näherungsnenner bzw. -zähler entspricht also den *Fibonaccizahlen* (benannt nach Leonardo de Pisa, genannt Fibonacci (13. Jahrhundert)). Die Besonderheit dieser Zahlenfolge besteht darin, dass man die jeweils nächste Zahl als Summe der beiden vorangehenden erhält.

Der goldene Schnitt besitzt, da die Kettenbruchentwicklung ausschließlich Einsen enthält, von allen rationalen Zahlen den maximalen Abstand, und wird deshalb auch als die „irrationalste“ Zahl bezeichnet. Außerdem gibt es offenbar keine reelle Zahl, für welche die Folgen der Näherungsnenner und -zähler langsamer wachsen.

Kettenbrüche, die ein ähnlich einfaches Bildungsgesetz wie der goldene Schnitt aufweisen, untersuchen wir nun im nächsten Kapitel.

KAPITEL 3

Periodische Kettenbrüche

Unter den unendlichen Kettenbrüchen gibt es eine bestimmte Klasse, die bei der Erforschung der Arithmetik der Kettenbrüche eine grundlegende Rolle spielt: Die sogenannten periodischen Kettenbrüche, bei denen sich die Teilnenner ab einem gewissen Index regelmäßig wiederholen. Auf deren fundamentalen Eigenschaften, die in diesem Kapitel erarbeitet werden, baut ein wesentlicher Teil der restlichen vorliegenden Arbeit auf.

Nachdem wir die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit den periodischen Kettenbrüchen eingeführt haben, werden wir im zweiten Abschnitt die Menge aller reellen Zahlen mit einer solchen Kettenbruchentwicklung bestimmen. Im dritten Teil des Kapitels beschäftigen wir uns speziell mit reinperiodischen Kettenbrüchen, welche keinen nichtperiodischen Teil zu Beginn der Kettenbruchentwicklung besitzen. Bei deren Betrachtung erhalten wir unter anderem ein wichtiges Kriterium für die Länge dieser Vorperiode im allgemeinen Fall. Dies führt uns im letzten Abschnitt auf die Suche nach Zahlenpaaren, deren Kettenbruchentwicklung jeweils die umgekehrte Teilnennerfolge als Periode besitzt. In diesem Zusammenhang betrachten wir abschließend die Problemstellung, in welchen Fällen der Periodenanteil eine Symmetrie aufweist.

3.1. Definition und erste Eigenschaften

3.1.1. Definition. *Eine Kettenbruchentwicklung $x = [b_0, b_1, \ldots]$ heißt* periodisch, *mit Periode k, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $b_{m+k} = b_m$ für alle $m \geq n$ gilt. Wir schreiben dann*

$$x = [b_0, \ldots, b_{n-1}, \overline{b_n, \ldots, b_{n+k-1}}]\,,$$

und nennen die Zahlenfolge $b_n, \ldots, b_{n+k-1}$ die Periode*.*

Falls es keine Vorperiode *gibt, das heißt $n = 0$ gewählt werden kann, nennen wir den Kettenbruch* reinperiodisch *und schreiben abkürzend:*

$$x = [\overline{b_0, \ldots, b_{k-1}}]\,.$$

Im Gegensatz dazu heißt ein periodischer Kettenbruch mit Vorperiode gemischtperiodisch*.*

Ist k minimal mit der Eigenschaft, dass die Kettenbruchentwicklung periodisch ist, so nennen wir die Periode primitiv*, ansonsten* imprimitiv*.*

Bemerkung. (i) Ist im Folgenden die Rede von den Begriffen „Periode“ oder „Periodenlänge“, so betrachten wir immer den Fall einer primitiven Periode bzw. deren Länge.

(ii) Reinperiodische Kettenbrüche besitzen immer ein positives Anfangsglied, da dieses an einer späteren Stelle in der Kettenbruchentwicklung wieder vorkommt.

Damit sind dann auch alle Näherungszähler und -nenner positiv. Dies hat zur Folge, dass die beiden zugehörigen Zahlenfolgen jeweils streng monoton wachsend sind.

(iii) Die Periodizität der Teilnenner einer Kettenbruchentwicklung überträgt sich unmittelbar auch auf die Restzahlen β_i.

(iv) Man kann die Periode eines Kettenbruchs auch „verschieben", um zum Beispiel aus einem reinperiodischen Kettenbruch einen gemischtperiodischen zu erhalten. Es gilt nämlich:

$$[\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}] = [b_0, \overline{b_1, \ldots, b_{k-1}, b_0}] = [b_0, b_1, \overline{b_2, \ldots, b_{k-1}, b_0, b_1}] = \ldots .$$

Analog dazu kann man auch mehrere Perioden zu einer einzigen zusammenfassen, um so etwa aus einer primitiven eine imprimitive Periode zu konstruieren.

Bevor wir im nächsten Abschnitt zu tiefliegenderen Aussagen über periodische Kettenbrüche kommen, wollen wir nun zuerst in einem Spezialfall ihre Werte bestimmen:

3.1.2. Beispiel. Ein Kettenbruch der Form $x = [\overline{b}]$, mit $b \in \mathbb{N}$, dessen Teilnenner alle gleich sind, ist die einfachste Form eines reinperiodischen Kettenbruchs. Es gilt dann in Analogie zum Fall $b = 1$, den wir bereits im Beweis von Lemma 2.5.3 bearbeitet hatten:

$$x = b + \frac{1}{x} .$$

Das heißt, x ist Lösung einer quadratischen Gleichung und damit von der Form

$$x = \frac{b + \sqrt{4 + b^2}}{2} ,$$

wobei die andere Lösung der quadratischen Gleichung wegen $x > b$ nicht in Frage kommt.

3.2. Quadratische Irrationalzahlen

In diesem Abschnitt werden wir die Menge aller Zahlen, deren Kettenbruchentwicklung periodisch ist, bestimmen. Dazu führen wir zunächst den Begriff der quadratischen Irrationalzahl ein:

3.2.1. Definition. *Eine reelle irrationale Zahl, die einer quadratischen Gleichung*

$$ax^2 - bx - c = 0$$

mit ganzen Koeffizienten genügt, wobei $a > 0$ *sei, heißt* (reell-)quadratische Irrationalzahl.

Die Zahl $D = b^2 + 4ac$ *heißt die* Diskriminante *von* x. *Wegen*

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

ist $D > 0$.

Eine quadratische Irrationalzahl ist also von der Form $x = u + v\sqrt{d}$, mit $u, v \in \mathbb{Q}$, d positiv, rational und kein Quadrat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir weiter annehmen, dass d sogar in $\mathbb{N}$ liegt, da man rationale Zahlen so erweitern kann, dass der Nenner eine Quadratzahl ist. Die Menge der quadratischen Irrationalzahlen entspricht somit genau den Elementen der *reellquadratischen Zahlkörper* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, mit $d > 0$ quadratfrei.

Dass uns die Theorie der Kettenbrüche auch weitere interessante Ergebnisse über die Eigenschaften der reellquadratischen Zahlkörper liefert, werden wir im sechsten Kapitel sehen, wo wir uns ausführlicher mit dieser Thematik beschäftigen.

Mit den vorangehenden Definitionen lassen sich die zu periodischen Kettenbrüchen gehörenden Zahlen charakterisieren. Dies geschieht im nachfolgenden Satz, der auf Leonhard Euler (1707-1783) zurückgeht:

3.2.2. Satz. *(Euler) Ein periodischer Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalzahl dar.*

Beweis. *Reinperiodische Kettenbrüche.*
Für einen Kettenbruch der Form $x = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}]$ folgt aus $x = \beta_k = \beta_{2k} = \beta_{3k} = \ldots$ und Gleichung (1.2.3), dass für x gilt:

$$x = \frac{A_{k-1}x + A_{k-2}}{B_{k-1}x + B_{k-2}}\,.$$

Also muss x die quadratische Gleichung $B_{k-1}x^2 + (B_{k-2} - A_{k-1})x - A_{k-2} = 0$ lösen, und ist folglich von der Gestalt

$$x = \frac{A_{k-1} - B_{k-2} + \sqrt{(A_{k-1} - B_{k-2})^2 + 4B_{k-1}A_{k-2}}}{2B_{k-1}}\,,$$

wobei der Radikant kein Quadrat sein kann, da die Kettenbruchentwicklung unendlich ist.

Gemischtperiodische Kettenbrüche.
Für einen Kettenbruch der Form $x = [b_1, \ldots, b_{n-1}, \overline{b_n, \ldots, b_{n+k-1}}]$, mit $n > 0$, können wir die Ergebnisse des periodischen Falls verwenden, denn es ist

$$x = \frac{A_{n-1}\beta_n + A_{n-2}}{B_{n-1}\beta_n + B_{n-2}}\,,$$

wobei $\beta_n = [\overline{b_n, \ldots, b_{n+k-1}}]$ dem periodischen Anteil der Kettenbruchentwicklung von x entspricht. Also ist β_n aufgrund seiner reinperiodischen Kettenbruchentwicklung eine quadratische Irrationalzahl. Die Zahl x ist daher als rationaler Ausdruck in β_n ebenfalls eine quadratische Irrationalzahl. □

Bemerkenswerterweise lässt sich diese Aussage auch umkehren:

3.2.3. Satz. *(Lagrange) Der zu einer quadratischen Irrationalzahl gehörende Kettenbruch ist periodisch.*

M. Charves lieferte 1877 einen kurzen und eleganten Beweis für diesen Satz, der im Wesentlichen auf das Näherungsgesetz 2.2.3 zurückgreift, und zu Beispiel in [MSPI, 10] wiedergegeben wird. Diesem wollen wir folgen, da der Beweis von Lagrange [LAG, 6, §§53-59] erheblich länger und komplexer ist.

Beweis. Sei x eine quadratische Irrationalzahl, die der Gleichung

$$px^2 + qx + r = 0 \tag{3.2.1}$$

mit $p, q, r \in \mathbb{Z}$ genügt. Dann gilt mit Lemma 1.2.8:

$$x = \frac{A_{i-1}\beta_i + A_{i-2}}{B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}}\,.$$

Einsetzen in Gleichung (3.2.1) liefert:

$$p(A_{i-1}\beta_i + A_{i-2})^2 + q(A_{i-1}\beta_i + A_{i-2})(B_{i-1}\beta_i + B_{i-2}) + r(B_{i-1}\beta_i + B_{i-2})^2 = 0\,.$$

Das heißt, β_i genügt der Gleichung

$$P_i\beta_i^2 + Q_i\beta_i + R_i = 0\,, \tag{3.2.2}$$

mit

$$\begin{aligned} P_i &= pA_{i-1}^2 + qA_{i-1}B_{i-1} + rB_{i-1}^2\,, \\ Q_i &= 2pA_{i-1}A_{i-2} + q(A_{i-1}B_{i-2} + A_{i-2}B_{i-1}) + 2rB_{i-1}B_{i-2}\,, \\ R_i &= pA_{i-2}^2 + qA_{i-2}B_{i-2} + rB_{i-2}^2 = P_{i-1}\,, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

wobei P_i, und damit die linke Seite von (3.2.2), nicht identisch Null sein kann, denn aus $P_i = 0$ würde folgen, dass $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$ die Gleichung (3.2.1) löst, was im Widerspruch zu $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \in \mathbb{Q}$ steht.

Unser Ziel wird es sein, die Endlichkeit der Menge der P_i, Q_i und R_i zu zeigen. Denn dann gibt es nur endlich viele Gleichungen der Form (3.2.2), woraus folgt, dass es nur endlich viele β_i gibt, die ja gerade die Lösungen dieser Gleichung sind. Somit muss sich β_i ab einem gewissen Index regelmäßig wiederholen. Gleiches gilt für die Restzahl β_{i+1}, da diese durch β_i festgelegt ist. Induktiv folgt damit, dass die Kettenbruchentwicklung periodisch ist.

Aus dem Näherungsgesetz 2.2.3, das heißt der Abschätzung

$$\left| x - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right| < \frac{1}{B_{i-1}^2}$$

folgt: $A_{i-1} = xB_{i-1} + \frac{\delta_{i-1}}{B_{i-1}}$ mit $|\delta_{i-1}| < 1$. Einsetzen in die erste Gleichung von (3.2.3) liefert:

$$\begin{aligned} P_i &= p\left(xB_{i-1} + \frac{\delta_{i-1}}{B_{i-1}}\right)^2 + q\left(xB_{i-1} + \frac{\delta_{i-1}}{B_{i-1}}\right)B_{i-1} + rB_{i-1}^2 \\ &= B_{i-1}^2(px^2 + qx + r) + 2px\delta_{i-1} + p\frac{\delta_{i-1}^2}{B_{i-1}^2} + q\delta_{i-1}\,. \end{aligned}$$

Die erste Klammer entspricht (3.2.1), also

$$|P_i| < |2px| + |p| + |q| \tag{3.2.4}$$

für alle i. Die gleiche Beschränkung gilt wegen $R_i = P_{i-1}$ auch für R_i.

Bleibt noch zu zeigen, dass es nur endlich viele Q_i gibt. Für die Diskriminante der quadratischen Gleichung (3.2.2) ergibt sich aus dem Gleichungssystem (3.2.3):

$$\begin{aligned} Q_i^2 - 4P_iR_i &= (q^2 - 4pr)(A_{i-1}B_{i-2} - A_{i-2}B_{i-1})^2 \\ &= q^2 - 4pr\,, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus Lemma 1.2.4 folgt. Die Diskriminante ist also für alle i gleich, und mit der von Gleichung (3.2.1) identisch. Mit Hilfe von (3.2.4) kann man die Q_i nun abschätzen zu

$$\begin{aligned} Q_i^2 &\le 4\,|P_iR_i| + \left|q^2 - 4pr\right| \\ &< 4(|2px| + |p| + |q|)^2 + \left|q^2 + 4pr\right|\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

3.2.4. Bemerkung. (i) Oskar Perron gibt in [PER, III, §20] einen weiteren Beweis, der dieselben Hilfsmittel wie der Originalbeweis von Joseph Louis Lagrange (1736-1803) verwendet.

Aus diesem Beweis ergeben sich einige weitere Eigenschaften der periodischen Kettenbrüche:

(ii) Man erhält, dass die Restzahlen die Form

$$\beta_i = \frac{\sqrt{d} + U_i}{V_i},$$

besitzen, wobei U_i, V_i und $\frac{d-U_i^2}{V_i}$ ganze Zahlen sind. Wir werden diese Aussage nur im Spezialfall einer reinperiodischen Kettenbruchentwicklung benötigen. Das entsprechende Analogon können wir dort als Korollar 3.3.5 formulieren.

(iii) Ebenfalls bewiesen wird eine Aussage über die Periodenlänge, die wir ebenso ohne Beweis übernehmen: Die Periode der Kettenbruchentwicklung von $\frac{u+\sqrt{d}}{v}$, wobei man $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}^*$, $d \in \mathbb{N}$ und quadratfrei, sowie $\frac{d-u^2}{v} \in \mathbb{Z}$ voraussetzen muss, was aber ohne Einschränkung möglich ist, besitzt höchstens

$$2 \cdot \lfloor \sqrt{d} \rfloor^2$$

Glieder. Diese Abschätzung werden wir im vierten Abschnitt als Korollar 4.2.7 formulieren können.

3.2.5. Beispiel. (i) Lagrange gibt in seiner Arbeit [LAG, 6, §45] einleitend das folgende Beispiel, welches eine Verallgemeinerung von Beispiel 3.1.2 darstellt.

86. $$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \ldots}}}}$$

Es ist klar, dass, wenn man den Werth dieses Bruchs durch x bezeichnet,

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}}$$

ist, welches die Gleichung [$x = p + \frac{x}{xq+1}$, *oder* $(xq+1)x = p(xq+1) + x$, *oder* $x^2 q + x = pqx + p + x$, *oder*]

87. $$qx^2 - pqx - p = 0$$

giebt, aus welcher sich x finden lässt. Eben so verhält es sich, wenn die Periode mehrere Glieder hätte: Man würde für x immer eine Gleichung des zweiten Grades finden. Es kann auch kommen, dass der Kettenbruch im Anfange irregulair und nur erst an einem gewissen Gliede periodisch ist. Auch in diesem Falle lässt sich sein Werth auf dieselbe Weise finden und hängt immer nur von einer Gleichung des zweiten Grades ab.

(ii) Auf dem umgekehrten Weg kann man zum Beispiel die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ bestimmen:
Aus $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$ folgt

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\,.$$

Rekursives Einsetzen ergibt $\sqrt{2} = [1, 1+\sqrt{2}] = [1, 2, 1+\sqrt{2}]$. Induktiv erhält man schließlich

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}]\,.$$

Mit der Form der Kettenbruchentwicklungen von Quadratwurzeln aus rationalen bzw. natürlichen Zahlen werden wir uns in Kapitel 4 ausführlich beschäftigen.

Damit haben wir die Menge der Zahlen mit periodischer Kettenbruchentwicklung bestimmt, und können uns der Frage, für welche Zahlen die zugehörige Entwicklung in einen Kettenbruch keine Vorperiode besitzt, zuwenden.

3.3. Reinperiodische Kettenbrüche

Wir wollen in diesem Abschnitt die Menge der quadratischen Irrationalzahlen, deren Kettenbruchentwicklung reinperiodisch ist, bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst noch zwei geeignete neue Begriffe.

3.3.1. Definition. *Für $x = u + v\sqrt{d}$, mit $u, v \in \mathbb{Q}$ sowie $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, heißt*

$$\overline{x} := u - v\sqrt{d}$$

die zu x konjugierte Zahl.

Somit können wir die folgende Bezeichnung einführen:

3.3.2. Definition. *Eine quadratische Irrationalzahl heißt* reduziert*, wenn sie echt größer als 1 ist, und ihre Konjugierte zwischen -1 und 0 liegt.*

3.3.3. Beispiel. Es gilt für den goldenen Schnitt:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ und } -1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\,,$$

das heißt, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist reduziert. Die Kettenbruchentwicklung ihrer Konjugierten lautet wegen $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$ also

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = [0, \overline{1}]\,.$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen lässt sich die Menge der Zahlen mit reinperiodischer Kettenbruchentwicklung eindeutig charakterisieren. Der folgende Satz geht auf den französischen Mathematiker Évariste Galois (1811-1832) zurück.

3.3.4. Satz. *(Galois) Ein Kettenbruch ist genau dann reinperiodisch, wenn er eine reduzierte quadratische Irrationalzahl darstellt.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$“ Sei die Kettenbruchentwicklung von x reinperiodisch, also $x = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}]$. Dann gilt $x = b_0 + \frac{1}{\beta_1} > 1$, da $b_0 \geq 1$ und $\beta_1 > 0$. Bleibt zu zeigen, dass die zu x konjugierte Zahl $\overline{x}$ zwischen -1 und 0 liegt. Wir haben im Beweis von Satz 3.2.2 gesehen, dass x und $\overline{x}$ die Nullstellen der Gleichung

$$B_{k-1}x^2 + (B_{k-2} - A_{k-1})x - A_{k-2} = 0$$

sind. Da $x > 0$ ist, genügt es zu zeigen, dass die Funktion

$$f(x) := B_{k-1}x^2 + (B_{k-2} - A_{k-1})x - A_{k-2}$$

zwischen -1 und 0 einen Vorzeichenwechsel besitzt. Es gilt $f(0) = -A_{k-2} < 0$, da die Kettenbruchentwicklung als reinperiodisch vorausgesetzt wurde und somit $A_{k-2} > 0$ gilt. Weiter ist $f(-1) = (B_{k-1} - B_{k-2}) + (A_{k-1} - A_{k-2}) > 0$, da die Ausdrücke in den Klammern echt größer als Null sind, was ebenfalls aus der Monotonie der Näherungsnenner bzw. -zähler folgt. Also gilt $-1 < \overline{x} < 0$, und x ist reduziert.

„$\Leftarrow$“ Sei $x = u + v\sqrt{d}$ eine reduzierte quadratische Irrationalzahl und $\overline{x}$ ihre Konjugierte, sodass gilt: $x > 1$ und $-1 < \overline{x} < 0$. Wir bezeichnen mit γ_i die zu β_i konjugierte Zahl. Es folgt mit $x = b_0 + \frac{1}{\beta_1}$ durch Konjugieren: $\overline{x} = b_0 + \frac{1}{\gamma_1}$. Wegen $b_0 \geq 1$ erhält man daraus

$$\frac{1}{\gamma_1} = \overline{x} - b_0 < -b_0 \leq -1\,,$$

also

$$-1 < \gamma_1 < 0\,,$$

das heißt, β_1 ist reduziert. Induktiv erhält man, dass alle Restzahlen reduziert sind, womit immer $-1 < \beta_i < 0$ gilt. Das heißt, man erhält aus $\beta_i = b_i + \frac{1}{\beta_{i+1}}$ durch Konjugieren

$$\gamma_i = b_i + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \text{ bzw. } -\frac{1}{\gamma_{i+1}} = b_i - \gamma_i\,. \tag{3.3.1}$$

Da $-\gamma_i$ echt zwischen 0 und 1 liegt, folgt aus der letzten Gleichung, dass b_i die größte in $-\frac{1}{\gamma_{i+1}}$ enthaltene ganze Zahl ist.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir den eigentlichen Beweis durch Widerspruch geben: Angenommen, die Kettenbruchenwicklung von x wäre nicht reinperiodisch, das heißt, $x = [b_0, \ldots, b_{n-1}, \overline{b_n, \ldots, b_{n+k-1}}]$, also insbesondere $b_{n-1} \neq b_{n+k-1}$. Wegen der Periodizität muss $\beta_n = \beta_{n+k}$, also auch $\gamma_n = \gamma_{n+k}$ bzw. $-\frac{1}{\gamma_n} = -\frac{1}{\gamma_{n+k}}$ gelten. Nach Gleichung (3.3.1) folgt dann aber $b_{n-1} = b_{n+k-1}$, im Widerspruch zur Annahme.

Durch absteigende Induktion erhält man, dass die Kettenbruchentwicklung von x schon reinperiodisch sein muss. [PER, III, §22] □

Bemerkung. Im Beweis dieses Satzes klingt schon an, dass die Kettenbruchentwicklungen zweier zueinander konjugierter Zahlen eine gewisse Ähnlichkeit aufweisen. Dies werden wir in Abschnitt 3.4 weiter verfolgen.

Eine nützliche Eigenschaft der Restzahlen, die wir in obigem Beweis gezeigt haben, wollen wir nochmals festhalten:

3.3.5. Korollar. *Ist x eine reduzierte quadratische Irrationalzahl, so gilt dies auch für die Restzahlen β_i der zugehörigen Kettenbruchentwicklung.*

Als weitere Folgerung aus den beiden vorangegangenen Sätzen erhalten wir eine Abschätzung über die Länge der Vorperiode eines periodischen Kettenbruchs, die sich im Weiteren als sehr nützlich herausstellen wird.

3.3.6. Lemma. *Die Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalzahl x, wobei $x > 1$, mit Konjugierter $\overline{x}$ besitzt*

(i) *für $-1 < \overline{x} < 0$ reine Periodizität*

(ii) *für $\overline{x} < -1$ genau ein Glied vor der Periode*

(iii) *für $\overline{x} > 0$ mindestens ein Glied vor der Periode*

Beweis. (i) Dies entspricht Satz 3.3.4.

(ii) In diesem Fall ist x nicht reduziert, aber β_1. Denn wenn wir $\overline{\beta}_1 = \gamma_1$ setzen gilt: $-1 > \overline{x} = b_0 + \frac{1}{\gamma_1} > \frac{1}{\gamma_1}$, woraus schon $-1 < \gamma_1 < 0$ folgt.

(iii) Die Negation von Satz 3.3.4 liefert das Behauptete. □

3.3.7. Beispiel. (i) Ein Blick zurück auf Beispiel 3.4.6 bestätigt unsere Ergebnisse.

(ii) Die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{q}$, mit $q \in \mathbb{Q}$ und kein Quadrat, ist nach Lemma 3.3.6 gemischtperiodisch, die Vorperiode besitzt die Länge 1.

Mit den Aussagen aus dem folgenden Abschnitt können wir weitere interessante Eigenschaften der im zweiten Bespiel betrachteten Kettenbruchentwicklung festhalten. Dies ist Bestandteil des vierten Kapitels.

3.4. Inverse und symmetrische Perioden

3.4.1. Definition. *Die zu $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$* inverse Periode *ist die Periode*

$$b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0 .$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, ausgehend von einer gegebenen Zahl mit periodischer Kettenbruchenentwicklung, diejenige Zahl mit der inversen Periode zu finden. Dabei stoßen wir wiederum auf den Begriff der konjugierten Zahl, wie der folgende Satz zeigt:

3.4.2. Satz. *Besitzt x eine reinperiodische Kettenbruchentwicklung, also*

$$x = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-2}, b_{k-1}}] ,$$

und ist $\overline{x}$ die x zu konjugierte Zahl, so gilt: Die Kettenbruchentwicklung von $-\frac{1}{\overline{x}}$ ist reinperiodisch und die Periode ist invers zur Periode in der Entwicklung von x, das heißt

$$-\frac{1}{\overline{x}} = [\overline{b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_1, b_0}] .$$

Beweis. Sei $x = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}]$. Wir haben im vorangegangenen Abschnitt gesehen, dass dann gilt:

$$x = b_0 + \frac{1}{\beta_1},\ \beta_1 = b_1 + \frac{1}{\beta_2},\ \ldots,\ \beta_{k-2} = b_{k-2} + \frac{1}{\beta_{k-1}},\ \beta_{k-1} = b_{k-1} + \frac{1}{x} ,$$

und

$$\overline{x} = b_0 + \frac{1}{\gamma_1},\ \gamma_1 = b_1 + \frac{1}{\gamma_2},\ \ldots,\ \gamma_{k-2} = b_{k-2} + \frac{1}{\gamma_{k-1}},\ \gamma_{k-1} = b_{k-1} + \frac{1}{\overline{x}} ,$$

wobei wiederum γ_i die zu β_i konjugierte Zahl sei. Diese Gleichungen lassen sich umstellen zu

$$-\frac{1}{\overline{x}} = b_{k-1} - \gamma_{k-1},\ -\frac{1}{\gamma_{k-1}} = b_{k-2} - \gamma_{k-2},\ \ldots,\ -\frac{1}{\gamma_2} = b_1 - \gamma_1,\ -\frac{1}{\gamma_1} = b_0 - x\,.$$

Wir setzen für $i = 1, \ldots, k-1$:

$$-\frac{1}{\overline{x}} = \delta_0,\ -\frac{1}{\gamma_i} = \delta_{k-i}\,.$$

Da β_i reduziert ist, also $-1 < \gamma_i < 0$ gilt, sind die δ_i alle größer als 1 und man erhält

$$\delta_0 = b_{k-1} + \frac{1}{\delta_1},\ \delta_1 = b_{k-2} + \frac{1}{\delta_2},\ \ldots,\ \delta_{k-2} = b_1 + \frac{1}{\delta_{k-1}},\ \delta_{k-1} = b_0 + \frac{1}{\delta_0}\,,$$

das heißt, wir haben die Restzahlen von $-\frac{1}{\overline{x}}$ konstruiert. Damit folgt durch rekursives Einsetzen:

$$-\frac{1}{\overline{x}} = [\overline{b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_1, b_0}]\,.$$

[PER, III, §23] □

Bevor wir eine Folgerung aus diesem Satz betrachten, ist es sinnvoll, eine weitere Bezeichnung einzuführen.

3.4.3. Definition. *Zwei irrationale Zahlen β, γ heißen* äquivalent*, wenn für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = \pm 1$ gilt:*

$$\gamma = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}\,,$$

Wie man leicht verifiziert, ist dies eine Äquivalenzrelation.

Weiterhin folgt, wenn man speziell $a = -1$, $c = 0$ und $d = 1$ wählt, dass zwei irrationale Zahlen mit ganzzahliger Summe äquivalent sind.

3.4.4. Proposition. *Die Kettenbruchentwicklungen zweier irrationaler Zahlen stimmen genau dann ab einem gewissen Teilnenner überein, wenn die Zahlen äquivalent zueinander sind.*

Diese Aussage erhält man mittels einer Folgerung aus dem Näherungsgesetz Satz 2.2.3. Da weiterhin ein tieferer Einstieg in die Theorie der äquivalenten Zahlen notwendig ist (vgl. [HAWR, X, §11]), sei der interessierte Leser auf den Beweis von Perron [PER, II, §17, Satz23] verwiesen.

Damit erhalten wir aus Satz 3.4.2 schließlich die folgende Aussage:

3.4.5. Satz. *Die Kettenbruchentwicklungen zweier zueinander konjugierter quadratischer Irrationalzahlen haben inverse Perioden.*

Beweis. Es sei $x = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \overline{b_n, \ldots, b_{n+k+1}}]$, also

$$x = \frac{A_{n-1}\beta_n + A_{n-2}}{B_{n-1}\beta_n + B_{n-2}}\,, \tag{3.4.1}$$

mit $\beta_n = [\overline{b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+k+1}}]$. Nach Satz 3.4.2 ist dann, wobei γ_n die zu β_n konjugierte Zahl bezeichnet:

$$-\frac{1}{\gamma_n} = [\overline{b_{n+k+1}, \ldots, b_{n+1}, b_n}]\,.$$

Andererseits erhält man aus (3.4.1) durch Konjugieren

$$\overline{x} = \frac{A_{n-1}\gamma_n + A_{n-2}}{B_{n-1}\gamma_n + B_{n-2}} = \frac{A_{n-2}(-\frac{1}{\gamma_n}) + (-A_{n-1})}{B_{n-2}(-\frac{1}{\gamma_n}) + (-B_{n-1})}$$

Das heißt, $\overline{x}$ und $-\frac{1}{\gamma_n}$ sind äquivalent, und ihre Kettenbruchentwicklungen stimmen ab einer gewissen Stelle überein. Somit hat $\overline{x}$ nach eventuellem Verschieben, wie im nachfolgenden Beispiel vorgeführt, die Periode $b_{n+k+1}, \ldots, b_{n+1}, b_n$, also die Inverse zur Periode von x. [PER, III, §23] □

3.4.6. Beispiel. Man findet zum Beispiel

$$\frac{14-\sqrt{37}}{3} = [2,1,1,\overline{1,3,2}]$$

und

$$\begin{aligned}\frac{14+\sqrt{37}}{3} &= [6,\overline{1,2,3}]\\ &= [6,1,\overline{2,3,1}]\,,\end{aligned}$$

das heißt, es ist unter Umständen notwendig die Periode der konjugierten Zahl an einer geeigneten Stelle beginnen zu lassen.

In Verbindung mit Satz 3.4.2 und der Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung ergibt sich aus dem letzten Satz ohne weitere Rechnung:

3.4.7. Korollar. *Ist die Kettenbruchentwicklung von x reinperiodisch, so ist der zu $\overline{x}$ gehörende Kettenbruch gemischtperiodisch.*

Nun wollen wir noch betrachten, wie sich die Inversion auf die Restzahlen auswirkt.

3.4.8. Lemma. *Sind*

$$\frac{\sqrt{d}+U_0}{V_0}, \frac{\sqrt{d}+U_1}{V_1}, \ldots, \frac{\sqrt{d}+U_{k-1}}{V_{k-1}},$$

wobei $d-U_0^2$ durch V_0 teilbar ist, die Restzahlen

$$x, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$$

von $x = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}]$, so sind die Restzahlen des Kettenbruchs $[\overline{b_{k-1}, \ldots, b_0}]$ mit der inversen Periode von der Form

$$\frac{\sqrt{d}+U_0}{V_{k-1}}, \frac{\sqrt{d}+U_{k-1}}{V_{k-2}}, \frac{\sqrt{d}+U_{k-2}}{V_{k-3}}, \ldots, \frac{\sqrt{d}+U_1}{V_0}\,.$$

Beweis. Wir setzen

$$V_{-1} := \frac{d-U_0^2}{V_0}\,,$$

wobei es sich wegen der gemachten Voraussetzung dabei um eine ganze Zahl handelt. Diese erfüllt offenbar die Gleichung $d-U_{i+1}^2 = V_iV_{i+1}$, welche wir nun noch für alle $i \geq 0$ beweisen wollen: Einsetzen in die Gleichung $\beta_i = b_i + \frac{1}{\beta_{i+1}}$ liefert

$$\frac{\sqrt{d}+U_i}{V_i} = b_i + \frac{V_{i+1}}{\sqrt{d}+U_{i+1}}\,.$$

Nach Durchmultiplizieren mit den Nennern ist dies äquivalent zu

$$d + U_iU_{i+1} + (U_i + U_{i+1})\sqrt{d} = b_iV_i\sqrt{d} + b_iV_iU_{i+1} + V_iV_{i+1}\,.$$

Wegen der Irrationalität der $\sqrt{d}$ erhalten wir die beiden Gleichungen

$$d + U_iU_{i+1} = b_iV_iU_{i+1} + V_iV_{i+1}$$

und

$$U_i + U_{i+1} = b_iV_i\,. \tag{3.4.2}$$

Multipliziert man die zweite mit U_{i+1} und subtrahiert sie anschließend von der ersten Gleichung, so findet man die gesuchte Identität $d - U_{i+1}^2 = V_iV_{i+1}$.

Damit können wir nun die Darstellung der Restzahlen des Kettenbruchs mit der inversen Periode herleiten. Nach Satz 3.4.2 sind die Restzahlen des Kettenbruchs mit der inversen Periode

$$-\frac{1}{\overline{x}} = [\overline{b_{k-1}, \ldots, b_0}]$$

von der Form

$$-\frac{1}{\overline{x}} = -\frac{1}{\gamma_0}, -\frac{1}{\gamma_{k-1}}, -\frac{1}{\gamma_{k-2}}, \ldots, -\frac{1}{\gamma_2}, -\frac{1}{\gamma_1}\,,$$

wobei $\gamma_i = \overline{\beta}_i$ sei. Dann ist aber wegen

$$\beta_i = \frac{\sqrt{d} + U_i}{V_i} \quad \text{und somit} \quad \gamma_i = \frac{-\sqrt{d} + U_i}{V_i}$$

auch

$$-\frac{1}{\gamma_i} = \frac{V_i}{\sqrt{d} - U_i} = \frac{V_i(\sqrt{d} + U_i)}{d - U_i^2}\,.$$

Mit der bereits bewiesenen Gleichung $d - U_{i+1}^2 = V_iV_{i+1}$ erhalten wir

$$-\frac{1}{\gamma_i} = \frac{\sqrt{d} + U_i}{V_{i-1}}\,.$$

Die Restzahlen von $-\frac{1}{\overline{x}}$ sind also der Reihe nach

$$\frac{\sqrt{d} + U_0}{V_{-1}}, \frac{\sqrt{d} + U_{k-1}}{V_{k-2}}, \frac{\sqrt{d} + U_{k-2}}{V_{k-3}}, \ldots \frac{\sqrt{d} + U_2}{V_1}, \frac{\sqrt{d} + U_1}{V_0}\,.$$

Wir müssen noch den Nenner des ersten Bruchs umschreiben: Wenn man $x = \beta_k$, also $U_0 = U_k$ und $V_0 = V_k$, beachtet, so liefert uns wiederum die eingangs gezeigte Gleichheit, dass

$$V_{-1}V_0 = d - U_0^2 = d - U_k^2 = V_{k-1}V_k = V_{k-1}V_0\,,$$

also $V_{-1} = V_{k-1}$ gilt. Damit besitzen alle Restzahlen des Kettenbruchs mit der inversen Periode die behauptete Darstellung. [PER, III, §23] □

Abschließend wollen wir uns noch der Frage nach der Klassifizierung aller Kettenbrüche mit *symmetrischer Periode*, also denjenigen mit einer Periode der Form $b_1b_2, b_3, \ldots, b_3, b_2, b_1$, zuwenden.

Seien x und $\overline{x}$ zueinander konjugiert und äquivalent, was zum Beispiel für $\sqrt{q}$ und $-\sqrt{q}$, mit $q \in \mathbb{Q}$ quadratfrei, gilt. Dann hat $\overline{x}$ nach Satz 3.4.5 die gleiche Periode wie x und nach Proposition 3.4.5 die Inverse. Daraus folgt aber *nicht*, dass die Perioden von x und $\overline{x}$ symmetrisch sind. Ist nämlich wie in Beispiel 3.4.6 die Periode von $\overline{x}$ erst dann invers zu derjenigen von x, wenn man sie an einer geeigneten Stelle beginnen lässt, so besteht die Periode von x aus zwei symmetrischen Teilen. Denn: Ist etwa

$$b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+k-1}$$

die Periode von x, dann gibt es einen Index i, sodass die Periode

$$b_{n+i}, b_{n+i+1}, \ldots, b_{n+k-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+i-1}$$

zur voherigen invers ist. Teilt man die Periode von x in die beiden Abschnitte

$$b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+i-1} \text{ und } b_{n+1}, b_{n+i+1}, \ldots, b_{n+k-1}$$

und die von $\overline{x}$ in

$$b_{n+i}, b_{n+i+1}, \ldots, b_{n+k-1} \text{ und } b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+i-1}\,,$$

so folgt, dass jeder der Abschnitte symmetrisch ist, da die Perioden zueinander invers sein müssen. Nur wenn $i = 0$ gilt, ist die Periode also selbst symmetrisch.

3.4.9. Beispiel. Addiert man zu $\frac{\sqrt{7}+3}{2}$ deren konjugierte Zahl, so erhält man 3, das heißt, die beiden Zahlen sind äquivalent. Man erhält:

$$\frac{\sqrt{7}+3}{2} = [2, \overline{1, 4, 1, 1}]\,.$$

Die Periode besteht also aus den beiden symmetrischen Teilen $1, 4, 1$ und 1.

Zwischenbilanz

Um unsere bisherigen Ergebnisse zusammenzufassen, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Definition. *Man nennt eine reelle Zahl* algebraisch vom Grad n, *wenn sie einer Gleichung der Form*

$$f(x) = 0\,,$$

wobei $f(x)$ ein rationales, irreduzibles Polynom vom Grad n ist, genügt. Alle nicht-algebraischen Zahlen werden transzendent *genannt.*

Rückblickend verleiten also diese ersten drei Kapitel zur Annahme, dass für algebraische $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grad aus der Kettenbruchentwicklung abgelesen werden kann. In Kapitel 1 sahen wir, dass α genau dann algebraisch vom Grad 1 ist, wenn die zugehörige Kettenbruchentwicklung endlich ist. Die Sätze von Euler und Lagrange implizieren, dass α genau dann algebraisch vom Grad 2 ist, wenn die zugehörige Kettenbruchentwicklung unendlich und periodisch ist.

Für algebraische α vom Grad ≥ 3 wurden allerdings noch keine ähnlichen Aussagen entdeckt. Beispielsweise lässt der Anfang der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt[3]{2}$ keine Regelmäßigkeit erkennen:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} \quad = \quad & [1,3,1,5,1,1,4,1,1,8,1,14,1,10,2,1,4,12,2,3,2,1,3,4,1,1,2,14,3,12,\\ & 1,15,3,1,4,534,1,1,5,1,1,121,1,2,2,4,10,3,2,2,\ldots]\,.\end{aligned}$$

Offen ist auch die Frage, ob es überhaupt algebraische Zahlen gibt, für die die Folge der Teilnenner unbeschränkt ist. Lediglich in den Fällen der endlichen und periodischen Kettenbrüche wissen wir, dass dies nicht möglich ist.

Überraschenderweise gelingt es aber, bei einigen transzendenten Zahlen nach Einführung einer geeigneten Schreibweise eine geschlossene Form der zugehörigen Kettenbruchentwicklung anzugeben. Dies werden wir im siebten Kapitel im Zusammenhang mit der eulerschen Zahl e ausführen.

Für die weiteren Betrachtungen ziehen wir uns allerdings auf die periodischen Kettenbruchentwicklungen zurück, deren Möglichkeiten bei weitem noch nicht ausgeschöpft sind.

KAPITEL 4

Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen

Wir werden in diesem Kapitel die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{q}$ betrachten, wobei q immer rational, echt größer als 1 und keine Quadratzahl sei. Aus dem vorangegangenen Kapitel wissen wir bereits, dass der Kettenbruch von $\sqrt{q}$ eine Periode enthalten muss. Deren besondere Form, auf welche wir schon zu Beginn stoßen werden, und die Bedeutung der Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzel aus einer natürlichen, nichtquadratischen Zahl d im Hinblick auf die Lösungen der Pellschen Gleichung, die wir im nächsten Kapitel auswerten, rechtfertigt unsere Untersuchungen diesbezüglich. Weiterhin werden wir Aussagen für die Periodenlänge und eine bemerkenswerte Abschätzung für die Größe der Teilnenner erhalten.

Die Gestalt der Periode der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{q}$ leiten wir im ersten Abschnitt her. Im zweiten Abschnitt beobachten wir zunächst, dass sich die Periodizität auf die Restzahlen überträgt, und man ausgehend von diesen Restzahlen eine Aussage über die Periodenlänge machen kann. Danach betrachten wir speziell die Kettenbruchentwicklungen von Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen. In diesem Fall stoßen wir nach einigen weiteren Überlegungen zunächst auf eine obere Schranke für deren Periodenlänge. Danach beweisen wir die bereits angesprochene interessante Abschätzung für die Größe der Teilnenner, bevor wir ein Kriterium dafür angeben, ob eine gegebene Kettenbruchentwicklung die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl darstellt. Im letzten Abschnitt werden wir uns dem Problem der Klassifizierung dieser Entwicklungen hinsichtlich ihrer Periodenlänge zuwenden, welches wir mit den vorangegangenen Überlegungen elegant lösen können.

4.1. Gestalt der Periode

Die Form der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{q}$ können wir fast direkt aus den Ergebnissen des vorangegangenen Kapitels ableiten.

4.1.1. Satz. *Sei $q > 1$ eine rationale Zahl und kein Quadrat in $\mathbb{Q}$. Dann gilt:*

$$\sqrt{q} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$$

Beweis. Es sei $\sqrt{q} = [b_0, b_1, \ldots]$. Nach dem Satz von Lagrange 3.2.3 ist die Kettenbruchentwicklung periodisch. Aus $\overline{\sqrt{q}} < -1$ folgt wegen Lemma 3.3.6 (ii), dass die Kettenbruchentwicklung von b_0 genau ein Glied vor der Periode besitzt.

Zum letzten Glied der Periode.

Es ist

$$\lfloor \sqrt{q} \rfloor + \sqrt{q} = b_0 + \sqrt{q} = [2b_0, b_1, \ldots]\,.$$

Also gilt $b_0 + \sqrt{q} > 1$ und $\overline{b_0 + \sqrt{q}} = b_0 - \sqrt{q}$ liegt echt zwischen -1 und 0. Das heißt, $b_0 + \sqrt{q}$ ist reduziert und nach dem Satz von Galois 3.3.4 ist die zugehörige

Kettenbruchentwicklung reinperiodisch. Damit haben wir die Gestalt des letzten Teilnenners der Periode etabliert:

$$\sqrt{q} = [b_0, \overline{b_1, \ldots, b_{k-1}, 2b_0}] \tag{4.1.1}$$

Zur Symmetrie der Periode.
Wir kennen bereits zwei verschiedene Darstellungen der ersten Restzahl:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{q} - b_0} \\ &= [\overline{b_1, \ldots, b_{k-1}, 2b_0}]\,. \end{aligned}$$

Die Zahl $-\frac{1}{\overline{\beta_1}}$ besitzt laut Satz 3.4.2 die inverse Periode, das heißt,

$$-\frac{1}{\overline{\beta_1}} = [\overline{2b_0, b_{k-1}, \ldots, b_1}]\,,$$

wobei andererseits auch

$$-\frac{1}{\overline{\beta_1}} = -(\overline{\sqrt{q} - b_0}) = b_0 + \sqrt{q}$$

gilt. Wegen Gleichung (4.1.1) lautet die Kettenbruchentwicklung der rechten Seite

$$b_0 + \sqrt{q} = [\overline{2b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}]\,.$$

Also ist

$$b_1 = b_{k-1},\ b_2 = b_{k-2},\ \ldots, b_{k-2} = b_2,\ b_{k-1} = 1\,,$$

und somit

$$\begin{aligned} b_0 + \sqrt{q} &= [\overline{2b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1}] \\ &= b_0 + [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]\,. \end{aligned}$$

Dies liefert schließlich: $\sqrt{q} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$. □

Dieser Satz lässt sich wie folgt umkehren:

4.1.2. Satz. *Ein Kettenbruch der Form $x = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$ stellt die Quadratwurzel aus einer rationalen, nichtquadratischen Zahl echt größer als 1 dar.*

Beweis. Da die Kettenbruchentwicklung von x periodisch ist, muss x nach dem Satz von Euler 3.2.2 eine quadratische Irrationalzahl sein. Dann ist

$$\beta_1 = [\overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}] = \frac{1}{x - b_0}\,,$$

also mit Satz 3.4.2: $b_0 - \overline{x} = [\overline{2b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1}]$. Daraus folgt

$$-\overline{x} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]\,,$$

und somit $-\overline{x} = x$. Da x und $\overline{x}$ Lösungen derselben quadratischen Gleichung sind, muss diese schon die Form $ax^2 - b = 0$, mit $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $b > a$, besitzen, das heißt $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. □

Aus dieser speziellen Form der Kettenbruchentwicklung lassen sich eine Menge bemerkenswerte Eigenschaften ableiten, die wir im Folgenden herleiten.

4.2. Aussagen zur Periodenlänge und Größe der Teilnenner

In diesem Abschnitt stehen die Suche nach einer oberen Schranke für die Größe der Teilnenner und Aussagen über die Periodenlänge der zu einer Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl gehörenden Kettenbruchentwicklung im Vordergrund. Dazu erarbeiten wir uns zunächst weitere Aussagen im Fall einer Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl echt größer als 1, und spezialisieren anschließend die gewonnenen Ergebnisse.

In einem ersten Schritt wollen wir die Form der Restzahlen β_i bestimmen. Aus Korollar 3.3.5 wissen wir bereits, dass diese aufgrund ihrer reinperiodischen Kettenbruchentwicklungen reduzierte quadratische Irrationalzahlen sein müssen. Ihre vollständige Form ergibt sich aus dem Algorithmus, der im folgenden Lemma vorgestellt wird.

4.2.1. Lemma. *Seien β_i die Restzahlen und a_i deren ganzzahlige Anteile in der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{q}$. Dann gilt:*

$$\beta_i = \frac{\sqrt{q} + U_i}{V_i}$$

mit ganzen Zahlen U_i, V_i. Genauer ist

$$U_0 = 0,\ U_1 = \lfloor \sqrt{q} \rfloor,\ V_0 = 1,\ V_1 = q - U_1^2\,,$$

und

$$U_{i+1} = a_i V_i - U_i,\ V_{i+1} = V_{i-1} + 2a_i U_i - a_i^2 V_i\,,$$

für $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zeigen die Darstellung von β_i durch vollständige Induktion. Für $i = 0$ ist dies offensichtlich. Der Induktionsschritt von i nach $i+1$ gilt mit folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
\beta_{i+1} &= \frac{1}{\beta_i - a_i} = \frac{V_i}{\sqrt{q} + U_i - a_i V_i} \\
&= \frac{V_n}{\sqrt{q} - U_{n+1}} = \frac{V_i(\sqrt{q} + U_{i+1})}{q - U_{i+1}^2} \\
&= \frac{V_i(\sqrt{q} + U_{i+1})}{V_i V_{i+1}} = \frac{\sqrt{q} + U_{i+1}}{V_{i+1}}\,,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Gleichung $q - U_{i+1}^2 = V_i V_{i+1}$ benutzt wurde, welche wir unter gleichen Voraussetzungen bereits im Beweis von Lemma 3.4.8 gezeigt hatten. [MSPI, 10] □

Wie man mit diesem Algorithmus im praktischen Fall arbeiten kann, werden wir in Beispiel 4.2.4 sehen.

Tatsächlich können wir weiterhin zeigen, dass auch die Nenner und Zähler der Restzahlen eine gewisse Symmetrie aufweisen. Die Entdeckung dieses Sachverhaltes geht auf Muir zurück.

4.2.2. Satz. *(Muir) Es seien $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{d}}{V_0} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$, mit d und V_0 positiv, ganz, sowie $V_0 < \sqrt{d}$ ein Teiler von d, und*

$$x = \beta_0 = \frac{\sqrt{d}}{V_0},\ \beta_1 = \frac{\sqrt{d} + U_1}{V_1},\ \beta_2 = \frac{\sqrt{d} + U_2}{V_2}, \ldots,\ \beta_k = \frac{\sqrt{d} + U_k}{V_k}$$

die zugehörigen Restzahlen, für die $\beta_{i+k} = \beta_i$ für alle i gilt, wobei k die Periodenlänge bezeichnet.
Dann sind die Folgen der U_i, V_i und b_i symmetrisch, das heißt, es gilt:

$$\begin{aligned} b_i &= b_{k-i}, & i &= 1,2,\ldots,k-1\,, \\ U_{i+1} &= U_{k-i}, & i &= 1,2,\ldots,k-1\,, \\ V_i &= V_{k-i}, & i &= 0,1,\ldots,k\,. \end{aligned}$$

Beweis. Die Behauptung für die b_i wurde bereits in Satz 4.1.1 gezeigt.
Ist k die Periodenlänge der Kettenbruchentwicklung von $\frac{\sqrt{d}}{V_0}$, so sind die Restzahlen nach dem vorangegangenen Lemma von der angegebenen Form. Es ist

$$\beta_k = [2b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}] = \sqrt{q} + b_0 = \frac{\sqrt{d} + b_0 V_0}{V_0}\,,$$

woraus $V_k = V_0$ und $U_k = b_0 V_0$ folgt. Die Restzahlen des reinperiodischen Kettenbruchs $[\overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$ lauten $\overline{\beta_1, \ldots, \beta_k}$, wobei der Periodenstrich bedeutet, dass $\beta_{i+k} = \beta_i$ für alle i gilt. Diejenigen der inversen Periode $[\overline{2b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1}]$ sind nach Lemma 3.4.8

$$\overline{\frac{\sqrt{d}+U_1}{V_k}, \frac{\sqrt{d}+U_k}{V_{k-1}}, \ldots, \frac{\sqrt{d}+U_2}{V_1}}\,.$$

Oder, wenn man die Periode um eine Stelle verschiebt, und $V_0 = V_k$ benutzt:

$$\frac{\sqrt{d}+U_1}{V_0}, \overline{\frac{\sqrt{d}+U_k}{V_{k-1}}, \ldots, \frac{\sqrt{d}+U_2}{V_1}, \frac{\sqrt{d}+U_1}{V_0}}\,.$$

Diese Restzahlen sind aber wegen $[\overline{2b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1}] = \sqrt{q} + b_0$ gleich $\sqrt{q} + b_0$,

$$\overline{\beta_1, \ldots, \beta_k}\,.$$

Das heißt:

$$\frac{\sqrt{d}+U_k}{V_{k-1}} = \beta_1, \frac{\sqrt{d}+U_{k-1}}{V_{k-2}} = \beta_2, \ldots, \frac{\sqrt{d}+U_2}{V_1} = \beta_{k-1}, \frac{\sqrt{d}+U_1}{V_0} = \beta_k\,.$$

Der Vergleich mit der angegebenen Form der Restzahlen liefert

$$U_k = U_1, U_{k-1} = U_2, \ldots, U_2 = U_{k-1}, U_1 = U_k\,,$$

und

$$V_{k-1} = V_1, V_{k-2} = V_2, \ldots, V_1 = V_{k-1}, V_0 = V_k\,,$$

also die Behauptung. [PER, III, §24] □

Wenden wir uns nun der speziellen Form der Periode von $\sqrt{q}$ zu. Wenn wir die Restzahlen der entsprechenden Kettenbruchentwicklung kennen, liefert der folgende Satz ein Kriterium für die Entscheidung, ob die Periode eine gerade oder ungerade Gliederzahl besitzt.

4.2.3. Satz. *Mit den gleichen Voraussetzungen wie im vorangegangenen Satz gilt, wobei k die Gliederzahl der primitiven Periode ist:*

- k gerade $\Leftrightarrow U_{\frac{k}{2}} = U_{\frac{k}{2}+1}$,
- k ungerade $\Leftrightarrow V_{\frac{k-1}{2}} = V_{\frac{k+1}{2}}$.

Für alle anderen U_i, V_i gilt immer: $U_i \neq U_{i+1}$ und $V_i \neq V_{i+1}$.

BEWEIS. „$\Rightarrow$“ Diese Implikationen folgen jeweils aus dem vorangegangenen Satz.
„$\Leftarrow$“ Wegen der Primitivität, und da die Periode nicht bei b_0 beginnt, sind die Restzahlen $x, \beta_1, \ldots, \beta_k$ paarweise verschieden. Aus der Symmetrie der U_i und V_i folgern wir weiter:

$$\beta_{k-1} = \frac{\sqrt{d} + U_{k-i}}{V_{k-i}} = \frac{\sqrt{d} + U_{k+i}}{V_i} \,,$$

für $0 \leq i \leq k-1$.
Ist $U_{i+1} = U_i$, dann gilt

$$\beta_{k-1} = \frac{\sqrt{d} + U_i}{V_i} = \beta_i \,,$$

und damit $k - i = i$, also k gerade und $i = \frac{k}{2}$. Die Gliederzahl der symmetrischen Periode ist also ungerade.
Ist $V_{i+1} = V_i$ dann folgt

$$\beta_{k-1} = \frac{\sqrt{d} + U_{i+1}}{V_{i+1}} = \beta_{i+1} \,,$$

und damit $k - i = k + 1$, also k ungerade und $i = \frac{k-1}{2}$. [PER, III, §24] $\square$

Aufgrund dieses Satzes erkennen wir bei der Berechnung der Näherungszahlen wann wir die Mitte der Periode erreicht haben, und können die Kettenbruchentwicklung an dieser Stelle abbrechen. Die Teilnenner wiederholen sich dann in der umgekehrten Reihenfolge, woraus wir die Periode konstruieren können. Dies illustrieren auch die beiden nachstehenden Beispiele, welche auch in [PER, III, §24] angeführt werden.

4.2.4. Beispiel. Zunächst müssen wir uns die Strategie zur Bestimmung der Restzahlen klarmachen: Analog zum in Lemma 4.2.1 eingeführten Algorithmus isoliert man dabei im ersten Schritt den ganzzahligen Anteil der vorangehenden Restzahl und invertiert den verbleibenden Summanden. Nachdem man den Nenner dieser Zahl rational gemacht hat, entspricht dies der nächsten Restzahl. Die Berechnungen erstrecken sich also nur über den Bereich der ganzen Zahlen, denn in jedem Schritt genügt es, den Wert $\lfloor\sqrt{d}\rfloor = b_0$ zu kennen, um damit den ganzzahligen Anteil der jeweiligen Restzahl bestimmen zu können.

(i) Für die Zahl $\sqrt{73} = \frac{\sqrt{73}}{1}$ erhalten wir damit die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
& & \tfrac{\sqrt{73}}{1} &= 8 + \tfrac{\sqrt{73}-8}{1} \,, \\
\tfrac{1}{\sqrt{73}-8} &= & \tfrac{\sqrt{73}+8}{9} &= 1 + \tfrac{\sqrt{73}-1}{9} \,, \\
\tfrac{9}{\sqrt{73}-1} &= & \tfrac{\sqrt{73}+1}{8} &= 1 + \tfrac{\sqrt{73}-7}{8} \,, \\
\tfrac{8}{\sqrt{73}-7} &= & \tfrac{\sqrt{73}+7}{3} &= 5 + \tfrac{\sqrt{73}-8}{3} \,, \\
\tfrac{3}{\sqrt{73}-8} &= & \tfrac{\sqrt{73}+8}{3} \,. &
\end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir die Bestimmung der Restzahlen abbrechen, da wir in direkter Folge zweimal auf denselben Näherungsnenner gestoßen sind. Der zweite Teil des vorangegangenen Satzes liefert uns, dass die Zahlenfolge $1, 1, 5$ die erste

Hälfte der symmetrischen Periode mit ungerader Länge darstellt. Also erhalten wir zusammen mit den Überlegungen aus Satz 4.1.1:

$$\sqrt{73} = [8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}]\,.$$

(ii) Schreibt man die Zahl $\frac{\sqrt{13}}{2}$ um zu $\frac{\sqrt{52}}{4}$, so sind offensichtlich die Bedingungen von Satz 4.2.3 erfüllt, da $\frac{52}{4}$ ganz ist. Wir erhalten dann die folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rcrcl} & & \frac{\sqrt{52}}{4} & = & 1 + \frac{\sqrt{52}-4}{4}\,, \\ \frac{4}{\sqrt{52}-4} & = & \frac{\sqrt{52}+4}{9} & = & 1 + \frac{\sqrt{52}-5}{9}\,, \\ \frac{9}{\sqrt{52}-5} & = & \frac{\sqrt{52}+5}{3} & = & 4 + \frac{\sqrt{52}-7}{3}\,, \\ \frac{3}{\sqrt{52}-7} & = & \frac{\sqrt{52}+7}{1} & = & 14 + \frac{\sqrt{52}-7}{1}\,. \end{array}$$

Da wir in der nächsten Zeile wiederum als ganzzahligen Anteil des Nenners der Restzahl den Wert 7 erhalten, können wir an diesem Punkt die Berechnung der Restzahlen abbrechen. Der erste Teil des vorangegangenen Satzes sagt uns nämlich, dass die Zahlenfolge $1, 1, 14$ die erste Hälfte der symmetrischen Periode mit gerader Länge darstellt. Also erhalten wir vermöge der weiteren Überlegungen aus Satz 4.1.1:

$$\frac{\sqrt{13}}{2} = [1, \overline{1, 4, 14, 4, 1, 2}]\,.$$

Noch konkretere Aussagen finden wir, falls wir anstelle einer rationalen Zahl q eine natürliche Zahl d betrachten, die kein Quadrat ist. Auf diesen Fall werden wir uns für den Rest des Kapitels zurückziehen.

Die wichtigsten Anforderungen, denen die Restzahlen β_i, deren ganzer Anteil im Zähler U_i bzw. deren Nenner V_i dann genügen, werden wir im Folgenden herleiten, um anschließend Aussagen über die Teilnenner b_i folgern zu können.

Zunächst erhalten wir eine untere Abschätzung für die Größe der Nenner der Restzahlen:

4.2.5. Satz. *Ist $\sqrt{d} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$ für eine natürliche nichtquadratische Zahl d, und k die Gliederanzahl der primitiven Periode, so gilt für die Nenner der Restzahlen $\beta_i = \frac{\sqrt{d}+U_i}{V_i}$:*

$$V_i \geq 3$$

für $1 \leq i \leq k-1$, mit der Ausnahme $V_{\frac{k}{2}} \geq 2$, falls k gerade ist.

Beweis. Es seien $x, \beta_1, \ldots, \beta_k$ die paarweise verschiedenen Restzahlen, die nach Lemma 4.2.1 von der Form $\beta_i = \frac{\sqrt{d}+U_i}{V_i}$, mit $U_i, V_i \in \mathbb{N}$, sind. Es gilt: $U_0 = 0$, $V_0 = 1 = V_k$.

Nehmen wir zunächst an, es gelte $V_i = 1$ für ein i zwischen 1 und $k-1$. Dann ist $\beta_i = \frac{\sqrt{d}+U_i}{1} = x + U_i$, also $\beta_{i+1} = \beta_1$, was aber im Widerspruch dazu steht, dass alle Restzahlen verschieden sind.

Es bleibt zu zeigen, dass $V_i = 2$ nur für $i = \frac{k}{2}$ gelten kann. Aus Satz 4.2.2 ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_i - b_i &= \frac{\sqrt{d} + U_i}{V_i} - b_i\,, \\ \beta_{k-i} - b_{k-i} &= \frac{\sqrt{d} + U_{k-i}}{V_{k-i}} - b_{k-i} = \frac{\sqrt{d} + U_{i+1}}{V_i} - b_i\,. \end{aligned}$$

Diese sind äquivalent zu

$$(\beta_i - b_i) - (\beta_{k-i} - b_{k-i}) = \frac{U_i - U_{i+1}}{V_i}\,.$$

Da die geklammerten Ausdrücke auf der linken Seite jeweils zwischen 0 und 1 liegen, folgt $|U_i - U_{i+1}| < V_i$. Im Fall $V_i = 2$ muss also gelten: $|U_i - U_{i+1}| < 2$. Die bereits bewiesene Gleichung (3.4.2) aus dem Beweis von Lemma 3.4.8 liefert $U_i + U_{i+1} = 2b_i$, woraus folgt, dass $U_i + U_{i+1}$, also auch $U_i - U_{i+1}$, gerade sein muss. Aus $|U_i - U_{i+1}| < 2$ ergibt sich dann: $U_i - U_{i+1} = 0$. Wegen Satz 4.2.3 muss dann aber schon $i = \frac{k}{2}$ gelten. [PER, III, §25] □

Wir können auch eine obere Abschätzung für die U_i und V_i angeben:

4.2.6. Lemma. *Es gilt für alle* $i > 0$

$$0 < U_i \leq b_0$$

und

$$0 < V_i \leq 2b_0\,.$$

Beweis. Es bezeichne γ_i die zur Restzahl β_i konjugierte Zahl. Die Restzahlen sind reduziert, das heißt, $\beta_i > 1$ und $-1 < \gamma_i < 0$. Somit müssen die Zahlen $\beta_i - \gamma_i$ und $\beta_i + \gamma_i$ jeweils positiv sein. Beachtet man das

$$\beta_i = \frac{\sqrt{d} + U_i}{V_i} \quad \text{und} \quad \gamma_i = \frac{-\sqrt{d} + U_i}{V_i}$$

gilt, so erhält man

$$\frac{2\sqrt{d}}{V_i} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{2U_i}{V_i} > 0\,.$$

Also müssen schon U_i und V_i positiv sein.
Weiter muss, da γ_i negativ ist, $U_i < \sqrt{d}$ sein. Damit folgt unmittelbar

$$U_i \leq \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor = b_0\,.$$

Analog erhält man daraus wegen $\beta_i > 1$ schon

$$V_i < \sqrt{d} + U_i$$

also $V_i \leq 2b_0$. □

Diese gerade bewiesenen Abschätzungen liefern uns eine obere Schranke für die Länge des periodischen Teils der von uns betrachteten Kettenbruchentwicklungen.

4.2.7. Korollar. *Für die Periodenlänge k der Kettenbruchentwicklung*

$$[b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$$

der Quadratwurzel einer natürlichen Zahl d gilt:

$$k \leq 2d\,.$$

Beweis. Mit den oberen Schranken für U_i und V_i aus dem vorangegangenen Lemma folgt, dass es maximal $2b_0 \cdot b_0 = 2b_0^2 \leq 2d$ viele Restzahlen gibt, was der Behauptung entspricht. □

Wie schon in Bemerkung 3.2.4 (iii) angemerkt, war diese in den meisten Fällen grobe Abschätzung bereits Lagrange bekannt.

Aus den bisherigen Überlegungen erhalten wir nun eine bemerkenswerte Abschätzung für die Größe der Teilnenner des symmetrischen Periodenanteils.

4.2.8. Satz. *Mit den gleichen Vorraussetzungen wie im vorangegangenen Satz 4.2.5 gilt: Die Teilnenner des symmetrischen Periodenanteils sind alle echt kleiner als $\frac{2}{3}b_0$.*

Ausnahme: Ist k gerade, so kann $b_{\frac{k}{2}} > \frac{2}{3}b_0$ gelten. Ist dies der Fall, so folgt schon $V_{\frac{k}{2}} = 2$, und $b_{\frac{k}{2}} = b_0$ oder $b_{\frac{k}{2}} = b_0 - 1$.

Beweis. Für $b_i \geq \frac{2}{3}b_0$ ist nach Gleichung (3.4.2)

$$U_i + U_{i+1} = b_i V_i \geq \frac{2}{3} b_0 V_i\,.$$

Also folgt mit Lemma 4.2.6:

$$V_i \leq \frac{U_i + U_{i+1}}{\frac{2}{3}b_0} \leq \frac{2b_0}{\frac{2}{3}b_0} = 3\,,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $b_i = \frac{2}{3}b_0$ und $U_i = U_{i+1} = b_0$ ist. Wegen Satz 4.2.3 muss dann $i = \frac{k}{2}$ und k gerade sein. In allen anderen Fällen, insbesondere für $b_i > \frac{2}{3}b_0$, ist also $V_i = 2$, wobei wegen Satz 4.2.5 dafür nur $V_{\frac{k}{2}}$ in Frage kommt. Bleibt noch der Wert von $b_{\frac{k}{2}}$ in dieser Situation zu bestimmen. Aus $U_{\frac{k}{2}} = U_{\frac{k}{2}+1}$ folgt

$$U_{\frac{k}{2}} = \frac{U_{\frac{k}{2}} + U_{\frac{k}{2}+1}}{2} = \frac{b_{\frac{k}{2}} V_{\frac{k}{2}}}{2} = b_{\frac{k}{2}}\,,$$

und wiederum mit Lemma 4.2.6:

$$b_{\frac{k}{2}} = U_{\frac{k}{2}} \leq b_0\,. \tag{4.2.1}$$

Weiter gilt

$$b_{\frac{k}{2}} + 1 > \beta_{\frac{k}{2}} = \frac{\sqrt{d} + U_{\frac{k}{2}}}{V_{\frac{k}{2}}} = \frac{\sqrt{d} + b_{\frac{k}{2}}}{2} > \frac{b_0 + b_{\frac{k}{2}}}{2} = \frac{b_0}{2} + \frac{b_{\frac{k}{2}}}{2}\,,$$

also

$$b_{\frac{k}{2}} > b_0 - 2\,. \tag{4.2.2}$$

Der Vergleich von (4.2.1) und (4.2.2) liefert $b_{\frac{k}{2}} = b_0$ oder $b_{\frac{k}{2}} = b_0 - 1$, also das Gewünschte. [PER, III, §25] □

Die Richtigkeit des bisher Bewiesenen wird auch aus der Tabelle der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ in Teil B des Anhangs ab Seite 98 ersichtlich.

Neben den bislang hergeleiteten Verfeinerungen der Aussagen aus dem ersten Kapitelabschnitt besteht natürlicherweise noch der Wunsch nach einer notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dass ein Kettenbruch die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl darstellt. Der folgende Satz erfüllt dies in Form einer Bedingung an den ganzzahligen Anteil von $\sqrt{d}$. Dabei wird die aus Kapitel 1 bekannte Notation der Indexerhöhung benutzt.

4.2.9. Satz. *Die Kettenbruchentwicklung* $[b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$ *stellt genau dann die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl d dar, wenn gilt*

$$b_0 = \frac{mA_{k-2,1} - (-1)^k A_{k-3,1} B_{k-3,1}}{2},$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$. *Dann ist*

$$\sqrt{d} = \sqrt{b_0^2 + mA_{k-3,1} - (-1)^k B_{k-3,1}^2}\,.$$

Auf einen Beweis dieses Satzes wollen wir verzichten, da die praktischen Anwendungen wesentlich interessanter sind. Eine sehr technische Herleitung findet man bei [PER, III, §25, Satz17], wobei zum Verständnis noch Ergebnisse der Kettenbruchtheorie hinsichtlich der Lösung von diophantischen Gleichungen notwendig sind, welche wir hier nicht behandelt haben.

Der Satz findet sich laut [PER, III, §25] bereits 1765 bei Leonhard Euler, der die Formeln für $k = 1$ bis 8 einzeln auswertet. Einen Teil dieser Überlegungen werden wir im Folgenden nachvollziehen.

4.3. Eine Anwendung

Wir wollen in diesem Abschnitt alle Quadratwurzeln natürlicher Zahlen bestimmen, deren Kettenbruchentwicklung eine Periodenlänge echt kleiner als 5 besitzen. Grundlage dafür ist Satz 4.2.9, der eine notwendige und hinreichende Bedingung liefert. Die einzelnen Schritte sind auch bei [PER, III, §25] ausgeführt.

- Der Fall $k = 1$.
  Dann ist vermöge unserer Konventionen aus dem ersten Kapitel:

$$\begin{aligned} A_{k-3,1} &= A_{-2,1} = 0\,, \\ B_{k-3,1} &= B_{-2,1} = 1\,, \\ A_{k-2,1} &= A_{-1,1} = 1\,. \end{aligned}$$

  Einsetzen in die Gleichungen aus Satz 4.2.4 liefert

$$b_0 = \frac{m}{2} \text{ und } d = b_0^2 + m\,.$$

  Damit müssen wir keine Bedingung an b_0 stellen, und können allgemein folgern:

$$\sqrt{b_0^2 + 1} = [b_0, \overline{2b_0}]\,.$$

- Der Fall $k = 2$.
Hier erhalten wir
$$\begin{aligned} A_{k-3,1} &= A_{-1,1} = 1\,, \\ B_{k-3,1} &= B_{-1,1} = 0\,, \\ A_{k-2,1} &= A_{0,1} = b_1\,. \end{aligned}$$
Daraus folgt
$$b_0 = \frac{mb_1}{2} \text{ und } d = b_0^2 + m\,.$$
Also gilt unter der Voraussetzung, dass b_0 ganz ist:
$$\sqrt{b_0^2 + m} = [b_0, \overline{b_1, 2b_0}]\,,$$
wobei $b_0 = \frac{mb_1}{2}$ gilt.
- Der Fall $k = 3$.
Es gilt zunächst
$$\begin{aligned} A_{k-3,1} &= A_{0,1} = b_1\,, \\ B_{k-3,1} &= B_{0,1} = 1\,, \\ A_{k-2,1} &= A_{1,1} = b_1 b_2 + 1 = b_1^2 + 1\,, \end{aligned}$$
wobei wir in der letzten Gleichheit verwendet haben, dass der symmetrische Periodenteil von der Form b_1, b_2 sein muss, woraus $b_1 = b_2$ folgt. Die Gleichungen aus Satz 4.2.4 liefern uns somit:
$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{m(b_1^2 + 1) + b_1}{2}\,, \\ d &= b_0^2 + mb_1 + 1\,. \end{aligned}$$
Damit b_0 ganzzahlig ist, müssen sowohl b_1 als auch m gerade sein. Ist dies erfüllt, so folgt also:
$$\sqrt{b_0^2 + mb_1 + 1} = [b_0, \overline{b_1, b_1, 2b_0}]\,.$$
- Der Fall $k = 4$.
Hier haben wir erneut unter Benutzung der Rekursionsformeln aus dem ersten Kapitel:
$$\begin{aligned} A_{k-3,1} &= A_{1,1} = b_1 b_2 + 1\,, \\ B_{k-3,1} &= B_{1,1} = b_2\,, \\ A_{k-2,1} &= A_{2,1} = b_1 b_2 b_3 + b_3 + b_1 = b_1^2 b_2 + 2b_1\,, \end{aligned}$$
wobei letzteres wiederum wegen dem Symmetrieteil der Periode gilt. Denn dieser muss wegen $k = 4$ schon 3-gliedrig sein, womit $b_1 = b_3$ folgt. Also ist
$$b_0 = \frac{m(b_1^2 b_2 + 2b_1) - (b_1 b_2 + 1)b_2}{2}$$
und
$$\sqrt{d} = \sqrt{b_0^2 + m(b_1 b_2 + 1) - b_2^2} = [b_0, \overline{b_1, b_2, b_1, 2b_0}]\,.$$
Dabei ist b_0 offenbar genau dann ganzzahlig, wenn entweder b_2 gerade ist, oder b_1, b_2 ungerade und m gerade sind.

Schon mit diesen ersten vier Spezialfällen können wir, ohne große Rechnungen auszuführen, die Kettenbruchentwicklung von 56 Zahlen der Form $\sqrt{d}$, mit $1 < d < 100$, bestimmen. Man vergleiche dazu etwa die entsprechende Tabelle im Anhang ab Seite 98.

KAPITEL 5

Die Pellsche Gleichung

Gegenstand dieses Kapitels ist die Suche nach den ganzzahligen Lösungen einer sogenannten Pellschen Gleichung, welche die Form $X^2 - dY^2 = 1$ besitzt, wobei, wie im gesamten Kapitel, d eine natürliche Zahl und kein Quadrat sei. Für die Problemstellung des nächsten Kapitels wird die Lösbarkeit dieser und ähnlicher Gleichungen eine wichtige Rolle spielen. Deshalb werden wir in einigen Fällen stärkere Aussagen beweisen, von denen uns im Moment nur Spezialfälle interessieren. Um zu den entsprechenden Ergebnissen zu gelangen, stellen die bereits festgehaltenen Eigenschaften der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ ein wichtiges Hifsmittel dar, denn es wird sich herausstellen, dass bereits alle notwendigen Informationen über die Lösungen der Pellschen Gleichung darin enthalten sind. Weiterhin ist es überraschend, bei welch unterschiedlichen Problemen man auf eine Pellsche Gleichung stößt. Eine Auswahl davon werden wir im letzten Teil dieses Kapitels betrachten.

Nachdem wir im ersten Abschnitt die trivialen Lösungen angegeben haben, wenden wir uns im Hauptteil des Kapitels den nicht-trivialen ganzzahligen Lösungen einer Pellschen Gleichung zu. Wir werden sehen, dass ein Zusammenhang zwischen den Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ und den Lösungspaaren dieser Gleichung besteht. Insbesondere beweisen wir weiterhin, dass die Pellsche Gleichung immer ganzzahlige Lösungen besitzt und wir aus einem bestimmten Lösungspaar sofort alle anderen Lösungen berechnen können. Im letzten Abschnitt wenden wir diese Ergebnisse dann auf verschiedene Beispiele an.

5.1. Definition und triviale Lösungen

5.1.1. Definition. *Eine Gleichung der Form*

$$X^2 - dY^2 = 1,$$

mit d aus $\mathbb{N}$ und kein Quadrat, nennt man Pellsche Gleichung.

Der Namensgeber dieser Gleichung, John Pell (1611-1685), hat keinen größeren Beitrag zur Lösung einer solchen geleistet. Vielmehr hatte Leonhard Euler ihn mit einem anderen Mathematiker, der allerdings auch nur am Rande etwas mit diesen Gleichungen zu tun hatte, verwechselt, und so Pells Namen in Verbindung mit einer solchen Gleichung in Umlauf gebracht. Näheres zu den Ursprüngen der Pellschen Gleichung ist in Teil A des Anhangs nachzulesen.

Die Pellsche Gleichung ist eine sogenannte *diophantische Gleichung* (benannt nach dem griechischen Mathematiker Diophant von Alexandrien, um 250). Unter diesem Begriff fasst man Gleichungen der Form

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0\,,$$

wobei f ganzzahlige Koeffizienten besitzt, zusammen, an deren ganzzahligen Lösungen man interessiert ist. Auch bei der Untersuchung der Pellschen Gleichung beschränken wir uns auf die Suche nach den ganzzahligen Lösungen. Dabei fassen wir ein Lösungspaar mit dem Ausdruck (x, y) zusammen.

Wie man sofort sieht, besitzt die Pellsche Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ immer die trivialen Lösungen $(\pm 1, 0)$. Weiterhin hätte es wenig Sinn gemacht, für d auch negative Zahlen zuzulassen, denn für $d \leq -2$ gibt es offensichtlich außer diesen trivialen keine weiteren Lösungen. Für $d = -1$ kommen lediglich noch die beiden Lösungen $(0, \pm 1)$ hinzu. Auch den Fall, dass d eine Quadratzahl ist, schließt man aus, da hier ebenfalls nur die trivialen Lösungen vorkommen: Sei etwa $d = a^2$, so kann man die Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ in der Form $(x + ay)(x - ay) = 1$ schreiben, was nur dann richtig ist, wenn $x + ay = x - ay = \pm 1$ gilt. Folglich hat man

$$x = \frac{2x + ay - ay}{2} = \frac{(x + ay) + (x - ay)}{2} = \pm 1$$

und die Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ besitzt außer den trivialen Lösungen $(\pm 1, 0)$ keine weiteren.

Bemerkung. An der Struktur der Pellschen Gleichung erkennt man direkt, dass auch $(\pm x, \pm y)$ Lösungen sind, falls $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ die Gleichung löst. Deshalb genügt es, wenn wir im Folgenden nur die Lösung mit postivem x und y bestimmen. Außerdem folgt für ein Lösungspaar (x, y), dass x und y teilerfremd sind, da gemeinsame Teiler auch ± 1 teilen müssten.

Nach den trivialen Lösungspaaren werden wir uns nun mit den eigentlichen Lösungen der Pellschen Gleichung beschäftigen.

5.2. Die Fundamentallösung

Ziel dieses Abschnittes ist es, alle nicht-trivialen Lösungen der Pellschen Gleichung anzugeben und einen Zusammenhang zwischen ihnen herzustellen.

Naiv könnte man versuchen für Y solange nacheinander alle natürlichen Zahlen in den Ausdruck $1 + dY^2$ einzusetzen, bis man eine Quadratzahl erhält. Für $d = 3$ erhält man so als erste Lösung $(2, 1)$. Allerdings ist dieses Probierverfahren im Allgemeinen ungeeignet, da etwa im Fall $d = 61$ schon ein erheblich größerer Rechenaufwand nötig wäre um zumindest auf die erste Lösung zu stoßen. Diese lautet nämlich $(1\,766\,319\,049, 226\,153\,980)$. Eine wesentlich geschicktere Vorgehensweise werden wir im Folgenden auf Grundlage der erarbeiteten Eigenschaften der periodischen Kettenbrüche herleiten können.

Wir bemerken zunächst, dass alle Lösungen in den Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ enthalten sind. Dabei zeigen wir sogar einen allgemeineren Sachverhalt, den wir für das nachfolgende Kapitel benötigen.

5.2.1. Satz. *Sei $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat. Dann tritt jede Lösung $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der zugehörigen Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ in der Form $\frac{x}{y}$ als Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ auf.*

Allgemeiner ist jede Lösung $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der diophantischen Gleichung

$$X^2 - dY^2 = c\,,$$

mit $|c| < \sqrt{d}$, in der Form $\frac{x}{y}$ als Näherungsbruch in der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ enthalten.

Beweis. Sei (x, y), mit natürlichen Zahlen x und y, eine Lösung der diophantischen Gleichung $X^2 - dY^2 = c$ mit $|c| < \sqrt{d}$. Die Gleichung kann man zunächst in $(x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = |c|$ umschreiben, woraus folgt:

$$\begin{aligned} x > y\sqrt{d} \quad &, \text{falls } c > 0\,, \\ x < y\sqrt{d} \quad &, \text{falls } c < 0\,. \end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt weiterhin:

$$x - y\sqrt{d} = \frac{|c|}{x + y\sqrt{d}}\,.$$

Betrachten wir zunächst den Fall, dass $c > 0$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| &= \frac{c}{y(x + y\sqrt{d})} \\ &< \frac{c}{y(y\sqrt{d} + y\sqrt{d})} \\ &< \frac{\sqrt{d}}{2y^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2y^2}\,, \end{aligned}$$

also ist $\frac{x}{y}$ nach Satz 2.5.2 ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$. Im Fall $c < 0$ kann man eine analoge Rechnung mit $-c$ an Stelle von c durchführen, und kommt ebenfalls zu dem Resultat, dass $\frac{x}{y}$ ein Näherungsbruch der Kettenbruchbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ sein muss. □

Im Allgemeinen ist die Umkehrung der gerade bewiesenen Aussage falsch. Es gilt aber:

5.2.2. Satz. *Ist $\frac{A_i}{B_i}$ ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$, so sind $x := A_i$ und $y := B_i$ ein Lösungspaar der diophantischen Gleichung $X^2 - dY^2 = c$ für ein c mit $|c| < 1 + 2\sqrt{d}$.*

Beweis. Ist $\frac{x}{y}$ ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$, so gilt nach dem Näherungsgesetz die Ungleichung

$$\left|\sqrt{d} - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}\,,$$

und somit

$$\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y}\,. \tag{5.2.1}$$

Mit der Dreiecksungleichung und $\frac{1}{y} \leq 1 \leq y$ erhält man daraus:

$$\begin{aligned} \left|x + y\sqrt{d}\right| &= \left|(x - y\sqrt{d}) + 2y\sqrt{d}\right| \\ &\leq \left|x - y\sqrt{d}\right| + \left|2y\sqrt{d}\right| \\ &< \frac{1}{y} + 2y\sqrt{d} \\ &\leq y(1 + 2\sqrt{d})\,. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Abschätzung mit der Ungleichung (5.2.1), so ergibt sich

$$\left|x^2 - dy^2\right| < 1 + 2\sqrt{d},$$

was zu beweisen war. [BUDA, 14, §4] □

Ausgehend von den beiden vorangegangenen Sätzen stellen sich die Fragen, durch welche Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ die Lösungen der entsprechenden Pellschen Gleichung repräsentiert werden, und ob diese überhaupt immer nicht-trivial lösbar ist. Die Antworten darauf gibt der folgende Satz zur Anzahl und Gestalt der Lösungen der Pellschen Gleichung, der laut [PER, III, §25] im wesentlichen auf Euler und Lagrange zurückgeht. Gleichzeitig erhalten wir ohne weiteren Aufwand ein Kriterium für die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung $X^2 - dY^2 = -1$, die uns auch im nächsten Kapitel begegnen wird, und dort eine wichtige Rolle spielt.

5.2.3. Satz. (i) *Die Pellsche Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ ist immer nicht-trivial lösbar, und es gibt stets unendlich viele ganzzahlige Lösungen.*

(ii) *Ist $\frac{A_i}{B_i}$ der Näherungsbruch i-ter Ordnung aus der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$, und k die Gliederanzahl der primitiven Periode, so sind alle Lösungspaare $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der Pellschen Gleichung gegeben durch*

$$x = A_{nk-1}, \quad y = B_{nk-1},$$

wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ bei geradem k, bzw. $n = 2, 4, 6, \ldots$ bei ungeradem k.

(iii) *Die diophantische Gleichung $X^2 - dY^2 = -1$ ist genau dann lösbar, wenn die Periodenlänge k der primitiven Periode der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ ungerade ist. Dann besitzt sie unendlich viele Lösungspaare $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, die alle von der folgenden Form sind:*

$$x = A_{nk-1}, \quad y = B_{nk-1},$$

wobei $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$.

Beweis. Nach Satz 5.2.1 müssen die Lösungen der jeweiligen diophantischen Gleichung als Näherungnenner und zugehörigem -zähler in der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ auftauchen. Wir werden sehen, dass deshalb die in Kapitel 4 erarbeiteten Eigenschaften der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ ausreichen, um die Existenz und Anzahl der Lösungen der Gleichungen $X^2 - dY^2 = 1$ bzw. $X^2 - dY^2 = -1$ zu bestimmen. Aus Satz 4.1.1 wissen wir, dass die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ von der Gestalt $[b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$ ist, und somit $\sqrt{d} + b_0 = [\overline{2b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1}]$ gilt.

Speziell für die Restzahlen β_{kn} der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ sei und k die Periodenlänge ist, gilt also:

$$\beta_{kn} = \sqrt{d} + b_0\,. \tag{5.2.2}$$

Für $n = 1$ folgt deshalb mit Gleichung (1.2.3):

$$\sqrt{d} = \frac{A_{k-1}(\sqrt{d} + b_0) + A_{k-2}}{B_{k-1}(\sqrt{d} + b_0) + B_{k-2}}\,.$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner liefert:

$$dB_{k-1} + \sqrt{d}(b_0 B_{k-1} + B_{k-2}) = b_0 A_{k-1} + A_{k-2} + \sqrt{d} A_{k-1}\,.$$

Daraus folgt, da $\sqrt{d}$ nach Voraussetzung eine irrationale Zahl ist:

$$dB_{k-1} = b_0 A_{k-1} + A_{k-2} \text{ und } b_0 B_{k-1} + B_{k-2} = A_{k-1} .$$

Umgestellt erhalten wir:

$$A_{k-2} = -b_0 A_{k-1} + dB_{k-1} \text{ und } B_{k-2} = A_{k-1} - b_0 B_{k-1} .$$

Setzen wir dies in die aus Kapitel 1 bekannte Gleichung $A_{k-1}B_{k-2} - A_{k-2}B_{k-1} = (-1)^k$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} A_{k-1}(A_{k-1} - b_0 B_{k-1}) - (-b_0 A_{k-1} + dB_{k-1})B_{k-1} &= (-1)^k \\ A_{k-1}^2 - b_0 B_{k-1} A_{k-1} + b_0 A_{k-1} B_{k-1} - dB_{k-1}^2 &= (-1)^k \\ A_{k-1}^2 - dB_{k-1}^2 &= (-1)^k . \end{aligned}$$

- Ist k gerade, so wird die letzte Gleichung zu $A_{k-1}^2 - dB_{k-1}^2 = 1$, das heißt, (A_{k-1}, B_{k-1}) ist eine Lösung der Pellschen Gleichung $X^2 + dY^2 = 1$.

- Ist k ungerade, so ist (A_{k-1}, B_{k-1}) eine Lösung von $X^2 + dY^2 = -1$. Wollen wir trotzdem eine Lösung der eigentlichen Pellschen Gleichung finden, genügt es, die doppelte, also imprimitive Periode zu betrachten. Die Rechnung erfolgt völlig analog mit dem für die vorangegangenen Argumentationen unwichtigen Unterschied, dass anstelle von k nun $2k$ betrachtet wird. Man erhält:

$$A_{2k-1}^2 - dB_{2k-1}^2 = (-1)^{2k} = 1 ,$$

das heißt, (A_{2k-1}, B_{2k-1}) ist Lösung der Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$, wobei die Periode von $\sqrt{d}$ eine ungerade Gliederzahl besitzt.

Insbesondere folgt also schon, dass die Pellsche Gleichung immer eine Lösung besitzt. Dies impliziert auch die Existenz unendlich vieler Lösungen: Denn falls k gerade ist, sind die Argumentationen für alle $n \in \mathbb{N}$ analog, und liefern jeweils eine weitere Lösung. Ist k ungerade, so erhält man für alle geraden natürlichen n weitere Lösungen der Pellschen Gleichung.

Die Gleichung $X^2 - dY^2 = -1$ hingegen besitzt dann Lösungen, wenn k ungerade ist. Für weitere Lösungspaare muss man ungerade n betrachten, und erhält somit ebenfalls unendlich viele Lösungen.

Abschließend müsssen wir uns noch überlegen, dass wir mit den angegebenen Vorgehensweisen jeweils alle Lösungen der diophantischen Gleichungen erhalten: Ein Rückblick auf Gleichung (5.2.2) zeigt, dass wir hier die besondere Form der Restzahlen β_{kn} ausgenutzt haben. Wie wir in Satz 4.2.5 gesehen hatten, besitzen nämlich alle anderen Restzahlen einen Nenner V_i echt größer als 1. Deshalb stoßen wir bei einer analogen Rechnung für ein β_i, mit $i \neq kn$, auf die Gleichung

$$A_{i-1}^2 - dB_{i-1}^2 = (-1)^i V_i ,$$

wobei die rechte Seite stets ungleich ± 1 ist. □

Betrachten wir dazu ein numerisches Beispiel:

5.2.4. Beispiel. Die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{13}$ ist $[3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$, das heißt die primitive Periodenlänge beträgt 5, ist also ungerade. Die Berechnung des vierten Näherungsbruches liefert den Wert $\frac{18}{5}$. Daraus erhält man tatsächlich eine Lösung der Gleichung $X^2 - 13Y^2 = -1$, denn es gilt:

$$18^2 - 13 \cdot 5^2 = 324 - 325 = -1 .$$

Dies gilt nicht für diejenigen Zahlenpaare, welche sich aus den Näherungsbrüchen $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{7}{2}$ und $\frac{11}{3}$, die bei einem Abbruch der Kettebruchentwicklung von $\sqrt{13}$ vor dem vierten Teilnenner entstehen, ergeben. Denn:

$$\begin{aligned} 3^2 - 13 \cdot 1^2 &= -4\,, \\ 4^2 - 13 \cdot 1^2 &= -3\,, \\ 7^2 - 13 \cdot 2^2 &= -3\,, \\ 11^2 - 13 \cdot 3^2 &= 4\,. \end{aligned}$$

Für eine Lösung der Pellschen Gleichung $X^2 - 13Y^2 = 1$ müssen wir die doppelte Periode betrachten. Dabei stößt man auf den Näherungsbruch

$$\frac{A_9}{B_9} = \frac{649}{180}\,,$$

und es gilt in der Tat:

$$649^2 - 13 \cdot 180^2 = 421\,201 - 421\,200 = 1\,.$$

Den bemerkenswerten Zusammenhang zwischen den Lösungen der Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 1$ stellt der folgende, auf Lagrange zurückgehende Satz vor:

5.2.5. Satz. *Unter denselben Voraussetzungen wie im vorherigen Satz gilt:*
Falls die Pellsche Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ ganzzahlige Lösungen besitzt, so folgt: Es gibt eine Lösung (x_1, y_1), sodass alle anderen positiven Lösungspaare von der Form (x_n, y_n) mit

$$x_n + y_n\sqrt{d} := (x_1 + y_1\sqrt{d})^n\,,$$

für $n \in \mathbb{N}$, sind.

Beweis. Dass die Zahlenpaare (x_n, y_n), wie oben definiert ebenfalls Lösungen sind, ergibt sich aus folgender Argumentation: Durch Konjugieren der Gleichung $x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ erhält man $x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n$. Deswegen können wir die folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned} x_n^2 - dy_n^2 &= (x_n - y_n\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) \\ &= (x_1 - y_1\sqrt{d})^n(x_1 + y_1\sqrt{d})^n \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)^n \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Dies beweisen wir durch einen Widerspruch. Dazu nehmen wir an, dass eine ganzzahlige Lösung (a, b), mit natürlichen Zahlen a und b, existiert, die nicht von der Form $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ ist.
Da sowohl $x_1 + y_1\sqrt{d}$ als auch $a + b\sqrt{d}$ echt größer als 1 sind, gibt es dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^m < a + b\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{m+1}\,, \tag{5.2.3}$$

wobei die Gleichheit offensichtlich auszuschließen ist. Da (x_1, y_1) Lösung der Pellschen Gleichung ist, gilt $0 < (x_1 - y_1\sqrt{d})^m = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-m}$. Also folgt nach durchmultiplizieren von Gleichung (5.2.3) mit $(x_1 - y_1\sqrt{d})^m$:

$$1 < (a + b\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^m < (x_1 + y_1\sqrt{d})\,.$$

Dann ist $(a+b\sqrt{d})(x_1+y_1\sqrt{d})^m$ wieder von der Form $c+e\sqrt{d}$, mit natürlichen Zahlen c und e echt größer as 1. Außerdem gilt

$$c^2-e^2d=(a^2-b^2d)(x_1^2-y_1^2d)^m=1\,,$$

das heißt, (c,e) ist Lösung der ursprünglichen Pellschen Gleichung und $c+e\sqrt{d}$ liegt echt zwischen 1 und $x_1+y_1\sqrt{d}$, was aber im Widerspruch zur Minimalität der Fundamentallösung steht. Also war unsere Annahme falsch, womit die Behauptung gezeigt ist. [AVA, 7, §4] □

5.2.6. Definition. *Wir nennen das Zahlenpaar (x_1,y_1) aus Satz 5.2.5 aufgrund seiner dort bewiesenen Eigenschaft die* Fundamentallösung *der zugehörigen diophantischen Gleichung.*

5.2.7. Bemerkung. Auch die diophantische Gleichung $X^2-dY^2=-1$ besitzt, wenn sie lösbar ist, eine Fundamentallösung. Der Beweis verläuft völlig analog zu dem von Satz 5.2.5, nur muss man nun anstelle von n die Exponenten $2n+1$ betrachten.

Da die Folgen der Näherungsnenner und -zähler einer Kettenbruchentwicklung nach Bemerkung 1.2.6 streng monoton wachsend sind, können wir vermöge der Überlegungen aus den Sätzen 5.2.3 sowie 5.2.5 und Bemerkung 5.2.7 ohne weitere Rechnung sofort die Fundamentallösung und, falls diese existiert, auch alle weiteren Lösungen der Gleichungen $X^2-dY^2=\pm1$ angeben:

5.2.8. Korollar. *In Abhängigkeit von der Gliederanzahl k der primitiven Periode der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ ist die Fundamentallösung der Pellschen Gleichung $X^2-dY^2=1$ gegeben durch*

$$\begin{array}{ll}(A_{k-1},B_{k-1}) & ,\, falls\ k\ gerade\,,\\ (A_{2k-1},B_{2k-1}) & ,\, falls\ k\ ungerade\,.\end{array}$$

Es gilt dann jeweils die für alle anderen Lösungen

$$\begin{array}{lcll}(x_n,y_n) & = & (A_{nk-1},B_{nk-1}) & ,\, falls\ k\ gerade\,,\\ (x_n,y_n) & = & (A_{2nk-1},B_{2nk-1}) & ,\, falls\ k\ ungerade\,.\end{array}$$

mit $n\in\mathbb{N}$, wobei man die Zahlenwerte jeweils aus der Gleichheit

$$\begin{array}{lcll}A_{nk-1}+B_{nk-1}\sqrt{d} & = & (A_{k-1}+B_{k-1}\sqrt{d})^n & ,\, falls\ k\ gerade\,,\\ A_{2nk-1}+B_{2nk-1}\sqrt{d} & = & (A_{2k-1}+B_{2k-1}\sqrt{d})^n & ,\, falls\ k\ ungerade\end{array}$$

erhält.

Die Fundamentallösung der Gleichung $X^2-dY^2=-1$ ist für eine ungerade Periodenlänge k durch

$$(x_1,y_1)\quad=\quad(A_{k-1},B_{k-1})$$

gegeben. Alle anderen Lösungen sind von der Form (A_{nk-1},B_{nk-1}), mit natürlichem ungeradem n, wobei man die Zahlenwerte jeweils aus Gleichheit

$$A_{nk-1}+B_{nk-1}\sqrt{d}\quad=\quad(A_{k-1}+B_{k-1}\sqrt{d})^n$$

erhält.

Eine Tabelle, die alle Fundamentallösungen der Pellschen Gleichung für $d \leq 100$ enthält, ist im Anhang B ab Seite 101 zu finden.

Der Zusammenhang zwischen den Lösungspaaren der diophantischen Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 1$ gibt uns die Möglichkeit, noch schneller an die einzelnen Lösungen zu gelangen, denn es ist offenbar zunächst nur jeweils ein einziger Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ zu ermitteln. Zur Bestimmung aller weiteren Lösungen greift man dann auf obige Identitäten zurück.

Ein numerisches Beispiel veranschaulicht dieses Vorgehen:

5.2.9. Beispiel. Wir hatten in Beispiel 5.2.4 gesehen, dass die Fundamentallösung der Pellschen Gleichung $X^2 - 13Y^2 = 1$ durch das Zahlenpaar repräsentiert wird, welches wir aus einem Näherungsbruch von $\sqrt{13}$ ableiten konnten. Weitere Lösungen erhalten wir mit folgenden Rechnungen:

$$\begin{aligned} (649 + 180\sqrt{13})^2 &= 842\,401 + 233\,640\sqrt{13}\,, \\ (649 + 180\sqrt{13})^3 &= (842\,401 + 233\,640\sqrt{13}) \cdot (649 + 180\sqrt{13}) \\ &= 1\,093\,435\,849 + 303\,264\,540\sqrt{13}\,. \end{aligned}$$

Also ist $(x_2, y_2) = (842\,401, 233\,640)$ und $(x_3, y_3) = (1\,093\,435\,849, 303\,264\,540)$.

Einige interessante praktische Anwendungen der Pellschen Gleichungen werden wir im folgenden Abschnitt nachvollziehen. Der bedeutenden Rolle der Pellschen Gleichung in Bezug auf die Suche nach Einheiten in reellquadratischen Zahlkörpern widmen wir das gesamte nächste Kapitel.

5.3. Beispiele

Die Beispiele dieses Abschnittes illustrieren die vielfältigen Anwendungen der Pellschen Gleichung, deren Eigenschaften zur Lösung verschiedenster Probleme führen.

Zunächst sei angemerkt, dass manchmal die Berechnung der Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ durch geschicktes Rechnen umgangen werden kann. Das folgende Beispiel behandelt einen solchen Fall.

5.3.1. Beispiel. Sei d von der Form $a^2 + 1$, mit $a \in \mathbb{N}$. Offensichtlich erhält man dann als Fundamentallösung der Gleichung $X^2 - dY^2 = -1$ das Zahlenpaar $(a, 1)$, denn es gilt:

$$a^2 - (a^2 - 1) \cdot 1 = -1\,.$$

Also berechnet sich die Fundamentallösung der entsprechenden Pellschen Gleichung aus

$$\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)^2 = (2a^2 + 1) + 2a\sqrt{a^2 + 1}$$

zu $(2a^2 + 1, 2a)$.

Pellsche Gleichungen tauchen auch bei geometrischen Problemen auf, wie ein weiteres Beispiel zeigt.

5.3.2. Beispiel. Dreiecke
Behauptung : Es gibt unendlich viele nicht-kongruente Dreiecke, so dass die Längen der Seiten des Dreiecks aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, und der Flächeninhalt des Dreiecks eine ganze Zahl ist.

Beweis : Die Lösungen sind also Tripel der Form $(x-1,\, x,\, x+1)$. Der *Satz von Heron* für den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks lautet

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

wobei s der halbe Umfang, und a, b bzw. c die jeweilige Seitenlänge ist. Das heißt, es gilt in unserm Fall mit $s = \frac{3x}{2}$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{3x}{2}\left(\frac{3x}{2} - x + 1\right)\left(\frac{3x}{2} - x\right)\left(\frac{3x}{2} - x - 1\right) \\ &= \frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right) \\ &= \frac{3x^2}{16}\,(x-2)\,(x+2) \\ &= \frac{3x^2}{16}\left(x^2 - 4\right) . \end{aligned}$$

Da A^2 eine natürliche Zahl ist, muss x gerade sein. Setzen wir $x = 2y$, so ist die vorangehende Gleichung äquivalent zu

$$A^2 = \frac{3y^2}{4}\left(4y^2 - 4\right) = 3y^2\left(y^2 - 1\right) . \tag{5.3.1}$$

Dann muss aber $\frac{A^2}{y^2} = 3\left(y^2 - 1\right)$ eine durch 3 teilbare Zahl sein. Setze deshalb $\frac{A}{y} = 3z$. Dann ist Gleichung 5.3.1 äquivalent zu

$$9z^2 = 3(y^2 - 1)\,,$$

womit man also die Pellsche Gleichung $y^2 - 3z^2 = 1$ erhält, und der Beweis abgeschlossen ist, da diese, wie wir in Satz 5.2.3 gesehen haben, unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt.

Alle Lösungen sind von der Form (y_n, z_n), mit $y_n + \sqrt{3}z_n = (2+\sqrt{3})^n$, und die Seitenlänge x ist bestimmt durch $x_n = 2y_n$. Für positve n lauten daher die ersten Lösungen: $(3, 4, 5)$, $(13, 14, 15)$ und $(51, 52, 53)$.

Abschließend betrachten wir das vermutlich berühmteste Problem, dessen Lösungsweg über eine Pellsche Gleichung führt. Wir orientieren uns dabei an den Ausführungen von [AVA, 7, §5].

5.3.3. Beispiel. Das *Rinderproblem des Archimedes*
Historischer Hintergrund: 1773 fand Gotthold Ephraim Lessing, zu diesem Zeitpunkt Bibliothekar an der Herzoglich-Braunschweigischen Bibliothek in Wolfenbüttel, einen Brief des Mathematikers Archimedes von Syrakus († 212 v. Chr.) an Eratosthenes von Kyrene (ca. 276-194 v. Chr.) und die anderen Mathematiker von Alexandria, der später in deutscher Sprache mit folgendem Wortlaut veröffentlicht wurde:

„Sage, Freund, mir genau die Zahl von Helios' Rindern.
Sorgsam rechne mir aus, wenn Dir Weisheit nicht fremd,
Wieviel deren es waren, die auf der Insel Sizilien
Fluren weideten einst, vierfach in Herden geteilt.
Jede Herde war anders gefärbt; die erste war milchweiß,
Aber die zweite erglänzt' von ganz dunkelem Schwarz.
Braun war die dritte sodann, die vierte scheckig gemustert,
Stiere und Kühe gemischt, jede von anderer Zahl.
Mit der Anzahl der Stiere verhielt es sich also: die weißen
Glichen den Braunen an Zahl und noch dem dritten Teil
Samt der Hälfte der Schwarzen, o Freund, zusammengenommen.
Weiter der schwarzen Meng' war gleich dem vierten Teil
Und dem fünften der scheck'gen, vermehrt um sämtliche braune.
Endlich der scheckigen Stier' Zahl gleichsetzen Du mußt,
Freund, dem sechsten und auch dem siebten Teile der weißen,
Noch gerechnet dazu sämtlicher braunen Meng'.
Anders verhielt sich's jedoch mit den weiblichen Rindern: es waren
Die mit weißlichem Haar gleich dem dritten Teil
Und dem vierten der schwärzlichen Rinder, der Kühe wie Stiere.
Ferner die schwarzen Küh' waren dem vierten Teil
Und dem fünften der Herde der scheckigen gleich, wenn gerechnet
Wurden sowohl die Küh' als auch die Stiere dazu.
Ebenso waren die scheckigen Küh' ein Fünftel und Sechstel
Aller mit braunem Haar, wenn zur Weide es ging.
Endlich die braunen Küh' ein Sechstel waren auch Siebtel
Von der gesamten Herd', welcher weißlich das Haar.
Kannst Du sagen genau, mein Freund, wie viele der Rinder
Dort nun waren vereint, auch wie viele es gab
Kühe von jeder Farb' und wohlgenährete Stiere,
Dann recht tüchtig fürwahr nennet im Rechnen man Dich.
Doch noch zählt man Dich nicht zu den Weisen; aber wohlan nun,
Komm und sage mir an, wie sich dies weiter verhält:
Wenn die ganze Zahl der weißen Stier' und der schwarzen
Sich vereint', alsdann standen geordnet sie da
Gleich nach Tiefe und Breite; die weiten Fluren Siziliens
Wurden völlig erfüllt durch die Menge der Stier',
Stellte man aber zusammen die braunen und scheckigen, alsdann
Wurde ein Dreieck erzeugt, einer stand an der Spitz',
Und es fehlte keiner der braunen und scheckigen Stiere,
Noch darunter man fand einen von anderer Farb'.
Hast du auch dies ausfindig gemacht und im Geiste erfasset,
Gibst das Verhältnis mir an, Freund das bei jeder Herd'
Findet statt, dann magst du stolz als Sieger einhergehn,
Denn hell strahlet Dein Ruhm nun in der Wissenschaft."

Es geht also um die Zahl der Rinder in der Herde des Gottes Helios, in der es sowohl weiße (W), schwarze (S), braune (B) und gescheckte (G) Stiere als auch entsprechende (w, s, b, g) Kühe gibt. Man erhält aus den ersten Bedingungen zunächst das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) S + B, \\ S &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) G + B, \\ G &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) W + B, \\ w &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) S + s, \\ s &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) G + g, \\ b &= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) B + b, \\ g &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) W + w. \end{aligned}$$

Dies führt zu den Lösungen:

$$\begin{aligned} W &= 10\,366\,482n, \\ S &= 7\,460\,514n, \\ B &= 4\,149\,387n, \\ G &= 7\,358\,060n, \\ w &= 7\,206\,360n, \\ s &= 4\,893\,246n, \\ b &= 5\,439\,213n, \\ g &= 3\,515\,820n, \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Jetzt müssen wir noch die letzten beiden Bedingungen berücksichtigen:

- Die weißen und schwarzen Stiere können sich in Form eines Quadrates aufstellen, d.h. es existiert ein $a \in \mathbb{N}$ mit
$$W + S = a^2. \tag{5.3.3}$$
- Die gescheckten und die braunen Stiere können sich in Form eines Dreiecks aufstellen, d.h. es existiert ein $c \in \mathbb{N}$ mit
$$G + B = \frac{1}{2}c(c+1) = \sum_{i=1}^{c} i. \tag{5.3.4}$$

Setzt man die Werte aus Gleichung (5.3.2) in (5.3.3) ein, so folgt

$$17\,826\,996n = a^2 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,567 \cdot n = a^2, \tag{5.3.5}$$

das heißt, n ist von der Form $3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,567 \cdot e^2$ mit $e \in \mathbb{N}$.
Setzt man die Werte aus Gleichung (5.3.2) in (5.3.4) ein, so folgt

$$11\,507\,447n = \frac{1}{2}c(c+1) \Leftrightarrow 2 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4\,567 \cdot n = c(c+1).$$

Mit der Darstellung von n, die aus Gleichung (5.3.5) folgte, erhält man damit

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (4\,567)^2 \cdot e^2 = c(c+1).$$

Setzt man $f = 2c + 1 \Leftrightarrow c = \frac{f-1}{2}$, so gelangt man zu der Pellschen Gleichung

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (4\,567)^2 \cdot e^2 &= \frac{f-1}{2} \cdot \left(\frac{f-1}{2} + 1\right) \\ f^2 - \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353}_{=:\, d} \cdot (\underbrace{2 \cdot 4\,567 \cdot c}_{=:\, g})^2 &= 1. \end{aligned}$$

Man erhält als eine Lösung dieser Pellschen Gleichung ein Paar (e, f) mit

$$\begin{aligned} f &= 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049, \\ g &= 50\,549\,485\,234\,315\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340. \end{aligned}$$

Es muss jetzt noch g auf Teilbarkeit durch 2 und 4 567 überprüft werden, um die Lösung der eigentlichen Gleichung zu erhalten. Mit Hilfe von Satz 5.2.5 erhält man als kleinste Lösung, die allen Anforderungen genügt

$$x + \sqrt{d}y = \left(f + \sqrt{d}g\right)^{2\,329} \approx \left(7,20834191 \cdot 10^{46}\right)^{2\,329}.$$

Das heißt, die Lösung (x, y) hat also jeweils mehr als 100 000 Stellen. Zurückrechnen liefert: Von mindestens einer der acht Rindersorten gibt es mehr als $10^{200\,000}$ Stück. Dies übertrifft die geschätzen Werte für die Anzahl der Atome unseres Universums bei weitem.

Die exakte Zahl wurde erstmals 1965 per Computer an der University of Waterloo, Kanada, vollständig berechnet.

KAPITEL 6

Einheiten reellquadratischer Zahlkörper

Eine der wichtigsten Anwendungen der Kettenbruchtheorie ist Gegenstand dieses Kapitels: Die Einheitenbestimmung reellquadratischer Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, wobei wie im gesamten Kapitel d eine quadratfreie natürliche Zahl sei. In Bezug auf die Einheiten eines reellquadratischen Zahlkörpers, eigentlich genauer: dessen sogenanntem Ganzheitsrings $\mathcal{O}_K$, genügt es, die Lösungen der diophantischen Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 1$ und $X^2 - dY^2 = \pm 4$ zu bestimmen, wobei wir uns mit den ersten beiden bereits im vorangegangenen Kapitel ausführlich beschäftigt haben. Von diesen vier Gleichungen ausgehend, ist es möglich, eine sehr einfache Gestalt der Menge aller Einheiten eines reellquadratischen Zahlkörpers herzuleiten. Zu diesem Ergebnis kann man auch mit anderen Argumenten gelangen, allerdings ist der Weg über die Kettenbrüche der einzige, welcher gleichzeitig auch konstruktive Aussagen zum Auffinden der Einheiten und insbesondere der sogenannten Grundeinheit enthält.

Im ersten Abschnitt werden wir die Grundlagen zu reellquadratischen Zahlkörpern einführen, bevor wir im zweiten Teil des Kapitels eine vollständige Klassifizierung der Einheitengruppe des Ganzheitsringes $\mathcal{O}_K$ erarbeiten. Dabei sehen wir, dass dazu im wesentlichen die Angabe der sogenannten Grundeinheit genügt. Mit deren Bestimmung befassen wir uns im letzten Abschnitt dieses Kapitels, wo wir dazu mit Hilfe der Kettenbruchtheorie eine sehr einfache Vorgehensweise formulieren werden.

6.1. Grundlagen

Dieser Abschnitt dient als Einführung in den Umgang mit quadratischen Zahlkörpern. Wir werden uns dabei an den Ausführungen von [SCH, 6, §1] orientieren. Die gesamte Theorie dieser Körper umfasst wesentlich mehr als die hier vorgestellten Eigenschaften (vgl. auch [KOC, 9]). Für das Ziel, welches wir in diesem Kapitel anstreben, reichen der im Folgenden eingeführte Begriffsapparat und die sich daraus ergebenden Argumente allerdings vollkommen aus.

Im zweiten Abschnitt des dritten Kapitels hatten wir festgestellt, dass es sich bei den Elementen von reellquadratischen Zahlkörpern um quadratische Irrationalzahlen handelt. Dies halten wir nochmals fest:

6.1.1. Definition. *Für $d > 0$ heißt ein Körper der Form*

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{u + v\sqrt{d} \mid u, v \in \mathbb{Q}\}$$

reellquadratisch.

Wenn man auch $d < 0$ zulässt, spricht man allgemein von einem *quadratischen Zahlkörper*. Speziell in dem Fall, dass d negativ ist, nennt man den Zahlkörper *imaginärquadratisch*. Allerdings sind die vor uns liegenden Überlegungen für diese

Körper weitaus weniger interessant, weshalb wir im nächsten Abschnitt an entsprechender Stelle nur das Ergebnis angeben.

Im Weiteren wollen wir nun einige grundlegende Eigenschaften von reellquadratischen Zahlkörpern herleiten. Dazu müssen wir zunächst noch einige Begriffe einführen:

6.1.2. Definition. *(i) Eine reelle Zahl x heißt* ganzalgebraisch*, wenn es ein ganzzahliges normiertes Polynom*

$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$$

mit $f(x) = 0$ gibt.

(ii) Der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ *von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist die Menge aller ganzalgebraischen Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.*

(iii) Man nennt die Menge aller invertierbaren Elemente von $\mathcal{O}_K$ die Einheitengruppe *von $\mathcal{O}_K$ und bezeichnet sie mit E_K.*

Zu dieser Definition sei noch angemerkt, dass es sich, wie auch die Bezeichnung nahelegt, bei $\mathcal{O}_K$ um einen Ring handelt, was man unmittelbar nachrechnet. Auch der Beweis, dass E_K tatsächlich eine Gruppe ist, stellt eine leichte Übung dar.

Unser Interesse liegt nun in der Bestimmung von E_K. Dazu liegt es nahe, als erstes den Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ näher zu betrachten.

Sehen wir uns zunächst die folgenden Beispiele an, bei denen man den Ganzheitsring bzw. wenigstens eine Teilmenge davon ohne weitere Überlegungen angeben kann:

6.1.3. Beispiel. (i) Die Rolle von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ übernimmt in $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ der Ring $\mathcal{O}_K$. Ist etwa $K = \mathbb{Q}$, so ist offensichtlich $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$. Weiter gilt für alle reellquadratischen Zahlkörper, da diese Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ sind: $\mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

(ii) Das Element $a + b\sqrt{d}$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$, ist Nullstelle des Polynoms $X^2 - 2aX + a^2 - db^2$ und somit im Ganzheitsring enthalten. Es gilt also:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{O}_K\,.$$

Jedoch stimmen diese Ringe im Allgemeinen nicht überein. Denn zum Beispiel ist die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, wie man leicht nachrechnet, Nullstelle des Polynoms $X^2 - X - 1$ und somit in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ enthalten, aber offensichtlich kein Element von $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Unser Ziel ist es nun, alle Elemente des Ganzheitsrings $\mathcal{O}_K$ zu bestimmen. Dazu benötigen wir noch einige Hilfsmittel: Zunächst die folgenden Begriffe, wobei wir dafür wieder auf die im dritten Kapitel eingeführte Bezeichnung der zu $x = u + v\sqrt{d}$ konjugierten Zahl $\overline{x} = u - v\sqrt{d}$ zurückgreifen.

6.1.4. Definition. *Die Zahl $N(x) = \overline{x} \cdot x$ heißt die* Norm *von x. Weiter nennen wir den Wert $Sp(x) = \overline{x} + x$ die* Spur *von x.*

Für die Überlegungen, welche die Einführung dieser Bezeichnung rechtfertigen, sind noch einige leicht zu verifizierende Rechengesetze in Bezug auf die Konjugation einer Zahl wichtig.

6.1.5. Lemma. *Für $x, y \in K$ gilt:*

(i) $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}\,.$

(ii) $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}\,.$

(iii) $\overline{\overline{x}} = x$.

(iv) $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \overline{x} = x$.

Damit können wir zunächst nachrechnen:

6.1.6. Lemma. *Die Norm und Spur eines Elementes aus K liegen in $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar unter Benutzung der Rechengesetze aus Lemma 6.1.5. □

An die Elemente von K, welche zusätzlich in $\mathcal{O}_K$liegen, müssen wir eine stärkere Bedingung stellen:

6.1.7. Lemma. *Ein Element x von K liegt genau dann in $\mathcal{O}_K$, wenn seine Spur und seine Norm in $\mathbb{Z}$ liegen.*

Beweis. [SCH, 6, §1, Lemma7] □

Jetzt haben wir die notwendigen Hilfsmittel zur Verfügung, um alle Elemente des Ganzheitsringes $\mathcal{O}_K$ klassifizieren zu können.

6.1.8. Satz. *Ist $d \not\equiv 1 \bmod 4$, so sind die Elemente von $\mathcal{O}_K$ genau die von der Form*

$$a + b\sqrt{d}\,,$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$.
Ist $d \equiv 1 \bmod 4$, so sind die Elemente von $\mathcal{O}_K$ genau die von der Form

$$\frac{a + b\sqrt{d}}{2}\,,$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a \equiv b \bmod 2$.

Beweis. [SCH, 6, §1, Satz8] □

Mit diesen Überlegungen können wir im folgenden Abschnitt die Untersuchung der Einheitengruppe E_K beginnen.

6.2. Die Einheitengruppe E_K

Ziel dieses Abschnittes ist die vollständige Bestimmung der Einheitengruppe E_K des Ganzheitsrings $\mathcal{O}_K$ eines reellquadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Wir sprechen abkürzend bei E_K auch von der Einheitengruppe von K, da aus dem Zusammenhang klar ist, dass man jeweils eigentlich die Einheiten des Ganzheitsrings $\mathcal{O}_K$ betrachtet.

6.2.1. Bemerkung. Im Gegensatz zum reellquadratischen Fall sind die Überlegungen für imaginärquadratische Zahlkörper wesentlich einfacher. Allerdings müssten wir dafür unseren Begriffsapparat noch weiterentwickeln, und die entsprechenden Argumentationen stehen auch nicht im Zusammenhang mit der Kettenbruchtheorie. Für die Details sei deshalb auf die Ausführungen von [SCH, 6, §7] verwiesen. Es ergibt sich, dass die Einheitengruppe eines imaginärquadratischen Zahlkörpers stets endlich ist und für $d \neq -1, -3$ sogar nur die Elemente 1 und -1 enthält.

Beschäftigen wir uns nun mit dem reellquadratischen Fall. Als ersten Schritt geben wir als Folgerung aus der Definition der Norm eines Elementes ein einfaches Kriterium dafür an, ob ein Element des Ganzheitsringes auch in E_K liegt:

6.2.2. Proposition. *Es gilt: Ein Element x von $\mathcal{O}_K$ ist genau dann eine Einheit, wenn*

$$N(x) = \pm 1$$

gilt.

Man sieht sofort, dass unabhängig von d immer 1 und -1 in E_K liegen. Allerdings sind dies nicht die einzigen Einheiten von $\mathcal{O}_K$, denn es gilt, falls $d+1$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}$ ist:

$$(\sqrt{d+1} - \sqrt{d}) \cdot (\sqrt{d+1} + \sqrt{d}) = d + 1 - d = 1.$$

Also sind zum Beispiel für $d = 3$ die Zahlen $2 \pm \sqrt{3}$ Einheiten in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Mit der in Satz 6.1.8 bewiesenen Gestalt der Elemente von $\mathcal{O}_K$ können wir aus Proposition 6.2.2 schließen:

6.2.3. Korollar. *Ist $d \not\equiv 1 \bmod 4$, so liegt $x = a + b\sqrt{d} \in \mathcal{O}_K$ genau dann in E_K, wenn (a, b) die Gleichung*

$$X^2 - dY^2 = \pm 1$$

löst.

Ist $d \equiv 1 \bmod 4$, so liegt $x = \frac{a+b\sqrt{d}}{2} \in \mathcal{O}_K$ genau dann in E_K, wenn (a, b) die Gleichung

$$X^2 - dY^2 = \pm 4$$

löst.

Beweis. Die erste Aussage ist unmittelbar klar. Für den zweiten Teil beachte, dass für $x = \frac{a+b\sqrt{d}}{2} \in \mathcal{O}_K$ die Bedingung

$$N(x) = \left(\frac{a + b\sqrt{d}}{2}\right)\left(\frac{a - b\sqrt{d}}{2}\right) = \pm 1$$

aus Proposition 6.2.2 äquivalent ist zu

$$a^2 - db^2 = \pm 4\,.$$

□

Die Elemente von E_K ergeben sich also genau aus den ganzzahligen Lösungspaaren der Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 1$ und $X^2 - dY^2 = \pm 4$. Aufgrund der Überlegungen des Kapitels zur Pellschen Gleichung ergeben sich deshalb die folgenden bemerkenswerten Aussagen:

6.2.4. Satz. *(i) Jeder reellquadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ besitzt unendlich viele Einheiten.*

(ii) Genauer gilt: Es existiert eine Einheit $\varepsilon \neq \pm 1$, sodass jede Einheit $e \in E_K$ in eindeutiger Form als

$$e = \pm \varepsilon^n\,,$$

mit $n \in \mathbb{Z}$, dargestellt werden kann.

(iii) Fassen wir insbesondere $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ als Teilkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf, so gibt es für jede reelle Zahl M höchstens endlich viele Einheiten $e \in E_K$ mit $1 < e < M$.

Beweis. (i) Dies folgt aus der Tatsache, dass schon die Pellsche Gleichung nach Satz 5.2.3 für alle d unendlich viele Lösungen besitzt.

(ii) Da für eine Einheit e auch e^{-1}, $-e$, und $-e^{-1}$ Einheiten sind, gibt es mindestens eine Einheit, die echt größer als 1 ist. Bezeichne die betragsmäßig kleinste Einheit, die dieser Bedingung genügt mit ε. Die Existenz einer solchen Einheit ε ist nach Teil (i) dieses Satzes immer gegeben. Um zu zeigen, dass sich alle anderen Einheiten daraus wie behauptet ergeben, nehmen wir an: Es gibt mindestens ein e mit $\varepsilon^n < e < \varepsilon^{n+1}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ sei. Daraus folgt aber $1 < e \cdot \varepsilon^{-n} < \varepsilon$, das heißt, $e \cdot \varepsilon^{-n}$ ist eine Einheit, die zwischen 1 und ε liegt, was allerdings im Widerspruch zur Minimalität von ε steht.

(iii) Dies folgt direkt aus der in (ii) bewiesenen Behauptung, dass sich alle Einheiten als Potenz einer bestimmten Einheit $\varepsilon > 1$ ergeben, und somit nur bis zu einer gewissen Potenz kleiner als eine gegebene reelle Schranke M sind. □

6.2.5. Definition. *Man nennt die Einheit ε aus Satz 6.2.4 die Grundeinheit von K.*

Die vollständige Klassifizierung der Einheitengruppe E_K ergibt sich also unmittelbar durch die Angabe der Grundeinheit ε. Wie man diese berechnen kann, untersuchen wir nun im folgenden Teil dieses Kapitels.

6.3. Bestimmung der Grundeinheit mit Hilfe der Kettenbruchtheorie

Ziel dieses Abschnitts ist die Erarbeitung einer einfachen Strategie zur Bestimmung der Grundeinheit der Einheitengruppe E_K eines reellquadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Nach den vorangegangenen Überlegungen kann man diese immer aus dem positiven Lösungspaar (x, y) genau einer der diophantischen Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 1$ und, falls $d \equiv 1 \bmod 4$ ist, eventuell auch aus $X^2 - dY^2 = \pm 4$, ableiten, welches bezüglich der Darstellung $x + y\sqrt{d}$ minimal ist.

Die Lösbarkeit von $X^2 - dY^2 = \pm 1$ hatten wir bereits ausführlich in Satz 5.2.3 betrachtet. Für die Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 4$ kann man mit analogen Überlegungen die folgende Bedingung angeben:

6.3.1. Lemma. *Für $d > 16$ gilt: Es gibt genau dann eine Lösung der Gleichung $X^2 - dY^2 = 4$ oder $X^2 - dY^2 = -4$, wenn eine der Restzahlen β_i, mit $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$, der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ den Nenner 4 besitzt.*

Beweis. Wir wissen bereits laut Satz 5.2.1, dass für $d > 16$ die ganzzahligen Lösungen der Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 4$ als Näherungsbruch in der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ vorkommen müssen.

Aus der im Beweis von Satz 5.2.3 angegebenen Gleichung

$$A_{i-1}^2 - dB_{i-1}^2 = (-1)^i V_i \,,$$

folgt, dass eine der Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 4$ genau dann lösbar ist, wenn unter den Nennern der Restzahlen einer mit Wert 4 vorkommt. Dabei genügt es wegen der Periodizität und Symmetrie der Restzahlen, welche wir in Satz 4.2.2 bewiesen haben, die ersten $\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$ Restzahlen zu berechnen. □

Für $d < 16$ macht Lemma 6.3.1 keine Aussage. In den für uns interessanten Fällen $d = 5$ bzw. $d = 13$ rechnet man allerdings schnell nach, dass die Gleichung $x^2 - 5y^2 = -4$ durch $(1, 1)$ bzw. $X^2 - 13Y^2 = -4$ durch $(3, 1)$ gelöst wird, wobei dies jeweils die bezüglich der Darstellung $x + y\sqrt{d}$ kleinsten Lösungen sind. Das heißt, $1 + \sqrt{5} \in E_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ und $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) \in E_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})}$ sind die jeweiligen Grundeinheiten.

Nun ist es uns möglich, die folgende Vorgehensweise zur Bestimmung der Grundeinheit anzugeben:

6.3.2. Satz. *Es sei k die Länge der primitiven Periode der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$.*

Ist $d \not\equiv 5 \bmod 8$, so ist die Grundheit von E_K durch $A_{k-1} + B_{k-1}\sqrt{d}$ gegeben.

Ist $d \equiv 5 \bmod 8$, so ist die Grundheit von E_K entweder durch $A_{i-1} + B_{i-1}\sqrt{d}$, falls eine Restzahl β_i, mit minimalem Index $i < \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$, der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ mit Nenner 4 existiert, oder ansonsten durch $A_{k-1} + B_{k-1}\sqrt{d}$ gegeben.

Beweis. Im Fall $d \not\equiv 1 \bmod 4$ sind wir wegen der Überlegungen von Korollar 6.2.3 nur an den Fundamentallösungen von $X^2 - dY^2 = \pm 1$ interessiert. Die bezüglich der Darstellung $x + y\sqrt{d}$ kleinste Lösung ist dabei laut Satz 5.2.5 und der daran anschließenden Bemerkung auf jeden Fall durch (A_{k-1}, B_{k-1}) gegeben.

Ist $d \equiv 1 \bmod 4$, so können wir unter Umständen kleinere Einheiten aus den Lösungen von $X^2 - dY^2 = \pm 4$ erhalten. Dabei sind nur die Lösungspaare (x, y), für die $x \equiv y \equiv 1 \bmod 2$ gilt, neu. Aus dieser Kongruenz folgt weiter $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \bmod 4$. Also muss, wenn man die diophantischen Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 4$ modulo 8 betrachtet, für d gelten: $1 - d \equiv 4 \bmod 8$, das heißt, $d \equiv 5 \bmod 8$. Somit haben wir im Fall $d \equiv 1 \bmod 8$ keine Lösungen der Gleichungen $X^2 - dY^2 = \pm 4$ zu erwarten, die uns eine Einheit liefern. Ist allerdings $d \equiv 5 \bmod 8$, so müssen wir also noch diese beiden Gleichungen mit Hilfe des in Lemma 6.3.1 angegebenen Kriteriums auf die Existenz eines positiven Lösungspaares hin untersuchen: Gibt es ein β_i mit einem Index wie angegeben, welches den Nenner 4 besitzt, erhält man daraus wie behauptet die Grundeinheit. □

Zur konkreten Bestimmung einer Grundeinheit ε bietet sich somit folgender Weg an:

- Ist $d \not\equiv 5 \bmod 8$, so bestimme die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$, und daraus den Näherungsbruch $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$.
- Ist $d \equiv 5 \bmod 8$, so bestimme wie in Beispiel 4.2.4 die ersten $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ Restzahlen von $\sqrt{d}$, wobei man als Abbruchkriterium Satz 4.2.3 verwende, und leite daraus die Kettenbruchentwicklung ab. Besitzt eine dieser Restzahlen β_i den Nenner 4, so berechne $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$. Gibt es keine solche Restzahl, so bestimme $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$.

Die Grundeinheiten der reellquadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d < 100$ sind in Teil B des Anhangs ab Seite 103 tabelliert.

Betrachten wir nun noch für jeden Fall ein numerisches Beispiel, um die jeweilige Vorgehensweise zu veranschaulichen:

6.3.3. Beispiel. (i) Für $d = 23$ folgt aus der Kongruenz $23 \equiv 7 \bmod 8$ und der Kettenbruchentwicklung $\sqrt{d} = [4, \overline{1, 3, 1, 8}]$, dass wir den dritten Näherungsbruch berechnen müssen. Es gilt:

$$4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}} = 4 + \frac{4}{5} = \frac{20}{5}\,.$$

Also ist $20 + 5\sqrt{23}$ die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{23})$.

(ii) Für $d = 13$ folgt aus der Kongruenz $13 \equiv 5 \bmod 8$, dass wir zunächst die Restzahlen bestimmen müssen. Dazu folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rcccl} & & \frac{\sqrt{13}}{1} & = & 3 + \frac{\sqrt{13}-3}{1}\,, \\ \frac{1}{\sqrt{13}-3} & = & \frac{\sqrt{13}+3}{4} & = & 1 + \frac{\sqrt{13}-1}{4}\,, \\ \frac{4}{\sqrt{13}-1} & = & \frac{\sqrt{13}+1}{3} & = & 1 + \frac{\sqrt{13}-2}{3}\,, \\ \frac{3}{\sqrt{13}-2} & = & \frac{\sqrt{13}+2}{3}\,. & & \end{array}$$

Nach dem zweiten Teil von Satz 4.2.3 können wir an dieser Stelle bereits die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{13}$ ablesen. Es folgt:

$$\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]\,.$$

Die Suche unter den Restzahlen nach dem Nenner 4 fällt positiv aus: Bereits die erste Restzahl besitzt die entsprechende Gestalt, sodass wir eigentlich an dieser Stelle die Berechnung der Restzahlen schon hätten abbrechen können. Denn nach Satz 6.3.2 leitet sich die Grundeinheit folglich aus $\frac{A_0}{B_0}$ ab.

Dies wollen wir durch die folgenden Überlegungen nochmals bestätigen: Aufgrund der Symmetrie der Folge der Restzahlen besitzt auch die vierte Restzahl den Nenner 4. Danach muss der Näherungsbruch $\frac{A_4}{B_4}$, der sich bei Abbruch der Kettenbruchentwicklung vor dem letzten Glied der primitiven Periode ergibt, die nächste Einheit liefern. Dies überprüfen wir mit den folgenden Rechnungen: Die Näherungsbrüche $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_3}{B_3}$ und $\frac{A_4}{B_4}$ ergeben sich zu $\frac{3}{1}, \frac{11}{3}$ und $\frac{18}{5}$, wobei für die Zahlenpaare $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{11}{2}, \frac{3}{2})$ und $(18, 5)$ in der Tat gilt:

$$\begin{array}{rcccl} \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 13 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 & = & \frac{9}{4} - \frac{13}{4} & = & -1\,, \\ \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 & = & \frac{121}{4} - \frac{117}{4} & = & -1\,, \\ 18^2 - 13 \cdot 5^2 & = & 324 - 325 & = & -1\,. \end{array}$$

Außerdem gelten die Beziehungen

$$\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2}$$

und

$$\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)^3 = 18 + 5\sqrt{13}\,.$$

Mit diesem Beispiel schließen wir auch unsere Untersuchungen zur grundlegenden Arithmetik der Kettenbrüche ab. Einen vorausschauenden Eindruck, in welche Richtungen man nun weiterdenken kann, vermittelt das nachfolgende letzte Kapitel.

KAPITEL 7

π und e

Die beiden folgenden kurzen Berichte über die weithin bekannten Zahlen π und e sollen einen Ausblick auf die Möglichkeiten geben, die in der Theorie der Kettenbrüche stecken und über diese Arbeit hinausgehen.

Bei der Untersuchung der Zahl π werden wir feststellen, dass es notwendig ist, einige gemachte Konventionen fallen zu lassen, um eine gewisse Regelmäßigkeit in deren Kettenbruchentwicklung feststellen zu können. Weiterhin ist die Kreiszahl ein Paradebeispiel für die Entwicklung der Mathematik. Schon über Jahrtausende hinweg beschäftigen sich unzählige Mathematiker damit, ihren exakten Wert zu bestimmen. Auch die Theorie der Kettenbrüche hat einen großen Beitrag dazu geliefert, dem Ziel um immer mehr Dezimalziffern näher zu kommen. Dennoch bleibt das Problem, zummindest eine Regelmäßigkeit in ihrer Dezimalbruchentwicklung nachzuweisen, bis zum heutigen Tag ungelöst.

Einen anderen Einblick in noch unbeantwortete Fragen wird uns die Zahl e geben. Mit der richtigen Schreibweise können wir sofort eine Regelmäßigkeit in ihrer Kettenbruchentwicklung erkennen. Dies lässt sich aber nur beschränkt auf andere transzendente Zahlen übertragen. Wie schon in der Zwischenbilanz am Ende des vierten Kapitels angedeutet, sind hier die Möglichkeiten der Kettenbrüche trotz vielversprechender Ansätze vermutlich noch weitgehend unerforscht.

Aufgrund der besseren Lesbarkeit wurde in beiden Artikeln auf eine zu genaue Literaturangabe verzichtet. Wennn nicht anders vermerkt, so stammen die zitierten Ergebnisse aus den Referenzen [AVA, 7], [BAU1], [BAU2], [BAU3], [BUDA, 14, §3], sowie [ROSZ, I, §8], welche jeweils eine Vielzahl der Eigenschaften von π und e darlegen.

7.1. Die Kreiszahl π

Die sogenannte Ludolphsche Zahl π, welche das Verhältnis von Kreisbogen zu Kreisdurchmesser beschreibt, ist neben der Eulerschen Zahl e die wohl am häufigsten auf eine in ihrer Kettenbruchentwicklung enthaltene Regelmäßigkeit untersuchte transzendente Zahl. Sie ist benannt nach Ludolph van Ceulen (1540-1610), dem niederländischen Mathematiker, der die ersten 35 ihrer Dezimalziffern berechnete. Die ersten Beweise für die Transzendenz der Kreiszahl stammen von Johann Heinrich Lambert (1766) und Ferdinand von Lindemann (1822).

Der Beginn der Kettenbruchentwicklung lässt keine Regelmäßigkeit erkennen, was der folgende 195-gliedrige Kettenbruch für π, der eine Genauigkeit bis auf 200 Stellen liefert, bestätigt:

$$\begin{aligned}\pi \approx\ & [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,\\ & 1,4,2,6,6,99,1,2,2,6,3,5,1,1,6,8,1,7,1,2,1,1,12,1,1,1,3,1,1,8,1,\\ & 1,2,1,6,1,1,5,2,2,3,1,2,4,4,16,1,161,45,1,22,1,2,2,1,4,1,2,24,\\ & 1,2,1,3,1,1,2,1,1,10,2,5,4,1,2,2,8,1,5,2,2,26,1,4,1,1,8,2,42,2,\\ & 1,7,3,3,1,1,7,2,4,9,7,2,3,1,57,1,18,1,9,19,1,2,18,1,3,7,30,1,1,\\ & 1,3,3,3,1,2,8,1,1,2,1,15,1,2,13,1,2,1,4,1,12,1,1,3,3,28,1,10,3,\\ & 2,20,1,1,1,1,4,1,1,1,5,3,2,1,6,1,4]\,.\end{aligned}$$

Die ersten 33 Teilnenner bestimmte John Wallis 1685, der dafür einen auf 35 Stellen berechneten Wert von π aus dem Jahre 1615 benutzte. Weitere rund 17 Millionen Teilnenner hat 1985 William R. Gosper aus der Kenntnis hinlänglich vieler Stellen von π berechnet, ohne ein Bildungsgesetz zu erkennen [ARHA, 13, §4]. Seit 2003 sind vom Kettenbruch von π mehr als 10^8 Anfangselemente bekannt.

Die ersten zur Kettenbruchentwicklung von π gehörenden Näherungsbrüche lauten:

$$\begin{gathered} 3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103\,993}{33\,102},\ \frac{104\,348}{33\,215},\ \frac{208\,341}{66\,317},\ \frac{312\,689}{99\,532},\ \frac{833\,719}{265\,381},\\ \frac{1\,146\,408}{364\,913},\ \frac{4\,272\,943}{1\,360\,120},\ \frac{5\,419\,351}{1\,725\,033},\ \frac{80\,143\,857}{25\,510\,582},\ \frac{165\,707\,065}{52\,746\,197},\ \frac{245\,850\,922}{78\,256\,779},\\ \frac{411\,557\,987}{131\,002\,976},\ \frac{1\,068\,966\,896}{340\,262\,731},\ \frac{2\,549\,491\,779}{811\,528\,438},\ \frac{6\,167\,950\,454}{1\,963\,319\,607},\ \frac{14\,885\,392\,687}{4\,738\,167\,652},\ \ldots\end{gathered}$$

Das Auffinden dieser Zahlen spiegelt die historische Entwicklung der mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten wieder:

- Der vermutlich erste Versuch der Bestimmung von π geht auf Archimedes von Syrakus († 212 v. Chr.) zurück. Er schätzte den Kreisumfang durch ein ein- und ein umbeschriebenes 96-Eck ab. Seine Berechnungen lieferten
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}\,.$$
- Ptolemaios fand als Approximation die Zahl $\frac{377}{120}$.
- Die Chinesen kannten bereits die Bestapproximation $\frac{355}{113}$ mit sechs richtigen Nachkommastellen. Der Bruch wurde vor etwas mehr als 1500 Jahren von dem chinesischen Mathematiker Tsu Kêng-Chih (430-501) entdeckt.
- 1430 fand der Araber al-Kāšī mittels eines Polygons aus $3 \cdot 2^{28}$ Seiten genau 16 korrekte Dezimalstellen.
- Mit dem selben Vorgehen wie al-Kāšī, aber anderen Polygonen gelingt es im 16. und 17. Jahrhundert verschiedenen europäischen Mathematikern, weitere Dezimalstellen von π zu finden.
- In Europa wurden die Quotienten $\frac{333}{106}$ und $\frac{355}{113}$ erst im 16. Jahrhundert vom niederländischen Mathematiker Adriaen Anthoniszoon (1527-1607) entdeckt.

Lässt man die Einschränkungen, dass alle Teilzähler 1 und alle Teilnenner außer b_0 positiv sein müssen, fallen, so ergeben sich die folgenden, nicht nur typographisch interessanten, Kettenbruchentwicklungen:

- Die wahrscheinlich bekannteste Darstellung ist der sogenannte Lambertsche Kettenbruch
$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{\ddots}}}}}},$$
der eigentlich auf William Brouncker zurückgeht. Dieser wandelte 1655 das sogenannte unendliche Wallis'sche Produkt
$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots}$$
in obigen Kettenbruch um.
- Eine Darstellung die bei Perron (vgl. [PER, VI, §47]) zu finden ist und auf Euler zurückgeht:
$$\pi = 1 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{\ddots}}}}}$$
- Ebenfalls von Perron (vgl. [PER, VI, §46]) stammt folgender Kettenbruch:
$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2 \cdot 3}{1 - \cfrac{1 \cdot 2}{3 - \cfrac{4 \cdot 5}{1 - \cfrac{3 \cdot 4}{3 - \cfrac{6 \cdot 7}{1 - \cfrac{5 \cdot 6}{\ddots}}}}}}}$$
- Vilém Jung aus Pardublitz veröffentlichte 1880 folgendes Ergebnis:
$$\frac{\sqrt{12}}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 \cdot 3 + \cfrac{2^2}{3 \cdot 5 + \cfrac{3^2}{3 \cdot 7 + \cfrac{4^2}{3 \cdot 9 + \cfrac{5^2}{3 \cdot 11 + \cfrac{6^2}{\ddots}}}}}}$$

Bezüglich der Konvergenz ist Lamberts Kettenbruch unter allen bekannten Kettenbruchentwicklungen von π mit einem offensichtlichen Bildungsgesetz der Beste. Außerdem war der Lambertsche Kettenbruch lange Zeit der Einzige, mit dem π auf beliebig viele Stellen berechnet werden konnte, ohne die Dezimalbruchentwicklung vorher kennen zu müssen.

7.2. Die eulersche Zahl e

Der Wert der nach Leonhard Euler (1707-1783) benannten Zahl e, Basis des natürlichen Logarithmus, kann zum Beispiel durch die ersten Koeffizienten der Reihendarstellung

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

näherungsweise als $e \approx 2,7182818286$ angegeben werden.

Entwickelt man diese rationale Approximation in einen Kettenbruch, so erhält man, wie bereits am Ende des zweiten Kapitels gesehen:

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots].$$

Dies verleitet zur Vermutung

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \ldots, 2k, 1, 1, \ldots],$$

wobei k die Menge der natürlichen Zahlen durchläuft. Dass dies tatsächlich die Kettenbruchentwicklung von e ist, geht auf Euler (1737) zurück, und wird zum Beispiel von Rockett und Szüsz bewiesen (vgl. [ROSZ, I, §8]).

Die Folge der zugehörigen Näherungszahlen von e beginnt mit $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, und danach erhält man

k	1	2	3	4	5	6	...
$\frac{A_{3k-1}}{B_{3k-1}}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{87}{32}$	$\frac{1\,264}{465}$	$\frac{23\,225}{8\,544}$	$\frac{517\,656}{190\,435}$	$\frac{13\,580\,623}{4\,996\,032}$	...
$\frac{A_{3k}}{B_{3k}}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{1\,457}{536}$	$\frac{25\,946}{9\,545}$	$\frac{566\,827}{208\,524}$	$\frac{14\,665\,106}{5\,394\,991}$	...
$\frac{A_{3k+1}}{B_{3k+1}}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{49\,171}{18\,089}$	$\frac{1\,084\,483}{398\,959}$	$\frac{28\,245\,729}{10\,391\,023}$	...

Speziell die Einträge für $\frac{A_{3k-1}}{B_{3k-1}}$ ergeben sehr gute Abschätzungen, da vor einem immer größeren Nenner abgebrochen wird.

Um die Kettenbruchentwicklung von e kompakt schreiben zu können, bietet sich die Einführung der sogenannten Hurwitzschen Kettenbrüche an:

7.2.1. Definition. *Einen Kettenbruch der Form*

$$[b_0, ..., b_{n-1}, \varphi_0(0), \varphi_1(0), ..., \varphi_{k-1}(0), \varphi_0(1), \varphi_1(1), ..., \varphi_{k-1}(1), \varphi_0(2), ..., \varphi_{k-1}(2), ...],$$

wobei die φ_i für $0 \leq i \leq k-1$ Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sind, nennt man einen hurwitzschen Kettenbruch, *und schreibt dann abkürzend*

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \overline{\varphi_0(\lambda), \varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_{k-1}(\lambda)}]_{\lambda=0}^{\infty}.$$

Der Periodenstrich hat dabei dieselben Eigenschaften wie bei den früher betrachteten periodischen Kettenbrüchen.

7.2.2. Beispiel. Zu hurwitzschen Kettenbrüchen.

(i) Die Kettenbruchentwicklung der eulerschen Zahl schreibt sich somit als

$$e = [2, \overline{1, 2+2\lambda, 1}]_{\lambda=0}^{\infty}\,.$$

(ii) Wie Perron zeigt (vgl. dazu [PER, IV, §31]), erhält man für die n-te Wurzel aus e folgenden hurwitzschen Kettenbruch:

$$\sqrt[n]{e} = [\overline{1, (1+2\lambda)n - 1, 1}]_{\lambda=0}^{\infty}\,.$$

Diese beiden Kettenbruchentwicklungen wurden schon von Leonard Euler gefunden und auch bewiesen.

Die Kettenbruchentwicklung von e zeigt, dass diese Zahl irrational und keine Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten ist, denn sonst müsste die Entwicklung bekanntlich endlich bzw. periodisch sein. Hermite hat 1873 bewiesen, dass die eulersche Zahl transzendent ist, das heißt, sie genügt keiner algebraischen Gleichung beliebigen Grades mit rationalen Koeffizienten. Dies wirft natürlich die Frage auf, ob man die Transzendenz einer Zahl an Hand ihrer Kettenbruchentwicklung ablesen kann. Leider bleibt diese Frage im Allgemeinen noch immer unbeantwortet.

Bisher weiß man, dass zum Beispiel $e, \pi, \sin(1), \log(2), \frac{\log(3)}{\log(2)}, e^{\pi}$ und $2^{\sqrt{2}}$ transzendent sind; bei $2^e, 2^{\pi}, \pi^e$ konnte man bislang weder die Transzendenz noch die Irrationalität nachweisen.

Dennoch gibt es bewiesene Aussagen über bestimmte Arten von Kettenbrüchen, mit denen man, ausgehend von einer solchen gegebenen Kettenbruchentwicklung, erkennt, ob die durch sie dargestellte Zahl einer algebraischen Gleichung eines gewissen Grades oder überhaupt keiner algebraischen Gleichung genügt. Das erste aussagekräftige Theorem stammt aus dem Jahre 1844 von Joseph Liouville:

7.2.3. Satz. *Ist x Wurzel einer algebraischen Gleichung n-ten Grades, mit $n > 0$, so gibt es eine positive Zahl $c < 1$ so, dass für alle natürlichen a und b gilt:*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| > \frac{c}{b^n}\,.$$

Eine viel tiefer liegende Verschärfung lieferten 1955 Klaus Friedrich Roth, Axel Thue und Carl Ludwig Siegel (nachzulesen in [6, 208]).

Der Satz von Liouville motiviert zur Einführung der folgenden Bezeichnung:

7.2.4. Definition. *Eine Zahl $x = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$ mit Näherungsbrüchen $\frac{A_i}{B_i}$ heißt* Liouvillesche Zahl, *wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen a und b existieren, so dass*

$$0 < \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^n}$$

gilt.

Dann gilt offenbar:

7.2.5. Satz. *Eine Liouvillesche Zahl ist transzendent.*

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, da etwa π ein Gegenbeispiel darstellt. Historisch gesehen war dies der erste Beweis der Existenz von transzendenten Zahlen, denn diese Überlegungen liefern eine Herangehensweise für deren Konstruktion: Wächst die Folge der Näherungsnenner von x hinreichend schnell, so liegen die

Näherungsbrüche nahe genug bei x, um die Transzendenz folgern zu können. Das abschließende Beispiel aus [HAWR, XI] veranschaulicht dies:

7.2.6. Beispiel. Es sei

$$x = [10, 10^{2!}, 10^{3!}, \ldots] .$$

Dann gilt mit Gleichung (2.2.3):

$$\left| x - \frac{A_i}{B_i} \right| \le \frac{1}{B_i B_{i+1}} < \frac{1}{b_{i+1} B_i^2} < \frac{1}{b_{i+1}} .$$

Mit $b_{i+1} = 10^{(i+1)!}$ und

$$B_1 < b_1 + 1$$

sowie

$$\frac{B_{i+1}}{B_i} = b_{i+1} + \frac{B_{i-1}}{B_i} < b_{i+1} + 1 \qquad , \text{falls } i \ge 1$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned} B_i &< (b_1+1)(b_2+1)\ldots(b_n+1) \\ &< \left(1 + \frac{1}{10}\right)\left(1 + \frac{1}{10^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{10^i}\right) b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_i \\ &< 2 a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_i = 2 \cdot 10^{1! + \ldots + i!} \\ &< 10^{2(i!)} = b_i^2 . \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\left| x - \frac{A_i}{B_i} \right| < \frac{1}{b_{i+1}} = \frac{1}{b_i^{i+1}} < \frac{1}{b_i^i} < \frac{1}{B_i^{i/2}} .$$

Das heißt, $x = [10, 10^{2!}, 10^{3!}, \ldots]$ ist eine Liouvillesche Zahl und folglich transzendent.

Anhang

Anhang A: Historische Anmerkungen

1. Christiaan Huygens und die Ursprünge der Theorie der Kettenbrüche. Die ersten wichtigen Schritte zur Erforschung der Kettenbrüche sind dem niederländischen Astronom, Mathematiker und Physiker Christiaan Huygens (1629-1695) zu verdanken. Dieser ist unter anderem als Begründer der Wellentheorie des Lichts, Erfinder der Pendeluhr und als Entdecker der Ringe des Saturns bekannt geworden. Seine Ergebnisse zur Kettenbruchtheorie wurden als Bestandteil seines Werks *descriptio automati planetarii* veröffentlicht, welches zusammen mit anderen Arbeiten 1703 unter dem Titel *Opuscula postuma* erschien. Er beschreibt darin die Konstruktion eines Zahnradmodells des zu dieser Zeit bekannten Teils unseres Sonnensystems.

Die Überlegungen, die er dazu anstellte, sind ausführlich bei [ROSZ, IV, §1] und [LUE, XV, §6] dargelegt, wobei aus letzterer Quelle auch die deutschen Übersetzungen zu den im Folgenden angegebenen Orginalzitaten stammen. Die wichtigsten Schritte wollen wir nun nachvollziehen:

Christiaan Huygens schwebte vor, ein möglichst exaktes Abbild des bekannten Sonnensystems zu erschaffen, um darin die aktuellen, zukünftigen und vergangenen Planetenkonstellationen abzulesen. Diesen Zeitraum gibt er im Laufe der Beschreibung des *automati planetarii*, wie er seine von einem Uhrwerk angetriebene Erfindung nennt, als auf dreihundert Jahre beschränkt an. Der Konstruktion legt Huygens die bestmöglichen gegen Ende des 17. Jahrhunderts verfügbaren Daten unseres Sonnensystems zugrunde: Für die Dauer eines Jahres veranschlagte er $365\frac{35}{144}$ Tage, und als Verhältnis der Umlaufszeiten der bekannten Planeten zu einem Erdenjahr nimmt er die folgenden Werte an:

Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn
$\frac{25\,335}{105\,190}$	$\frac{64\,725}{105\,190}$	1	$\frac{197\,836}{105\,190}$	$\frac{1\,247\,057}{105\,190}$	$\frac{3\,095\,277}{105\,190}$

Da diese Zahlen zu große Nenner und Zähler besaßen, konnte er die Ergebnisse nicht als Übersetzungsverhältnis der Zahnräder verwenden. Also stand Huygens vor einem Problem, dass er wie folgt formulierte:

> *Huc itaque res tota recidit ut datis numeris duobus magnis certam inter se rationem habentibus, alii minores inveniantur rotarum dentibus multitudine sua non incommodi, quique eandem proxime rationem ita exhibeant, ut nulli ipsis minores proprius.*
>
> *Die ganze Sache läuft also darauf hinaus, dass zu zwei gegebenen Zahlen, die zwischen sich ein Verhältnis haben, andere, kleinere*

> *gefunden werden, die durch ihre Vielzahl an Zähnen den Rädern nicht unangepasst sind und die dem Verhältnis möglichst nahe kommen, so dass keine kleineren (Räder) geeigneter (sind).*

Als Folge entwickelte er die Theorie der Bestapproximationen. Seine ersten Versuche lieferten etwa für den Saturn als gute Approximation den ersten Näherungsbruch $\frac{59}{2}$, auf dessen Grundlage er für das Verhältnis der Zähne der beiden Zahnräder $118 : 4$ notierte. Mit diesem Ergebnis war er nicht zufrieden, was auch seine Aufzeichnungen zu den sich daraus ergebenden Ungenauigkeiten bestätigen. Zunächst versuchte Huygens, da er wusste, dass die Näherungsbrüche immer abwechselnd größer und kleiner als der gegebene Bruch waren, auf diesem Weg bessere Ergebnisse zu erhalten. Diese Vorgehensweise war allerdings zum Scheitern verurteilt, da bei der Bestimmung der weiteren Nährungsbrüche recht schnell zu große Nenner oder Zähler auftraten, und es schwierig war, ein Zahnrad mit mehr als zweihundert Zähnen zu konstruieren.

Seine schließlich erfolgbringenden Untersuchungen erläutert er beispielhaft für den Saturn: Zunächst konnte er auf Grundlage neuester Berechnungen als genaueren Bruch für dessen Umlaufszeit das Verhältnis $\frac{77\,708\,431}{2\,640\,858}$ angeben. Um für diesen korrigierten Wert einen Bruch mit möglichst kleinem Nenner anzugeben, schlägt Huygens, wie schon zur Bestimmung der ursprünglich notierten Approximationen von ihm verwendet, die uns bekannte Vorgehensweise der Kettenbruchentwicklung vor, die er wie folgt sprachlich fasst:

> *Inveniendis igitur numeris minoribus qui proxime rationem istam exprimunt; divido majorem per minorem, & rursus minorem per eum qui a divisione relinquintur, & hunc rursus per ultimum residuum, atque ita porro continenter pergendo invenio quod sit ex primâ divisione*
>
> $$\langle 29, 2, 2, 1, 5, 1, 4, \&c.\rangle$$
>
> *Um nun kleinere Zahlen zu finden, die diesem Verhältnis möglichst nahe kommen, teile ich die größere durch die kleinere, & weiter die kleinere durch das, was bei der Division übrig bleibt, & dies wiederum durch den letzten Rest. Und so weiter fortfahrend, finde ich ex primâ divisione Folgendes*
>
> $$\langle 29, 2, 2, 1, 5, 1, 4, \&c.\rangle$$

Weiter beschreibt Huygens, dass er nun die letzten Zahlen dieser Folge „abschneidet“, um daraus die Näherungsbrüche zu bestimmen. Bei einer Berechnung bis zum dritten Kettenbruchglied stößt er dabei auf ein befriedigendes Ergebnis:

> *Itaque numeri 7 ad 206 propinqua ratio est rationis 2540858 ad 77708431. Eaque rotæ Saturniæ dentes 206 dedimus, ipsam vero moventi dentes 7.*
>
> *Folglich ist 7 zu 206 Näherungsverhältnis zum Verhältnis 2540858 zu 77708431. Wir geben also dem Saturnrad 206 Zähne, dem treibenden aber 7.*

Der relative Fehler zum genaueren Bruch $\frac{77\,708\,431}{2\,640\,858}$ beträgt für diesen Wert bereits nur noch etwa $0,01\%$, weshalb sich Huygens, trotz der noch bevorstehenden technischen Schwierigkeiten bei der Konstruktion der Zahnräder, für das Übersetzungsverhältnis 206 : 7 entschied.

2. Pierre de Fermat und die Ursprünge der Pellschen Gleichung. Bereits das komplette fünfte Kapitel dieser Arbeit wurde der Suche nach den Lösungen der Pellschen Gleichungen $X^2 - dY^2 = 1$, mit natürlichem und quadratfreiem d, gewidmet. Wir wollen hier nun auf die interessante Entwicklung vom Aufkommen der Frage nach der Lösung einer solchen Gleichung, bis hin zur vollständigen Lösung des Problems zurückblicken.

Eine sehr ausführliche Darlegung der historischen Hintergründe ist bei [BUDA, 14, §4] und [LUE, 7, §4] nachzulesen. Diese bildete auch die Grundlage des nachfolgenden Textes.

Die Frage nach den Lösungen einer Pellschen Gleichung taucht schon in den frühen Epochen der Mathematikgeschichte auf. Das *Rinderproblem des Archimedes*, welches wohl auch das populärste Beispiel einer solchen Gleichung ist, muss von diesem bereits in der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts v. Chr. verfasst worden sein. Eine ausführliche Besprechung dieses Rätsels ist in Abschnitt 5.3 nachzulesen.

Doch nicht nur in Europa hatte man Gefallen am Rechnen mit großen Zahlen gefunden. Im siebten Jahrhundert war es der indische Astronom und Mathematiker Brahmagupta (598-668), der die Gleichung $X^2 - 92Y^2 = 1$ zur öffentlichen Debatte machte. Er sagte, wer diese innerhalb eines Jahres lösen könne, sei ein Mathematiker. Da es noch keine systematische Herangehensweise zur Lösung einer solchen Gleichung gab, musste man zumindest Ausdauer im Probieren haben: Die kleinste positive Lösung lautet $(1151, 120)$.

Als wahrscheinlich erster ausführlich mit der Pellschen Gleichung auseinandergesetzt, hat sich Pierre de Fermat (1607-1665), der wohl bedeutenste mathematische „Amateur" seiner Zeit. Der französische Jurist wird in Simon Singhs *Fermats letzter Satz* wie folgt beschrieben:

> *Wenn er nicht gerade Priester zum Tode auf dem Scheiterhaufen verurteilte, gab er sich von ganzem Herzen seiner Liebhaberei hin. Fermat war ein echter Amateur, laut E.T. Bell der „Fürst der Amateure". Julian Coolidge hingegen nahm Fermat nicht in sein Buch* Mathematics of Great Amateurs *auf, eben weil er „echte Größe besaß, weshalb man ihn zu den Professionellen zählen sollte".* [SIN, 2]

Fermats, besonders im Hinblick auf seinen „Letzten Satz", bedauernswerteste Eigenheit war es, keine Beweise der von ihm entdeckten Zusammenhänge zu veröffentlichen, sondern die „professionellen" Mathematiker Europas, und speziell Englands, mit verschiedenen Rätseln, die schließlich auf den gesuchten Satz hinausliefen, herauszufordern. Dies tat er, wie weiter unten beschrieben, auch im Zusammenhang mit der Pellschen Gleichung. Kritiker behaupten, Fermat sei überhaupt nicht in der Lage gewesen, die Beweise selbst zu führen, sondern habe mit möglichst vielen Veröffentlichungen den Ruhm für sich gewinnen wollen. Simon Singh urteilt über Fermats Vorgehen wir folgt:

> *Publikation und Anerkennung bedeuteten ihm nichts - er gab sich mit dem schlichten Vergnügen zufrieden, in aller Ruhe neue mathematische Sätze zu postulieren. Das scheue und zurückgezogene*

> *Genie Fermat besaß freilich auch einen schelmischen Zug, der, wenn die Geheimniskrämerei noch hinzukam, zur Folge hatte, daß er mit anderen Mathematikern nur in Verbindung trat, um sie zu foppen. Er schrieb Briefe, in denen er seine neuesten Sätze verkündete, ohne deren Beweis mitzuliefern. Dann forderte er seine Zeitgenossen auf, diesen zu suchen. Daß er seine eigenen Beweise nie offenbarte, führte zu manchem Zerwürfnis. René Decartes nannte Fermat einen „Aufschneider", und der Engländer John Wallis verwünschte ihn als „diesen verdammten Franzosen".* [SIN, 2]

Fermat selbst hingegen war sich seines Könnens mehr als bewusst, man denke nur an die Randnotiz zum Beweis seines „Letzten Satzes":

> *Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hnc marginis exiguitas non carperet.*
>
> *Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.* [SIN, 2]

Den Grundstein zur systematischen Lösung der Pellschen Gleichung legte er mit den folgenden, im Januar 1656 veröffentlichten Rätseln, welche er vorrangig an John Wallis (1616-1703), den zu dieser Zeit bekanntesten englischen Mathematiker, stellte:

- Man finde einen Kubus, der, wenn man ihm die Summe seiner echten Teiler zuschlägt, ein Quadrat wird, wofür $7^3 + (1 + 7 + +7^2) = 20^2$ ein Beispiel bildet.
- Man finde ein Quadrat, das, wenn man ihm die Summe seiner echten Teiler zuschlägt, ein Kubus wird.

Die ersten Lösungen lieferte allerdings der französische Mathematiker Bernhard Frénicle de Bessy (1605-1675), mit dem Fermat in Korrespondenz stand. Er gab die beeindruckende Zahl

$$(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 47)^3 = 424\,462\,145\,606\,577\,000$$

an, welche die erste Aufgabe löst. Wallis hingegen wollte sich wohl nicht die Zeit nehmen, um über Fermats Probleme nachzudenken, und antwortete:

> *But I can make at this moment this response: the number 1 in and on itself satisfies both demands.*

Dies übersetzten Burton und Dalkowski wie folgt:

> *Die Zahl 1, „kraft ihrere Amtes und ihrer Eigenschaften", erfüllt beide Forderungen.*

Offenbar war sich Wallis nicht über die Tragweite der Problemstellung bewusst. Im Februar 1657 formulierte Fermat den Kern seines Problems, welcher sich bereits in der ersten der beiden obigen Aufgaben verbirgt, in Form eines neuen Rätsels, mit dem er sich erneut an die „europäische mathematische Gesellschaft" wandte:

- Man finde eine Zahl y, die den Ausdruck $dy^2 + 1$ zu einem Quadrat macht, wobei d eine positive ganze Zahl ist, aber keine Quadratzahl; zum Beispiel: $3 \cdot 1^2 + 1 = 2^2$ und $5 \cdot 4^2 + 1 = 9^2$.

Für die ersten 150 Werte von d konnte Frénicle die Lösungen angeben. Im Glauben, damit die Grenzen des Möglichen erreicht zu haben, forderte er Wallis auf, die jeweils kleinsten Lösungspaare der Gleichungen $X^2 - 151Y^2 = 1$ und $X^2 - 313Y^2 = 1$ anzugeben. Die überraschende Antwort darauf kam von Lord William Brouncker of Ireland (1620-1684), dem Förderer Wallis', dass es ihn weniger als eine Stunde gekostet hat, herauszufinden, dass

$$126\,862\,368^2 - 313 \cdot 7\,170\,685^2 = -1$$

gilt, und damit $y = 2 \cdot 7\,170\,685 \cdot 126\,862\,368$ die gewünschte Lösung von $X^2 - 313Y^2 = 1$ angibt.

Dieser intellektuelle Wettstreit war allerdings auch schon der gesamte zwischenzeitliche Höhepunkt der Suche nach den Lösungen der Pellschen Gleichung, da es trotz zahlreicher Versuche nicht gelang, einen allgemeinen Weg zur Konstruktion der Lösungspaare anzugeben.

Mehr als einhundert Jahre später waren es Leonhard Euler (1707-1783) und Joseph Louis Lagrange (1736-1813), die schließlich die Lösungsstruktur der Pellschen Gleichung erkannten. Euler entwickelte die Methode, aus der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ die kleinste ganzzahlige Lösung zu bestimmen. Was allerdings fehlte, war der Beweis, dass man auf dem beschriebenen Weg stets eine andere als die triviale Lösung $x = 1$ und $y = 0$ findet. Diesen lieferte Lagrange im Jahre 1768 nach, wobei er zusätzlich einen Nachweis dafür angab, dass man alle weiteren Lösungen aus den Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ ableiten kann.

Nachdem wir somit am Ende der „Entstehungsgeschichte" der Gleichungen $X^2 - dY^2 = 1$ angekommen sind, stellt sich dem aufmerksamen Leser vermutlich die Frage, wie diese zu ihrem Namen gekommen sind. Ein Versehen Eulers verhalf dem englischen Mathematiker John Pell (1611-1685), der sich nur wenig mit ihnen beschäftigte, zu der Ehre, mittlerweile untrennbar mit diesen Gleichungen in Verbindung gebracht zu werden. Bei einer etwas flüchtigen Durchsicht von Wallis' *Opera Mathematica* (1693), in dem neben Brounckers Methode zur Lösung der Gleichung auch die Pellsche Arbeit über diophantische Analysis dargelegt wird, muss Euler ihre Beiträge verwechselt haben.

Aber zumindest die Leser dieses Berichts sollten, wenn sie das nächste Mal auf eine Pellsche Gleichung stoßen, vor der Bestimmung der Fundamentallösung noch für einen Augenblick auch an Pierre de Fermat denken.

Anhang B: Tabellen

1. Tabelle der Kettenbruchentwicklungen von $\sqrt{d}$:
Nachfolgend ist für $d \leq 100$ die jeweilige Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ aufgeführt. Größere Tabellen dieser Art findet man unter anderem bei Carolo Ferdinando Degen [DEG], der diese in mühsamer Detailarbeit erstmalig bis $d = 1\,000$ anfertigte.

d	Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$	
1	$[1]$	
2	$[1, \overline{2}]$	
3	$[1, \overline{1, 2}]$	
4	$[2]$	
5	$[2, \overline{4}]$	
6	$[2, \overline{2, 4}]$	
7	$[2, \overline{1, 1, 1, 4}]$	
8	$[2, \overline{1, 4}]$	
9	$[3]$	
10	$[3, \overline{6}]$	
11	$[3, \overline{3, 6}]$	
12	$[3, \overline{3, 6}]$	
13	$[3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$	
14	$[3, \overline{1, 2, 1, 6}]$	
15	$[3, \overline{1, 6}]$	
16	$[4]$	
17	$[4, \overline{8}]$	
18	$[4, \overline{4, 8}]$	
19	$[4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$	
20	$[4, \overline{2, 8}]$	
21	$[4, \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$	
22	$[4, \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$	
23	$[4, \overline{1, 3, 1, 8}]$	
24	$[4, \overline{1, 8}]$	
25	$[5]$	
26	$[5, \overline{10}]$	
27	$[5, \overline{5, 10}]$	
28	$[5, \overline{3, 2, 3, 10}]$	
29	$[5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$	
30	$[5, \overline{2, 10}]$	
31	$[5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$	

d	Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$	
32	$[5, \overline{1, 1, 1, 10}]$	
33	$[5, \overline{1, 2, 1, 10}]$	
34	$[5, \overline{1, 4, 1, 10}]$	
35	$[5, \overline{1, 10}]$	
36	$[6]$	
37	$[6, \overline{12}]$	
38	$[6, \overline{6, 12}]$	
39	$[6, \overline{4, 12}]$	
40	$[6, \overline{3, 12}]$	
41	$[6, \overline{2, 2, 12}]$	
42	$[6, \overline{2, 12}]$	
43	$[6, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}]$	
44	$[6, \overline{1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12}]$	
45	$[6, \overline{1, 2, 2, 2, 1, 12}]$	
46	$[6, \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}]$	
47	$[6, \overline{1, 5, 1, 12}]$	
48	$[6, \overline{1, 12}]$	
49	$[7]$	
50	$[7, \overline{14}]$	
51	$[7, \overline{7, 14}]$	
52	$[7, \overline{4, 1, 2, 1, 4, 14}]$	
53	$[7, \overline{3, 1, 1, 3, 14}]$	
54	$[7, \overline{2, 1, 6, 1, 2, 14}]$	
55	$[7, \overline{2, 2, 2, 14}]$	
56	$[7, \overline{2, 14}]$	
57	$[7, \overline{1, 1, 4, 1, 1, 14}]$	
58	$[7, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}]$	
59	$[7, \overline{1, 2, 7, 2, 1, 14}]$	
60	$[7, \overline{1, 2, 1, 14}]$	
61	$[7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}]$	
62	$[7, \overline{1, 6, 1, 14}]$	
63	$[7, \overline{1, 14}]$	
64	$[8]$	
65	$[8, \overline{16}]$	
66	$[8, \overline{8, 16}]$	
67	$[8, \overline{5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16}]$	

d	Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$	
68	$[8,\overline{4,16}]$	
69	$[8,\overline{3,3,1,4,1,3,3,16}]$	
70	$[8,\overline{2,1,2,1,2,16}]$	
71	$[8,\overline{2,2,1,7,1,2,2,16}]$	
72	$[8,\overline{2,2,1,7,1,2,2,16}]$	
73	$[8,\overline{1,1,5,5,1,1,16}]$	
74	$[8,\overline{1,1,1,1,16}]$	
75	$[8,\overline{1,1,1,16}]$	
76	$[8,\overline{1,2,1,1,5,4,5,1,1,2,1,16}]$	
77	$[8,\overline{1,3,2,3,1,16}]$	
78	$[8,\overline{1,4,1,16}]$	
79	$[8,\overline{1,7,1,16}]$	
80	$[8,\overline{1,16}]$	
81	$[9]$	
82	$[9,\overline{18}]$	
83	$[9,\overline{9,18}]$	
84	$[9,\overline{6,18}]$	
85	$[9,\overline{4,1,1,4,18}]$	
86	$[9,\overline{3,1,1,1,8,1,1,1,3,18}]$	
87	$[9,\overline{3,18}]$	
88	$[9,\overline{2,1,1,1,2,18}]$	
89	$[9,\overline{2,3,3,2,18}]$	
90	$[9,\overline{2,18}]$	
91	$[9,\overline{1,1,5,1,5,1,1,18}]$	
92	$[9,\overline{1,1,2,4,2,1,1,18}]$	
93	$[9,\overline{1,1,1,4,6,4,1,1,1,18}]$	
94	$[9,\overline{1,2,3,1,1,5,1,8,1,5,1,1,3,2,1,18}]$	
95	$[9,\overline{1,2,1,18}]$	
96	$[9,\overline{1,3,1,18}]$	
97	$[9,\overline{1,5,1,1,1,1,1,1,5,1,18}]$	
98	$[9,\overline{1,8,1,18}]$	
99	$[9,\overline{1,18}]$	
100	$[10]$	

2. Tabelle der Fundamentallösungen der Pellschen Gleichung:
Nachfolgend ist für $d < 100$ die Fundamentallösung (x_1, y_1) der Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ aufgeführt. Eine Tabelle dieser Art bis $d = 1\,000$ findet man bei [DEG].

d	x_1	y_1	
2	3	2	
3	2	1	
5	9	4	
6	5	2	
7	8	3	
8	3	1	
10	19	6	
11	10	3	
12	7	2	
13	649	180	
14	15	4	
15	4	1	
17	33	8	
18	17	4	
19	170	39	
20	9	2	
21	55	12	
22	197	42	
23	24	5	
24	5	1	
26	51	10	
27	26	5	
28	127	24	
29	9 801	1 820	
30	11	2	
31	1 520	273	
32	17	3	
33	23	4	
34	35	6	
35	6	1	
37	73	12	
38	37	6	

d	x_1	y_1	
39	25	4	
40	19	3	
41	2 049	320	
42	13	2	
43	3 482	531	
44	199	40	
45	161	24	
46	24 335	3 588	
47	48	7	
48	7	1	
50	99	14	
51	50	7	
52	649	90	
53	66 249	9 100	
54	485	66	
55	89	12	
56	15	2	
57	151	20	
58	19 503	2 574	
59	530	69	
60	31	4	
61	1 766 319 049	226 153 980	
62	63	8	
63	8	1	
65	129	16	
66	65	8	
67	48 842	5 967	
68	33	4	
69	7 775	936	
70	251	30	
71	3 480	413	
72	17	2	
73	2 281 249	267 000	
74	3 699	430	
75	26	3	
76	57 799	6 630	

d	x_1	y_1	
77	351	40	
78	53	6	
79	80	9	
80	9	1	
82	163	18	
83	82	9	
84	55	6	
85	285 769	30 996	
86	10 405	1 122	
87	28	3	
88	197	21	
89	500 001	53 000	
90	19	2	
91	1 574	165	
92	1 151	120	
93	12 151	1 260	
94	2 143 295	221 064	
95	39	4	
96	49	5	
97	62 809 633	6 377 352	
98	99	10	
99	10	1	

3. Grundeinheiten reellquadratischer Zahlkörper:

d	Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$	
2	$1+\sqrt{2}$	
3	$2+\sqrt{3}$	
5	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	
6	$5+2\sqrt{6}$	
7	$8+3\sqrt{7}$	
8	$1+\sqrt{2}$	
10	$3+\sqrt{10}$	
11	$10+3\sqrt{11}$	
12	$2+\sqrt{3}$	

d	Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$	
13	$\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$	
14	$15+4\sqrt{14}$	
15	$4+\sqrt{15}$	
17	$4+\sqrt{17}$	
18	$1+\sqrt{2}$	
19	$170+39\sqrt{19}$	
20	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	
21	$\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$	
22	$197+42\sqrt{22}$	
23	$24+5\sqrt{23}$	
24	$5+2\sqrt{6}$	
26	$5+\sqrt{26}$	
27	$2+\sqrt{3}$	
28	$8+3\sqrt{7}$	
29	$\frac{1}{2}(5+\sqrt{29})$	
30	$11+2\sqrt{30}$	
31	$1520+273\sqrt{31}$	
32	$1+\sqrt{2}$	
33	$23+4\sqrt{33}$	
34	$35+6\sqrt{34}$	
35	$6+\sqrt{35}$	
37	$6+\sqrt{37}$	
38	$37+6\sqrt{38}$	
39	$25+4\sqrt{39}$	
40	$3+\sqrt{10}$	
41	$32+5\sqrt{41}$	
42	$13+2\sqrt{42}$	
43	$3482+531\sqrt{43}$	
44	$10+3\sqrt{11}$	
45	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	
46	$24\,335+3\,588\sqrt{46}$	
47	$48+7\sqrt{47}$	
48	$2+\sqrt{3}$	
50	$1+\sqrt{2}$	
51	$50+7\sqrt{51}$	
52	$\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$	

d	Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$	
53	$\frac{1}{2}(7+\sqrt{53})$	
54	$5+2\sqrt{6}$	
55	$89+12\sqrt{55}$	
56	$15+4\sqrt{14}$	
57	$151+20\sqrt{57}$	
58	$99+13\sqrt{58}$	
59	$530+69\sqrt{59}$	
60	$4+\sqrt{15}$	
61	$\frac{1}{2}(39+5\sqrt{61})$	
62	$63+8\sqrt{62}$	
63	$8+3\sqrt{7}$	
65	$8+\sqrt{65}$	
66	$65+8\sqrt{66}$	
67	$48\,842+5\,967\sqrt{67}$	
68	$4+\sqrt{17}$	
69	$\frac{1}{2}(25+3\sqrt{69})$	
70	$251+30\sqrt{70}$	
71	$3\,480+413\sqrt{71}$	
72	$1+\sqrt{2}$	
73	$1\,068+125\sqrt{73}$	
74	$43+5\sqrt{74}$	
75	$2+\sqrt{3}$	
76	$170+39\sqrt{19}$	
77	$\frac{1}{2}(9+\sqrt{77})$	
78	$53+6\sqrt{78}$	
79	$80+9\sqrt{79}$	
80	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	
82	$9+\sqrt{82}$	
83	$82+9\sqrt{83}$	
84	$\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$	
85	$\frac{1}{2}(9+\sqrt{85})$	
86	$10\,405+1\,122\sqrt{86}$	
87	$28+3\sqrt{87}$	
88	$197+42\sqrt{22}$	
89	$500+53\sqrt{89}$	
90	$3+\sqrt{10}$	

d	Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$	
91	$1\,574 + 165\sqrt{91}$	
92	$24 + 5\sqrt{23}$	
93	$\frac{1}{2}(29 + 3\sqrt{93})$	
94	$2\,143\,295 + 221\,064\sqrt{94}$	
95	$39 + 4\sqrt{95}$	
96	$5 + 2\sqrt{6}$	
97	$5\,604 + 569\sqrt{97}$	
98	$1 + \sqrt{2}$	
99	$10 + 3\sqrt{11}$	

Symbolverzeichnis

$[b_0, b_1, \ldots, b_n]$	endlicher Kettenbruch, 12
$[b_0, b_1, b_2 \ldots]$	unendlicher Kettenbruch, 12
$[\overline{b_0, \ldots, b_{k-1}}]$	reinperiodischer Kettenbruch, 41
$[b_0, \ldots b_{n-1}, \overline{b_n, \ldots, b_{n+k-1}}]$	gemischtperiodischer Kettenbruch, 41
$\lfloor\ \rfloor$	Gaußklammer, 21
$\mid\ \mid$	euklidischer Absolutbetrag, 26
A_i	i-ter Näherungszähler, 12
$A_{i,j}$	i-ter Näherungszähler mit Indexerhöhung um j, 17
B_i	i-ter Näherungsnenner, 12
$B_{i,j}$	i-ter Näherungsnenner mit Indexerhöhung um j, 17
b_i	i-ter Teilnenner, 11
β_i	i-te Restzahl, 12
d	natürliche, nichtquadratische (in Kapitel 3 und 6: quadratfreie) Zahl, 42
e	eulersche Zahl, 23
E_K	Einheitengruppe eines quadratischen Zahlkörpers, 80
ε	Grundeinheit von E_K, 83
F_i	i-te Fibonaccizahl, 19
γ_i	Konjugierte der i-ten Restzahl β_i, 47
k	primitive Periodenlänge, 41
$N(x)$	Norm des Elementes x eines quadratischen Zahlkörpers, 80
$\mathcal{O}_K$	Ganzheitsring eines quadratischen Zahlkörpers, 80
ϕ	goldener Schnitt, 19
π	Kreiszahl, 5
q	rationale Zahl, 55
$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$	quadratischer Zahlkörper, 42
r_i	i-ter Rest des euklidischen Algorithmus, 18

$Sp(x)$	Spur des Elementes x eines qudratischen Zahlkörpers, 80
U_i	ganzzahliger Anteil des Zählers der i-ten Restzahl, 45
V_i	ganzzahliger Nenner der i-ten Restzahl, 45
$\overline{x}$	Konjugierte einer quadratischen Irrationalzahl x, 46

Literaturverzeichnis

[ARHA] ARNDT, J., HAENEL, C., *Pi*, Springer, Berlin, 2000.

[AVA] AVANZI, R., *Eine moderne Einführung in die klassische Zahlentheorie* (Arbeitstitel, Voreinsicht unter `http://caccioppoli.mac.rub.de/website/teachingmaterial/zt-ss08/zt.pdf`); Englische Ausgabe: *A modern introduction to classical number theory*, de Gruyter Verlag, 2010.

[BAU1] BAUER, F. L., *3.41259... und 2.71828...*, Historische Notizen zur Informatik, Springer, Berlin, 2009; erschienen in Informatik-Spektrum 27, Springer, Berlin, 2004.

[BAU2] BAUER, F. L., *Lamberts Kettenbruch*, Historische Notizen zur Informatik, Springer, Berlin, 2009; erschienen in Informatik-Spektrum 28, Springer, Berlin, 2005.

[BAU3] BAUER, F. L., *Seit Bombelli und Cataldi: Periodische Kettenbrüche*, Historische Notizen zur Informatik, Springer, Berlin, 2009; erschienen in Informatik-Spektrum 29, Springer, Berlin, 2006.

[BAU4] BAUER, F. L., *Kettenbruch-Phänomene*, Historische Notizen zur Informatik, Springer, Berlin, 2009; erschienen in Informatik-Spektrum 32, Springer, Berlin, 2009.

[BER] BEHRENDS, E., *Fünf Minuten Mathematik: 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT*, Vieweg, Wiesbaden, 2006.

[BUDA] BURTON, D. M., DALKOWSKI H., *Handbuch der elementaren Zahlentheorie*, Heldermann, Lemgo, 2005.

[BUN] BUNDSCHUH, P., *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 2002.

[DEG] DEGEN, C. F., *Canon Pellianus*, Hafniae, 1817.

[HAWR] HARDY, G. H., WRIGHT, E. M., *An introduction to the theory of numbers*, 5th ed., Oxford Univ. Press, New York, 1975.

[KHI] KHINCHIN, A. Y., *Continued fractions*, University of Chicago Press, Chicago & London, 1964.

[HAU] HAUSMANN, A., *Der goldene Schnitt, Göttliche Proportionen und noble Zahlen*, Books on Demand GmbH, 2001.

[KOC] KOCH, H., *Algebraische Zahlentheorie*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.

[LAG] LAGRANGE, J. L., *Mathematische Werke, Dritter Band: Die Theorie der Gleichungen*, deutsche Ausgabe, Berlin, 1824.

[LUE] LÜNEBURG, H., *Von Zahlen und Größen, Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis*, Birkhäuser, Berlin, 2008.

[MSPI] MÜLLER-STACH, S., PIONTKOWSKI, J., *Elementare und algebraische Zahlentheorie: Ein moderner Zugang zu klassischen Themen*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2007.

[OLD] OLDS, C. D., *Continued Fractions*, Random House, New York, 1963.

[RESC] REISS, K., SCHMIEDER, G., *Basiswissen Zahlentheorie: Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche*, Springer, Berlin, 2007.

[PER] PERRON, O., *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 2. Auflage, Teubner, Leipzig, 1929, Nachdruck Chelsea Publishing Company, New York, 1950.

[SCH] SCHMIDT, A., *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer, Berlin 2007.

[SIN] SINGH, S., *Fermats letzter Satz, Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels*, 12. Auflage, Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 2007.

[ROSZ] ROCKETT A. M., SZÜSZ, P., *Continued fractions*, World Scientific, Singapore, 1992.

[ZAG] ZAGIER, D. B., *Zetafunktionen und quadratische Körper: Eine Einführung in die höhere Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 1981.

Stichwortverzeichnis