Fachbereich 9 - Mathematik

Arithmetisch definierte Graphen über rationalen Funktionenkörpern

Udo Nonnengardt

Vorwort

Jean-Pierre Serre hat in seinen Buch "Trees" (Springer-Verlag 1980) eine Methode entwickelt, mit der man arithmetische Informationen über Untergruppen von $GL_2(\mathbf{F}_q[T])$ erlangen kann. Hierbei läßt man die entsprechende Untergruppe auf dem sogenannten Bruhat-Tits-Baum operieren. Hierdurch werden bestimmte Knoten und Kanten des Baumes identifiziert, wodurch ein Graph entsteht. Die Homologie dieses Graphen beinhaltet dann arithmetische Information über die betrachtete Untergruppe von $GL_2(\mathbf{F}_q[T])$, und zwar entspricht der $\mathbf{Z}$-Rang der Homologie dem Rang der Kommutatorfaktorgruppe.

Diese Methode wenden wir auf Hecke-Kongruenzuntergruppen an. Dabei beobachtet man, daß die Struktur der Quotientengraphen gewissen Gesetzmäßigkeiten unterliegt. Es treten nur Knoten mit 1,2,3 oder q+1 Kanten auf. Dies werden wir in zwei Struktursätzen beweisen. Ferner werden wir die auftretenden Knoten und Kanten parametrisieren und Formeln für ihre Anzahl herleiten. Dann haben wir die Quotientengraphen gut im Griff und können leicht eine Formel für den $\mathbf{Z}$-Rang der Homologie auf den Quotientengraphen herleiten. Wir geben sogar einen Algorithmus an, wie man sich zu einer konkret gegebenen Hecke-Kongruenzuntergruppe eine Basis der Homologie berechnen kann.

An dieser Stelle möchte ich mich noch ganz herzlich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere bei Herrn Prof.Dr E.-U. Gekeler für das interessante Thema und die gute Betreuung. Er hat mir durch das Beantworten vieler Fragen und das Beseitigen mancher Mißverständnisse viel geholfen. Ich möchte auch Herrn Dipl.Math. A. Schweizer für manch klärendes Gespräch danken. Abschließender Dank gehört meiner Frau, die mir das Anfertigen sämtlicher Skizzen abgenommen hat.

Inhaltsverzeichnis

NOTATIONEN

$\#(M)$	Kardinalität der Menge M		
$\|M\|$	Kardinalität der Menge M		
$\mathbf{N}$	Menge der natürlichen Zahlen {1,2,3,...}		
$\mathbf{N_0}$	N mit der Null {0,1,2,3,...}		
$\mathbf{Z}$	Menge der ganzen Zahlen		
$\mathbf{Q}$	Menge der rationalen Zahlen		
$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen		
$\mathbf{F_q}$	Körper mit q Elementen		
$e, e_1, \ldots$	Kanten eines Graphen	Def. 1.1	S. 1
$E(\mathbf{X})$	Kantenmenge des Graphen **X**	Def. 1.1	S. 1
$v, v_1, \ldots$	Knoten eines Graphen	Def. 1.1	S. 1
$V(\mathbf{X})$	Knotenmenge des Graphen **X**	Def. 1.1	S. 1
G'	Kommutatorgruppe von G	Def. 1.25	S. 6
G^{ab}	Faktorkommutatorgruppe von G	Def. 1.25	S. 6
Gx	Bahn von x unter G	Def. 1.27	S. 6
G_x	Fixgruppe von x in G	Def. 1.28	S. 6
Z(G)	Zentrum der Gruppe G	Def. 1.24	S. 6
$\mathbf{v}$	diskrete Bewertung	Def. 1.30	S. 6
$O_{k,\mathbf{v}}$	Bewertungsring des Körpers k bezüglich **v**	Def. 1.31	S. 6
π	Uniformisierende	Def. 1.32	S. 6
L,L',...	Gitter	Def. 2.1	S.14
Λ, Λ'	Gitterklassen	Def. 2.2	S.14
$d(\Lambda, \Lambda')$	Abstand der Gitterklasse Λ von der Gitterklasse Λ'	Def. 2.4	S.15
$\mathcal{T}$	Bruhat-Tits-Baum	Def. 2.6	S.15
$G_L, G_\Lambda, G_{\Lambda\Lambda'}$	Stabilisatoren	Def. 2.16	S.19
Υ	Fundamentalbereich von $\mathcal{T}$ modulo Γ	Satz 2.26	S.22
$[v]_k$	Klasse von v modulo G_k	Def. 3.9	S.38
$[v]_{k,k+1}$	Klasse von v modulo $G_k \cap G_{k+1}$	Def. 3.9	S.38
$V_k(n)$	Menge der Knoten der Stufe Λ_k von ${}_{\Gamma_0(n)}\backslash^{\mathcal{T}}$	Def. 3.9	S.38
$E_{k,k+1}(n)$	Menge der Kanten der Stufe $\Lambda_k\Lambda_{k+1}$ von ${}_{\Gamma_0(n)}\backslash^{\mathcal{T}}$	Def. 3.9	S.38

1 Grundlagen

1.1 Graphentheoretische Grundlagen

Definition 1.1 (Graph / endlicher Graph)
Ein Graph $\mathbf{X}$ *besteht aus zwei Mengen* $V = V(\mathbf{X}) = \{v_1, v_2, ...\}$ *und* $E = E(\mathbf{X}) = \{e_1, \overline{e_1}, e_2, \overline{e_2}, ...\}$ *und zwei Abbildngen:*

$$E \to V \times V \quad e \mapsto (\ o(e),\ t(e)\ )$$
$$E \to E \quad e \mapsto \overline{e}$$

die folgenden Bedingungen genügen:
Für alle $e \in E$ *gilt:* $\overline{\overline{e}} = e$, $\overline{e} \neq e$, $o(e) = t(\overline{e})$
Ein Graph heißt endlich, wenn E *und* V *endliche Mengen sind.*

Folgende Bezeichnungen führe ich ein:

v ist *Knoten* von $\mathbf{X}$	$v \in V(\mathbf{X})$
e ist *Kante* von $\mathbf{X}$	$e \in E(\mathbf{X})$
die zu e *inverse* Kante	$\overline{e}$
Startknoten von e	$o(e) = t(\overline{e})$
Zielknoten von e	$t(e) = o(\overline{e})$
Enden von e	$o(e)$ und $t(e)$
v und w sind *benachbart*	v und w sind Enden einer Kante

Definition 1.2 (Untergraph)
Ein Untergraph $\mathbf{X}'$ *von* $\mathbf{X}$ *ist ein Graph, für den folgende Eigenschaften gelten:*

(1) $V(\mathbf{X}') \subset V(\mathbf{X})$; $E(\mathbf{X}') \subset E(\mathbf{X})$

(2) $\forall e \in E(\mathbf{X}') : t(e) \in V(\mathbf{X}'); o(e) \in V(\mathbf{X}')$

Definition 1.3 (Orientierung)
Eine Orientierung eines Graphen $\mathbf{X}$ *ist eine Teilmenge* $E_+ \subset E(\mathbf{X})$, *so daß* $E(\mathbf{X}) = E_+ \dot{\cup} \overline{E_+}$. *Diese existiert immer. Ein Graph mit Orientierung heißt gerichteter oder orientierter Graph. Wir bezeichnen* $\overline{E_+}$ *auch als* E_-.

Definition 1.4 (Morphismus)
Ein Morphismus $\phi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ *von Graphen besteht aus zwei Abbildungen* $\varphi_V : V(\mathbf{X}) \to V(\mathbf{X}')$, $\varphi_E : E(\mathbf{X}) \to E(\mathbf{X}')$ *mit den Eigenschaften:*
$\forall e \in E(\mathbf{X})$ *gilt:*

(1) $o(\varphi_E(e)) = \varphi_V(o(e))$

(2) $t(\varphi_E(e)) = \varphi_V(t(e))$

(3) $\varphi_E(\overline{e}) = \overline{\varphi_E(e)}$.

Wenn die Abbildungen φ_V *und* φ_E *zusätzlich bijektiv sind, nennt man* ϕ Isomorphismus *von Graphen.*

Definition 1.5 (Morphismus von orientierten Graphen)
Unter einem Morphismus $\phi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ von orientierten Graphen versteht man einen Morphismus nach Definition 1.4, wobei $\mathbf{X}$ und $\mathbf{X}'$ orientierte Graphen sind und zusätzlich gilt:

(4) $\quad \varphi_E(E_+(\mathbf{X})) \subset E_+(\mathbf{X}')$ *oder* $\varphi_E(E_+(\mathbf{X})) \subset E_-(\mathbf{X}')$

Definition 1.6 (Darstellung eines Graphen)
Ein Knoten v wird dargestellt durch einen Punkt $\bigcirc$,
eine Kante e durch einen Pfeil von $o(e)$ nach $t(e)$ $\longrightarrow$
und $\{e, \overline{e}\}$ durch eine Verbindungslinie $\underline{\quad\quad}$.

Definition 1.7 ($\mathbf{Pfad_n}, \mathbf{Kreis_n}, \mathbf{Pfad_\infty}, \mathbf{Pfad_{-\infty,\infty}}$)

a) $\mathbf{Pfad_n}$ *sei folgender Graph*

$$V(Pfad_n) = \{v_0, ..., v_n\},$$
$$E_+(Pfad_n) = \{e_1, ..., e_n\},$$
$$o(e_i) = v_{i-1}, \text{ und } t(e_i) = v_i.$$

Darstellung: $\overset{v_0}{\bigcirc} \xrightarrow{e_1} \overset{v_1}{\bigcirc} \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_n} \overset{v_n}{\bigcirc}$.

b) $\mathbf{Kreis_n}$ *ist der Graph*

$$V(Kreis_n) = \{v_0, ..., v_n\},$$
$$E_+(Kreis_n) = \{e_0, e_1, ..., e_n\},$$
$$o(e_i) = v_{i-1}, \text{ und } t(e_i) = v_i, \text{ mit } o(e_0) = v_n .$$

Darstellung: $\overset{v_n}{\bigcirc} \xrightarrow{e_0} \overset{v_0}{\bigcirc} \xrightarrow{e_1} \overset{v_1}{\bigcirc} \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_n} \overset{v_n}{\bigcirc}$.

c) $\mathbf{Pfad_\infty}$ *habe folgende Gestalt*

$$V(Pfad_\infty) = \{v_0, v_1, ...\}$$
$$E_+(Pfad_\infty) = \{e_1, e_2, ...\} \text{ mit } o(e_i) = v_{i-1}, \, t(e_i) = v_i .$$

Darstellung: $\overset{v_0}{\bigcirc} \xrightarrow{e_1} \overset{v_1}{\bigcirc} \xrightarrow{e_2} \ldots$.

c) $\mathbf{Pfad_{-\infty,\infty}}$ *wird definiert als*

$$V(Pfad_{-\infty,\infty}) = \{v_i \,|\, i \in \mathbf{Z}\}$$
$$E_+(Pfad_{-\infty,\infty}) = \{e_i \,|\, o(e_i) = v_i \, , \, t(e_i) = v_{i+1} \; ; i \in \mathbf{Z}\}.$$

Darstellung: $\ldots \xrightarrow{e_{-1}} \overset{v_{-1}}{\bigcirc} \xrightarrow{e_0} \overset{v_0}{\bigcirc} \xrightarrow{e_1} \overset{v_1}{\bigcirc} \xrightarrow{e_2} \ldots$.

Definition 1.8 (Weg / geschlossener Weg / reduzierter Weg / Reduktion / Komposition von Wegen)

a) Ein **Weg** *der Länge n ($n \geq 0$) in* $\mathbf{X}$ *ist ein Morphismus* Φ *von* $Pfad_n$ *nach* $\mathbf{X}$. *Der Weg geht von v nach w, wenn* $\varphi_V(v_0) = v$ *und* $\varphi_V(v_n) = w$ *ist. Ein Weg wird auch durch die Kanten-Folge* $(\varphi_E(e_1), ..., \varphi_E(e_n))$ *beschrieben.*

b) Ein **geschlossener Weg** *der Länge n ($n \geq 0$) in* $\mathbf{X}$ *ist ein Morphismus von* $Kreis_n$ *nach* $\mathbf{X}$.

c) Einen geschlossenen Weg der Form $(e, \bar{e})$ *nenne ich eine* **Sackgasse**. *Wenn ein Weg der Länge n von v nach w eine Sackgasse enthält, so gibt es auch einen Weg der Länge n-2 von v nach w. Ein Weg ohne Sackgassen heißt* **reduzierter Weg**. *Aus jedem Weg* ϕ *erhält man durch Weglassen der Sackgassen einen wohlbestimmten reduzierten Weg* ϕ^{red}, *die* **Reduktion** *von* ϕ.

d) Ist ϕ *ein Weg der Länge n von u nach v und* ψ *ein Weg der Länge m von v nach w, so verstehen wir unter* $\psi * \phi$ *den durch* ϕ *und* ψ *bestimmten Weg der Länge m+n von u nach w.*

Definition 1.9 (Fundamentalgruppe)
Sei $v \in V(\mathbf{X})$ *Knoten des Graphen* $\mathbf{X}$. *Die Fundamentalgruppe* $\pi_1(v, \mathbf{X})$ *bezüglich des Basisknotens v ist die Menge aller reduzierten geschlossenen Wege von v nach v. Das Produkt zweier Elemente* ϕ *und* ψ *ist durch* $\phi \cdot \psi = (\phi * \psi)^{red}$ *gegeben. So ergibt sich eine (nichtkommutative) Gruppenstruktur.*

Definition 1.10 (Halbgerade / Gerade / Ende eines Graphen)

a) Eine **Halbgerade** *in* $\mathbf{X}$ *ist ein Untergraph von* $\mathbf{X}$, *der isomorph zu* $Pfad_\infty$ *ist.*

b) Eine **Gerade** *in* $\mathbf{X}$ *ist ein Untergraph von* $\mathbf{X}$, *der isomorph zu* $Pfad_{-\infty,\infty}$ *ist.*

c) Zwei Halbgeraden sind äquivalent, wenn sie sich nur in endlich vielen Knoten und Kanten voneinander unterscheiden. Ein **Ende** *eines Graphen* $\mathbf{X}$ *ist eine Äquivalenzklasse von Halbgeraden.*

Definition 1.11 (Zusammenhangskomponente)
Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn je zwei Knoten durch mindestens einen Weg verbunden sind. Ein maximaler (bzgl. Inklusion) zusammenhängender Untergraph von $\mathbf{X}$ *heißt eine Zusammenhangskomponente von* $\mathbf{X}$.

Definition 1.12 (Zykel)
Ein Zykel ist eine Äquivalenzklasse reduzierter geschlossener Wege bzgl. der Äquivalenzrelation der zyklischen Vertauschung ($v_i \mapsto v_{i+1}; e_i \mapsto e_{i+1}$). Ein Graph ohne Zykel der Länge $n > 0$ heißt **azyklisch**. *Ein Zykel der Länge 1 heißt* **Schleife.**

Definition 1.13 (kombinatorisch)
Ein Graph X *heißt kombinatorisch, wenn* X *keine reduzierten geschlossenen Wege der Länge* ≤ 2 *besitzt.*

Definition 1.14 (bipartit)
Ein Graph X *heißt bipartit, wenn für die Knotenmenge eine Zerlegung* $V(\mathrm{X}) = V_1 \dot{\cup} V_2$ *existiert, so daß für alle* $e \in E(\mathrm{X})$ *gilt:*

$o(e) \in V_1 \Rightarrow t(e) \in V_2$, *bzw.* $o(e) \in V_2 \Rightarrow t(e) \in V_1$.

Ein bipartiter Graph besitzt eine natürliche Orientierung durch $E_+(\mathrm{X}) = \{e \in E(\mathrm{X}) \mid t(e) \in V_1\}$.

Definition 1.15 (Baum/maximaler Unterbaum)
Ein zusammenhängender azyklischer Graph heißt Baum. Ein maximaler Unterbaum eines zusammenhängenden Graphen X *ist ein maximaler (bzgl. Inklusion) zusammenhängender azyklischer Untergraph von* X .

Anmerkungen:

Zu einer Zusammenhangskomponente eines Graphen gibt es im allgemeinen verschiedene maximale Unterbäume. Ein maximaler Unterbaum T eines zusammenhängenden Graphen **X** enthält alle Knoten von **X**.

In jedem Baum T gibt es zwischen zwei Knoten v und w genau einen reduzierten Weg von v nach w.

Definition 1.16 (Zykelbasis)
Sei $Y = \mathrm{X} \setminus \{e_i, \overline{e_i} \mid i \in I\}$ *ein maximaler Unterbaum von* X , I *eine Indexmenge. Zu jedem Paar* $\{e_i, \overline{e_i}\}$ *sei eine Kante* e_i *ausgewählt. Dann gibt es einen eindeutig festgelegten Zykel* c_i *in* $Y \cup \{e_i, \overline{e_i}\}$, *der* e_i *enthält. Die Menge* C *der Zykel* c_i *nennen wir eine Zykelbasis von* X .

Anmerkung:

Betrachtet man die Zykel als Vektoren in dem Vektorraum der **R**-wertigen alternierenden Funktionen auf den orientierten Kanten des Graphen **X**, so entspricht eine Zykelbasis einer Basis des von den Zykeln erzeugten Untervektorraumes. In diesem Zusammenhang ist eine Zykelbasis also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Entsprechendes gilt für den **Z**-Modul der **Z**-wertigen Funktionen.

Definition 1.17 (Abstand)
Seien v,w Knoten des Graphen X. *Unter dem Abstand von v und w (geschrieben: dis(v,w)) versteht man die Länge des kürzesten Weg von v nach w (falls ein solcher existiert).*

Definition 1.18 (Durchmesser)
Sei $\mathbf{X}$ *ein endlicher Baum. Der größte Abstand von Knoten , der in* $\mathbf{X}$ *auftritt, heißt Durchmesser von* $\mathbf{X}$ *(geschrieben: diam*$(\mathbf{X})$*),also:*

$$diam(\mathbf{X}) = \max_{v,w \in V(\mathbf{X})} dis(v,w) \ .$$

Satz 1.19
Sei $\mathbf{X}$ *ein Baum mit Durchmesser diam*$(\mathbf{X}) = n < \infty$*. Dann gilt:*

(1) Die Menge $t(\mathbf{X})$ *der Endknoten des Baumes ist nichtleer.*

(2) Sei $\mathbf{X}$*' der Graph, der aus* $\mathbf{X}$ *durch Weglassen von* $t(\mathbf{X})$ *und der zugehörigen Kanten entsteht. Für* $n \geq 2$ *hat* $\mathbf{X}$*' den Durchmessser n-2.*

(3) Für n=0 ist $\mathbf{X}$ *isomorph zu* $Pfad_0$ *(Darstellung: ○).*
Für n=1 ist $\mathbf{X}$ *isomorph zu* $Pfad_1$ *(Darstellung: ○——○).*

Beweis: siehe bei [Se, Chapter 1, 2.2 Prop.10] .

Definition 1.20 (Homologie)
Die $\mathbf{Z}$*-wertige Homologie* $H_1(\mathbf{X},\mathbf{Z})$ *eines Graphen* $\mathbf{X}$ *ist der* $\mathbf{Z}$*-Modul der Flüsse von* $\mathbf{X}$ *. Ein Fluß von* $\mathbf{X}$ *ist eine Abbildung* $f: E(\mathbf{X}) \to \mathbf{Z}$ *mit den Eigenschaften:*

(1) f *hat als Funktion auf den Kanten von* $\mathbf{X}$ *endlichen Träger;*

(2) $\forall e \in E(\mathbf{X})$ *ist* $f(\overline{e}) = -f(e)$*;*

(3) $\forall v \in V(\mathbf{X})$ *ist* $\sum\limits_{t(e)=v} f(e) = 0.$

Entsprechend definiert man die $\mathbf{R}$-wertige Homologie $H_1(\mathbf{X},\mathbf{R})$ etc.

Satz 1.21
Zwischen der Homologie eines Graphen und der Fundamentalgruppe des Graphen zu einem Knoten v *besteht folgender Zusammenhang:*

$$H_1(\mathbf{X},\mathbf{Z}) \ \cong \ \pi_1(v,\mathbf{X})^{ab} \qquad \textit{(vgl. 1.25 - Definition von ( )}^{ab}\textit{)} \ .$$

Beweis: siehe bei [Se, Chapter 1, 5.1 ff] .

Satz 1.22 (Euler-Formel)
Sei $\mathbf{X}$ *ein endlicher Graph,* c_0 *die Anzahl der Knoten und* c_1 *die Anzahl der ungerichteten Kanten von* $\mathbf{X}$ *. n bezeichne die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und* h_1 *den* $\mathbf{Z}$*-Rang von* $H_1(\mathbf{X},\mathbf{Z})$*. Dann gilt* $h_1 = c_1 - c_0 + n$*.*

Der klassische Beweis geht durch Induktion über die Anzahl der Kanten, wobei unterschieden werden muß, ob durch eine zugefügte Kante ein neuer Zykel entsteht oder nicht.

Korollar 1.23 (Euler-Formel für Bäume)
Sei $\mathbf{X}$ *ein endlicher Baum,* c_0 *die Anzahl der Knoten und* c_1 *die Anzahl der ungerichteten Kanten von* $\mathbf{X}$ *. Dann gilt* $c_1 = c_0 - 1$*.*

Beweis: Ein Baum hat keine Zykel und ist zusammenhängend. □

1.2 Algebraische Grundlagen

1. Grundlagen aus der Gruppentheorie:

Definition 1.24 (Zentrum)
Sei G Gruppe. $Z(G) := \{g \in G| \quad xg = gx \quad \forall x \in G\}$

Definition 1.25 (Kommutatorgruppe / Faktorkommutatorgruppe)
Sei G Gruppe.
$G' := < \{ [g,h] := ghg^{-1}h^{-1} \,|\, g,h \in G \} >$
Dann ist G' normale Untergruppe von G und die Faktorkommutatorgruppe $G^{ab} := {}^{G}/_{G'}$ ist abelsch.

Definition 1.26 (Operation)
Sei G Gruppe und M Menge. Man sagt G operiert (von links) auf M, wenn eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G \times M & \to & M \\ (g,x) & \mapsto & gx \quad \textit{gegeben ist,} \end{array}$$

für die gilt: (1) $1 \cdot x = x$
(2) $(gh)x = g(hx)$

Definition 1.27 (Bahn/Orbit)
Sei G eine Gruppe, die auf der Menge M operiert, und sei $x \in M$.
$Gx := \{gx \,|\, g \in G\}$ *heißt die Bahn (oder der Orbit) von x.*

Definition 1.28 (Fixgruppe/Stabilisator)
Sei G eine Gruppe, die auf der Menge M operiert, und sei $x \in M$.
$G_x := \{g \in G| \, gx = x\}$ *heißt die Fixgruppe (oder der Stabilisator) von x.*

Satz 1.29
Sei G eine Gruppe, die auf der Menge M operiert, und sei $x \in M$. Die Abbildung $G \to M \;;\; g \mapsto gx$ induziert eine Bijektion zwischen den Mengen ${}^{G}/_{G_x}$ und Gx.

2. Grundlagen aus der Bewertungstheorie

Definition 1.30 (diskrete Bewertung)
Eine diskrete Bewertung v eines Körpers k ist ein surjektiver Homomorphismus $v: \; k^* \to \mathbf{Z}$, für den gilt:
$v(x+y) \geq Min\,(v(x), v(y))$ *für alle $x, y \in k$ mit $x, y, x+y \neq 0$.*
Man setzt außerdem $v(0) = +\infty$.

Definition 1.31 (Bewertungsring)
$O_{k,v} := \{x \in k \,|\, v(x) \geq 0\}$ *ist der Bewertungsring von k bezüglich der Bewertung v. Er heißt auch der Ring der v-ganzen Zahlen von k.*

Definition 1.32 (Uniformisierende)
Es existiert ein Element $\pi \in k^*$ mit $v(\pi) = 1$. Ein solches Element heißt Uniformisierende. Jedes Element $x \neq 0$ von k läßt sich darstellen als $x = u\pi^r$ mit $r = v(x)$ und einer Einheit u von $O_{k,v}$.

Definition 1.33 (Restkörper)
Der Körper ${}^{O_{k,v}}/_{\pi O_{k,v}}$ heißt der Restkörper von k bezüglich der Bewertung v. Falls er endlich ist, bezeichnet man seine Kardinalität mit q.

3. Die Gruppe $GL_2(k)$ und ihre Untergruppen

Definition 1.34 ($GL_2(k)$)
Sei k kommutativer Ring.

$$GL_2(k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \quad a,b,c,d \in k \quad \text{und} \quad ad - bc \in k^* \right\}$$

Man rechnet leicht nach, daß $GL_2(k)$ bzgl. Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

Für das Zentrum von $GL_2(k)$ ergibt sich:

Satz 1.35 ($Z(GL_2(k))$)
Sei k kommutativer Ring.

$$Z(GL_2(k)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid \quad a \in k^* \right\}$$

Beweis: Die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

führen auf $b = c$, $a = d$, $a + b = d$, *d.h.* $b = c = 0$, $a = d$.

Umgekehrt liegt $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ in $Z(GL_2(k))$. □

Eine häufig vorkommende Faktorgruppe von $GL_2(k)$ ist:

Definition 1.36 ($PGL_2(k)$)
Sei k kommutativer Ring.

$PGL_2(k) := {}^{GL_2(k)}/_{Z(GL_2(k))}$ *heißt projektive lineare Gruppe.*

Definition 1.37 (projektive Gerade $\mathcal{P}^1$(k))
Sei k kommutativer Ring. Wir betrachten die Menge
$M = \{(x,y) \in k^2 \mid kx + ky = k\}$
und definieren die Äquivalenzrelation
$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1.$
Die Menge der Restklassen der Menge M bezüglich dieser Äquivalenzrelation bezeichnet man als die projektive Gerade über dem kommutativen Ring k und die Restklasse von (x,y) mit $(x:y)$.

$$\mathcal{P}^1(k) := \{(x:y) \mid kx + ky = k\}$$

Die Restklasse $(1:0)$ wird auch mit ∞ bezeichnet. Die Restklasse $(0:1)$ bzw. $(1:1)$ heißt auch kurz die 0 bzw. die 1.

Bemerkung 1.38
$GL_2(k)$ operiert (vgl. Def. 1.26) auf $\mathcal{P}^1(k)$ durch:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x:y) = (ax+by : cx+dy)$$

Die Bahn und der Stabilisator von ∞ sehen dann folgendermaßen aus:

$$G\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (1:0) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k) \right\}$$
$$= \{(a:c) \mid a, c \in k \ ; \ a \ und \ c \ teilerfremd \} = \mathcal{P}^1(k)$$

(d.h. G operiert transitiv auf $\mathcal{P}^1(k)$)

$$G_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (1:0) = (1:0) \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(k) \right\}$$

Der Stabilisator von ∞ hat noch einen besonderen Namen:

Definition 1.39 (Borel-Gruppe)
Sei k kommutativer Ring.

$$B(k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in k^* \right\} = G_\infty \text{ ist die Standard-Borel-Gruppe.}$$

Eine Borel-Gruppe ist eine zu $B(k)$ konjugierte Untergruppe von $GL_2(k)$.

Bemerkung 1.40 ($^{GL_2(k)}/_{B(k)} \cong \mathcal{P}^1(k)$)
Nach Satz 1.29 existiert eine Bijektion zwischen den Mengen $^{GL_2(k)}/_{G_\infty}$ und $G\infty$. Also gilt $^{GL_2(k)}/_{B(k)} \cong \mathcal{P}^1(k)$.

Die Bijektion ist durch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a:c)$ gegeben.

Die Borel-Gruppen haben weitere wichtige Eigenschaften:

Satz 1.41
$B(k)$ ist eine auflösbare Gruppe, und es gilt:

$$B(k) \rhd U(k) \rhd \{1\} \text{ mit abelschen Quotienten,}$$

$$\text{wobei:} \quad U(k) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid u \in k \right\}.$$

Beweis: Wir zeigen, daß:

1) $B(k)' \subset U(k)$

2) $U(k)' = \{1\}$

zu 1) Betrachte:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also $U(k) \subset B(k)'$.

zu 2) Betrachte:

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also $U(k)' = \{1\}$. □

Satz 1.42
Es gilt $B(k)/U(k) \cong T(k)$

$$\text{mit:} \quad T(k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in k^* \right\}.$$

Beweis: Ist klar wegen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ □

Anmerkung: Es gilt <u>nicht:</u> $B(k) = T(k) \times U(k)$

(da $T(k) \times U(k)$ abelsch !)

4. Zerlegungen von $GL_2(k)$

Satz 1.43 (Bruhat-Zerlegung)
Sei k ein Körper. Jedes Element $g \in GL_2(k) \setminus B(k)$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form $g = bwu$ mit $b \in B(k)$, $u \in U(k)$ und $\mathrm{w} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt also: $GL_2(k) = B(k) \dot{\cup} B(k)\mathrm{w}U(k)$.

BEWEIS: Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k)$. Ich unterscheide zwei Fälle:

1) $c = 0$. Dann ist $g \in B(k)$.

2) $c \neq 0$. Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta u + \alpha \\ \delta & \delta u \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zu $\delta = c \quad u = \frac{d}{c} \quad \beta = a \quad \alpha = \frac{bc-ad}{c}$,

was die Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung zeigt. □

Satz 1.44 (Iwahori-Zerlegung)
Sei k vollständig diskret bewerteter Körper.

$O_k := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\}$ der Ring v-ganzer Zahlen von k ; $\mathcal{K} := GL_2(O_k)$

Dann gilt: $GL_2(k) = \mathcal{K} \cdot B(k) = B(k) \cdot \mathcal{K}$.

BEWEIS: Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k)$. Ich unterscheide drei Fälle:

1) $c = 0$. Dann ist $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{\in B(k)}$.

2) $c \neq 0$ und $v(a) \leq v(c)$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix}}_{\in B(k)}$.

3) $c \neq 0$ und $v(a) > v(c)$. Hier ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a}{c} & \frac{a-c}{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} c & \frac{dc+bc-ad}{c} \\ 0 & \frac{ad-bc}{c} \end{pmatrix}}_{\in B(k)}$.

Also gilt $GL_2(k) = \mathcal{K} \cdot B(k)$, d.h. $\forall x \in GL_2(k)\ \exists y \in \mathcal{K}\ \ b \in B(k)$: x = y b. Durch Inversenbildung erhält man $x^{-1} = b^{-1}y^{-1}$, d.h. $GL_2(k) = B(k) \cdot \mathcal{K}$

□

Satz 1.45 ($PGL_2(k)$ **operiert transitiv auf** $\mathcal{P}^1$**(k))**

Sei k Körper. $PGL_2(k)$ *operiert scharf 3-fach transitiv auf* $\mathcal{P}^1(k)$, *d.h.:*

Seien $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *vorgegebene Tripel von verschiedenen Punkten aus* $\mathcal{P}^1(k)$ *(also:* $u \neq v; v \neq w; u \neq w$ *und* $x \neq y; y \neq z; x \neq z$*). Dann existiert genau ein* $g \in PGL_2(k)$ *mit:* $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} gx \\ gy \\ gz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

Beweis: Man zeigt: $\exists g \in GL_2(k) : g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix}$. Dieses ist bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt.

<u>1.Fall: $x, y, z \neq \infty$</u>

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x_1:1) \\ (y_1:1) \\ (z_1:1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax_1 + b = 0 \\ ay_1 + b = cy_1 + d \\ cz_1 + d = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow g = a\begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ \frac{y_1 - x_1}{y_1 - z_1} & -z_1\frac{y_1 - x_1}{y_1 - z_1} \end{pmatrix} \text{ mit } det(g) = a^2(x_1 - z_1)\tfrac{y_1 - x_1}{y_1 - z_1} \neq 0$$

<u>2.Fall: $x = \infty$</u>

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1:0) \\ (y_1:1) \\ (z_1:1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a = 0 \\ b = cy_1 + d \\ cz_1 + d = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow g = c\begin{pmatrix} 0 & (y_1 - z_1) \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix} \text{ mit } det(g) = c^2(z_1 - y_1) \neq 0$$

<u>3.Fall: $y = \infty$</u>

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x_1:1) \\ (1:0) \\ (z_1:1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax_1 + b = 0 \\ a = c \\ cz_1 + d = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow g = a\begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix} \text{ mit } det(g) = a^2(x_1 - z_1) \neq 0$$

<u>4.Fall: $z = \infty$</u>

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x_1:1) \\ (y_1:1) \\ (1:0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax_1 + b = 0 \\ ay_1 + b = d \\ c = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow g = a\begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 0 & y_1 - x_1 \end{pmatrix} \text{ mit } det(g) = a^2(y_1 - x_1) \neq 0$$

□

5. Maß auf $\mathcal{K}$

Sei:

k vollständig diskret bewerteter Körper,

$O_k := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\}$ der Ring der v-ganzen Zahlen von k ,

$\mathcal{K} := GL_2(O_k)$.

O_k habe endlichen Restklassenkörper mit Kardinalität q.

Satz 1.46 (Haar-Maß)
Auf einer lokalkompakten topologischen Gruppe G gibt es bis auf skalare Vielfache ein eindeutig bestimmtes linksinvariantes Borel-Maß μ. Dieses heißt das Haar-Maß auf G.

BEWEIS: *siehe z.B. [La,S.351f.]*

Ich werde jetzt zeigen, daß $\mathcal{K}$ kompakt ist und eine offene Umgebungsbasis von $1_{\mathcal{K}}$ konstruieren, so daß wir durch Festsetzung eines Maßes auf dieser Basis ein Maß auf ganz $\mathcal{K}$ erhalten.

Setze $\kappa_0 = \mathcal{K}$.

Für $n \geq 1$ sei

$$\kappa_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1+a\pi^n & b\pi^n \\ c\pi^n & 1+d\pi^n \end{pmatrix}, a,b,c,d \in O_k \right\} \quad \text{(Dies ist eine Gruppe)} .$$

Definition einer Metrik:

$$\text{Sei } \wp_n := \left\{ \begin{pmatrix} a\pi^n & b\pi^n \\ c\pi^n & d\pi^n \end{pmatrix}, a,b,c,d \in O_k \right\} .$$

$$d_{add}(A,B) = \begin{cases} q^{-n},\ n = max\{n \mid A - B \in \wp_n\} & , A \neq B \\ 0 & , A = B \end{cases}$$

definiert offensichtlich eine Metrik auf $O_k^{2\times 2}$.

Durch

$$d_{mult}(A,B) = \begin{cases} q^{-n}, n = max\{n \mid AB^{-1} \in \kappa_n\} & , A \neq B \\ 0 & , A = B \end{cases}$$

ist aber auf $\mathcal{K}$ die gleiche Metrik definiert,

denn für $A, B \in \mathcal{K}$ ist

$$A - B \in \wp_n \Leftrightarrow AB^{-1} - E \in \wp_n \Leftrightarrow AB^{-1} \in \kappa_n .$$

Mit Schubfachschluß sieht man, daß O_k (folgen-)kompakt ist (Der Restklassenkörper ist endlich !). Daraus folgt dann, daß κ_n $(n \geq 0)$ kompakt ist.

Für $\{\kappa_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ gilt:

(1) Die κ_n sind offene Umgebungen der $1_{\mathcal{K}}$, da μ eine diskrete Bewertung ist.

(2) $\bigcap_n \kappa_n = \{1_{\mathcal{K}}\}$

(3) Jede offene Umgebung von $1_{\mathcal{K}}$ liegt in einer der κ_n.

$\{\kappa_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ist also eine offene Umgebungsbasis der $1_{\mathcal{K}}$.

Somit sind alle Voraussetzungen für obigen Satz erfüllt.

Deshalb setzten wir einfach $\mu(\mathcal{K}) := 1$ fest. Hierdurch wird ein Haar-Maß auf $\mathcal{K}$ eindeutig festgelegt.

Lemma 1.47
Es gilt:

$$\mathcal{K}/\kappa_1 \cong GL_2(\mathbf{F_q}) \text{ und folglich } [\mathcal{K} : \kappa_1] = (q-1)^2(q+1)\,q,$$

sowie ${}^{\kappa_n}/_{\kappa_{n+1}} \cong (\mathbf{F_q})^4$ *, woraus* $[\kappa_n : \kappa_{n+1}] = q^4 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ *folgt.*

Beweis: Man rechnet leicht nach, daß

$$\varphi_0 : \mathcal{K} \to GL_2(\mathbf{F_q}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \bmod \pi & b \bmod \pi \\ c \bmod \pi & d \bmod \pi \end{pmatrix}$$

und für $n \geq 1$

$$\varphi_n : \kappa_n \to (\mathbf{F_q})^4, \quad \begin{pmatrix} 1+a\pi^n & b\pi^n \\ c\pi^n & 1+d\pi^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \bmod \pi & b \bmod \pi \\ c \bmod \pi & d \bmod \pi \end{pmatrix}$$

surjektive Homomorphismen sind mit $\mathrm{Kern}(\varphi_n) = \kappa_{n+1} \quad (n \geq 0)$.

Nach dem Homomorphiesatz gilt dann:

$\mathcal{K}/\kappa_1 \cong GL_2(\mathbf{F_q})$ und $[\mathcal{K} : \kappa_1] = |GL_2(\mathbf{F_q})| = (q-1)^2(q+1)\,q$

${}^{\kappa_n}/_{\kappa_{n+1}} \cong (\mathbf{F_q})^4$ und $[\kappa_n : \kappa_{n+1}] = |(\mathbf{F_q})^4| = q^4 \qquad (n \geq 1)$ $\square$

Korollar 1.48
Da alle Nebenklassen gleiches Maß haben, und $\mu(\mathcal{K}) := 1$ *festgelegt ist, gilt somit:*

$$\mu(\kappa_1) = \frac{1}{(q-1)^2(q+1)\,q} \quad \text{und}$$

$$\mu(\kappa_n) = \mu(\kappa_1) \cdot \frac{1}{q^{4(n-1)}} \quad (n \geq 1) \ .$$

2 Der Baum $\mathcal{T}$ und der Graph ${}_{\Gamma_u}\backslash^{\mathcal{T}}$

Große Teile der Abschnitte 2.1 bis 2.3 stammen aus dem Kapitel II des Buches "Trees" von Jean-Pierre Serre. Ich habe auch die dortigen Bezeichnungen und Definitionen weitgehend übernommen. Die Beweise der entnommenen Sätze habe ich ausgeführt, sofern sie nicht nur rein technischer Natur sind.

2.1 Der Baum von SL_2 über einem lokalen Körper

1. Notation:
Sei K ein Körper mit der diskreten Bewertung v und $O := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ der Bewertungsring von K.
Sei π eine Uniformisierende und $k := {}^{O}/_{\pi O}$ der Residuenkörper.
Sei weiter V ein Vektorraum der Dimension 2 über dem Körper K.

2. Der Baum $\mathcal{T}$

Definition 2.1 (Gitter)
Der K-Vektorraum V habe Dimension 2. Ein freier O-Modul $L := Om_1 + Om_2$ der Dimension 2, der den K-Vektorraum V erzeugt, heißt Gitter von V.

Bemerkung: Sei $x \in K^*$, L Gitter von V. Dann ist auch xL ein Gitter von V. Also operiert die Gruppe K^* auf der Menge der Gitter.

Definition 2.2 (Gitterklasse)
Der Orbit eines Gitters unter der Operation von K^* auf der Menge der Gitter heißt (Gitter-)Klasse. Zwei Gitter, die zur selben Klasse gehören, heißen äquivalent.

Satz 2.3 (spezielle Gitter)
Sei L Gitter. Dann existiert in jeder Gitterklasse Λ' genau ein Gitter L', das folgenden äquivalenten Bedingungen genügt:

(1) $L' \subset L$ und L' maximal in Λ' mit dieser Bedingung,

(2) $L' \subset L$ und $L' \not\subset \pi L$.

BEWEIS: Die Gitter einer Klasse sind bzgl. Inklusion geordnet und unterscheiden sich wegen:
$xL = < xe_1, xe_2 > = < \pi^{v(x)}e_1, \pi^{v(x)}e_2 > = \pi^{v(x)} < e_1, e_2 >$
nur um π-Potenzen, was die Existenz und Eindeutigkeit eines L', das der Bedingung (1) genügt, impliziert. Außerdem folgt aus obiger Aussage, daß (1) und (2) äquivalent sind. □

Definition 2.4 (Abstand von Gitterklassen)
Seien $L \in \Lambda$ und $L' \in \Lambda'$ zwei Gitter von V. L habe die O-Basis $\{e_1, e_2\}$ und L' die Basis $\{\pi^a e_1, \pi^b e_2\}$. Dann heißt die ganze Zahl $|a-b| =: d(\Lambda, \Lambda')$ der Abstand der Gitterklassen Λ und Λ'.

Nach dem Elementarteilersatz findet man O-Basen $\{e_1, e_2\}$ von L und $\{e_1', e_2'\}$ von L', so daß $e_1 | e_1'$ oder $e_1' | e_1$ und $e_2 | e_2'$ oder $e_2' | e_2$ gilt. Dann unterscheiden sich e_1 und e_1' bzw. e_2 und e_2' nur um π-Potenzen. Somit gilt $e_1' = \pi^a e_1$ und $e_2' = \pi^b e_2$.
Der Abstand zweier Gitterklassen wird durch zwei frei wählbare Gitter definiert. Man muß also noch überprüfen, ob die Definition unabhängig von diesen Wahlen ist:

$\forall x, y \in K^*$ gilt:

$$xL = < xe_1, xe_2 > = < \pi^{v(x)} e_1, \pi^{v(x)} e_2 >$$

$$yL' = < y\pi^a e_1, y\pi^b e_2 > = < \pi^{v(y)+a} e_1, \pi^{v(y)+b} e_2 >$$

$$= < \pi^{v(\frac{y}{x})+a} \pi^{\nu(x)} e_1, \pi^{v(\frac{y}{x})+b} \pi^{\nu(X)} e_2 >$$

Der Abstand von xL und yL' ist somit:

$$|\,(v(\tfrac{y}{x}) + b) - (v(\tfrac{y}{x}) + a)\,| = |\,b - a\,| \qquad \square$$

Es wird hier nicht gezeigt, daß d eine Metrik ist. Dieser Beweis (vor allem die Dreiecksungleichung) fällt uns später in den Schoß, wenn wir sehen, daß $\mathcal{T}$ ein Baum ist.
Folgerungen aus der Definition 2.4:

1. $d(\Lambda, \Lambda') = 0 \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda'$

2. Für $\Lambda' \ni L' \subset L \in \Lambda$ gilt: $d(\Lambda, \Lambda') = 1 \;\Leftrightarrow\; {}^{L}\!/_{L'} \cong {}^{O}\!/_{\pi O} = k$

Definition 2.5 (l(L/L'))
Sei $L = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_r = L'$ mit $L_i \neq L_{i+1}$, $i = 0, ..., r-1$ eine Kette echt absteigender Gitter von V (Jordan-Hölder Kette). Für $i = 0, ..., r-1$ soll es zwischen L_i und L_{i+1} keinen nichttrivialen Zwischenmodul mehr geben. Die wohlbestimmte Länge r dieser Kette bezeichnen wir mit $l(L, L')$.

Definition 2.6 (Der Graph $\mathcal{T}$)
Zwei Gitterklassen Λ und Λ' heißen benachbart, wenn $d(\Lambda, \Lambda') = 1$ ist. Die Menge aller Gitterklassen bildet die Knotenmenge $V(\mathcal{T})$ eines Graphen $\mathcal{T}$. Als Kantenmenge definiere ich $E(\mathcal{T}) = \{(\Lambda, \Lambda') \mid \Lambda, \Lambda' \in V(\mathcal{T}), d(\Lambda, \Lambda') = 1\}$. Wir setzen $o((\Lambda, \Lambda')) = \Lambda$ und $t((\Lambda, \Lambda')) = \Lambda'$ und schreiben $\Lambda\Lambda'$ für (Λ, Λ').

Offensichtlich ist $\mathcal{T}$ ein kombinatorischer Graph; es gilt aber noch mehr:

Satz 2.7 *Der Graph $\mathcal{T}$ ist ein Baum.*

BEWEIS:

1. zu zeigen: $\mathcal{T}$ ist zusammenhängend.

   Nach Satz 1.13 besitzen zwei Knoten Λ, Λ' Repräsentanten L und L', so daß $L' \subset L$ und $L' \not\subset \pi L$ Dann gibt es eine (Jordan-Hölder)-Reihe:

   $L' = L_n \subset L_{n-1} \subset ... \subset L_0 = L$

   so daß $l(L_{i-1}/L_i) = 1$, d.h. es existiert kein nichttrivialer Zwischenmodul zwischen L_{i-1} und L_i. Dann gilt aber $d(\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = 1$. Also gibt es einen Weg $(\Lambda_0, \Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ der Länge n von Λ' nach Λ.

   Also ist $\mathcal{T}$ zusammenhängend.

2. zu zeigen: $\mathcal{T}$ hat keine Zykel.

   Ich zeige durch vollständige Induktion, daß für jeden Weg $(\Lambda_0, \Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ der Länge n ohne Sackgasse gilt $\Lambda_0 \neq \Lambda_n$, d(Λ_0,Λ_n) = n.

   Es genügt, $L_n \not\subset \pi L_0$ zu zeigen.

   Induktionsanfang:

   Für n=1 ist die Aussage schon bewiesen, da $\mathcal{T}$ ein kombinatorischer Graph ist.

   Induktionsannahme:

   Es gelte also $L_n \not\subset \pi L_0$ und es existiere $L_n \subset L_{n-1} \subset ... \subset L_0$ $l(L_{i-1}/L_i) = 1$,also d(Λ_0,Λ_n) = n mit Basen:
   $L_{n-1} =< e_1, e_2 >$ $(\Rightarrow \pi L_{n-1} =< \pi e_1, \pi e_2 >)$ und $L_n =< \pi e_1, e_2 >$.

   Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

   Nach Satz 2.3 existiert ein $L_{n+1} \subset L_n$ mit $l(L_n/L_{n+1}) = 1$ und $L_{n+1} \not\subset \pi L_n$.

   (a) Ich zeige zuerst: $L_{n+1} \neq \pi L_{n-1}$
   Beweis durch Widerspruch:
   Ann.: $\pi L_{n-1} = L_{n+1}, \Rightarrow L_{n+1} \in \Lambda_{n-1} \Rightarrow \Lambda_{n+1} = \Lambda_{n-1}$
   $\Rightarrow$ Pfad hat Sackgasse - Widerspruch zur Voraussetzung !

   (b) L_{n+1} und πL_{n-1} sind maximal in L_n, aber verschieden, also gilt $L_n = L_{n+1} + \pi L_{n-1} \subseteq L_{n+1} + \pi L_0$.
   Daraus folgt $L_{n+1} \not\subset \pi L_0$, sonst wäre $L_n \subset \pi L_0$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Bemerkung:
Wir wissen nun, daß $\mathcal{T}$ ein Baum ist, und $d(\Lambda, \Lambda')$ dem üblichen Abstand $dis(\Lambda, \Lambda')$ (vgl. Def. 1.17) von Knoten in einem Graphen entspricht. Somit ist auch klar, daß d eine Metrik ist.

3. $GL(V)$ und $SL(V)$

Sei V Vektorraum der Dimension 2 über dem Körper K.

Definition 2.8 ($GL(V)$)
$GL(V) := Aut(V) = \{\varphi : \varphi \textit{ ist K-Automorphismus von } V\} \cong GL_2(K)$

Bemerkung: GL(V) operiert auf $\mathcal{T}$.

Definition 2.9 ($SL(V)$)
$SL(V) := \{\varphi \in GL(V) : det(\varphi) = 1\} \cong SL_2(K)$

Definition 2.10 ($GL^0(V)$)
$GL^0(V) := Kern(v \circ det)$, *mit* $v \circ det : GL(V) \to K^* \to \mathbf{Z}$.
$$\cong \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid v(ad-bc) = 0\}$$

Definition 2.11 ($GL^+(V)$)
Sei $\varphi : GL(V) \to K^* \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/_{2\mathbf{Z}};\ g \mapsto (v(det(g)))\ mod\ 2$.
$$GL^+(V) := Kern(\varphi) \cong \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid v(ad-bc) \equiv 0\ (mod\ 2)\}$$

Es gilt offensichtlich:

Lemma 2.12
$SL(V) \subset GL^0(V) \subset GL^+(V) \subset GL(V)$

Definition 2.13 ($\chi(L_1, L_2)$)
Seien L_1, L_2, L_3 *drei Gitter von* V *mit* $L_3 \subset L_1 \cap L_2$.
Setze $\chi(L_1, L_2) = l(L_1/L_3) - l(L_2/L_3)$.
(Dies hängt nicht von der Wahl von $L_3 \subset L_1 \cap L_2$ *ab.)*

Satz 2.14
Seien L, L' *zwei Gitter von* Λ, $L' = sL$, $s \in GL(V)$. *Dann gilt:*
$\chi(L, L') = \chi(L, sL) = v(det(s))$.

BEWEIS:
Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine Basis $\{e_1, e_2\}$ und Zahlen $a, b \in \mathbf{Z}$ mit $L =< e_1, e_2 >$ und $sL =< \pi^a e_1, \pi^b e_2 >$

1. Es ist $s = \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix} \cdot \tilde{s}$ mit $\tilde{s}$ in der Fixgruppe von L.

   Also $v(det(s)) = v(\pi^{a+b}) + v(det(\tilde{s})) = a + b$.

2. Nun zeige ich durch Fallunterscheidung, daß gilt: $\chi(L, sL) = a + b$

   (a) Sei $a, b \geq 0$. Betrachte:
   $L = \underbrace{< e_1, e_2 > \supset < \pi e_1, e_2 > \supset \dots \supset < \pi^a e_1, e_2 >}_{l(L/\tilde{L})=a} = \tilde{L}$
   $\tilde{L} = \underbrace{< \pi^a e_1, e_2 > \supset < \pi^a e_1, \pi e_2 > \supset \dots \supset < \pi^a e_1, \pi^b e_2 >}_{l(\tilde{L}/L')=b} = L'$
   $L' = \underbrace{< \pi^a e_1, \pi^b e_2 > \supset \dots \supset L_3}_{l(L'/L_3)}$
   $\Rightarrow \chi(L, L') = a + b$

   (b) Sei $a, b \leq 0$. Analog zu 2.(a) (statt "$\supset$ " nimmt man "$\subset$ ")
   $\Rightarrow \chi(L, L') = a + b$

   (c) Sei $a \geq 0, b < 0$. Betrachte:
   $L = \underbrace{\overbrace{< e_1, e_2 > \supset \dots \supset < \pi^a e_1, e_2 >}^{l(L/\tilde{L})=a} = \tilde{L} = \overbrace{< \pi^a e_1, e_2 > \supset \dots \supset L_3}^{l(\tilde{L}/L_3)}}_{l(L/L_3)}$
   $L' = \overbrace{\underbrace{< \pi^a e_1, \pi^b e_2 > \supset \dots \supset < \pi^a e_1, e_2 >}_{l(L'/\tilde{L})=-b} = \tilde{L} = \underbrace{< \pi^a e_1, e_2 > \supset \dots \supset L_3}_{l(\tilde{L}/L_3)}}^{l(L'/L_3)}$
   $\Rightarrow \chi(L, L') = a + b$

   (d) Sei $b \geq 0, a < 0$. Analog zu 2.(c) (statt "$\supset$ " nimmt man "$\subset$ ")
   $\Rightarrow \chi(L, L') = a + b$ □

Korollar 2.15
Sei Λ Gitterklasse und $s \in GL_2(K), L \in \Lambda$. Dann gilt:
$d(\Lambda, s\Lambda) \equiv \chi(L, sL) \pmod 2$.

BEWEIS: Nach Def. 2.4 gilt:
$d(\Lambda, s\Lambda) = |a - b| \equiv a + b \equiv v(det(s)) \equiv \chi(L, sL) \pmod 2$ □

4. Die Wirkung von GL(V) auf dem Baum $\mathcal{T}$

Die Gruppe GL(V) operiert auf dem Baum $\mathcal{T}$. Nach obigem Korollar gilt:
$s \in GL^+(V) \Leftrightarrow$ für ein bzw. alle Λ ist $d(\Lambda, s\Lambda)$ gerade
Also operiert $GL^+(V)$ auf $\mathcal{T}$ ohne Umkehrung von Kanten, was jedoch nicht für ganz GL(V) gilt. Betrachte z.B.:
$\Lambda \ni L = < e_1, e_2 >$ benachbart zu $< \pi e_1, e_2 > = L' \in \Lambda'$
für $s = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt: $sL = L'$ und $sL' = \pi L$.
Also wird die Kante $\Lambda\Lambda'$ auf die Kante $\Lambda'\Lambda$ abgebildet.

Ich definiere daher:

Definition 2.16 (Stabilisatoren $G_L, G_\Lambda, G_{\Lambda\Lambda'}$)
Sei G Untergruppe von GL(V) und $L \in \Lambda$ Gitter.

G_L	$:= \{s \in G \mid sL = L\}$	*Stabilisatorgruppe des Gitters L*
G_Λ	$:= \{s \in G \mid s\Lambda = \Lambda\}$	*Stabilisatorgruppe der Gitterklasse Λ*
$G_{\Lambda\Lambda'}$	$:= \{s \in G \mid s\Lambda = \Lambda\,,\, s\Lambda' = \Lambda'\}$	*Stabilisatorgruppe der Kante $\Lambda\Lambda'$*

Anmerkung: $s\Lambda = \Lambda \Leftrightarrow \exists x \in K^* : sL = xL$

Satz 2.17
Ist G eine Untergruppe von $GL^0(V)$ und L ein Gitter in der Klasse Λ, so gilt $G_L = G_\Lambda$.

BEWEIS:
Sei $s \in G_\Lambda$.
Wegen $G_\Lambda \subset GL^0(V)$ ist $\chi(L, sL) = v(det(s)) = 0$.
Sei $x \in K^*$ mit $sL = xL$.
Es ist $0 = \chi(L, xL) = 2v(x)$, also x invertierbar und
$L = xL = sL$, d.h. $s \in G_L$. □

Definition 2.18 (beschränkte Untergruppen)
Eine Untergruppe G von GL(V) heißt beschränkt, wenn sie eine beschränkte Untergruppe des Vektorraumes End(V) ist. Identifiziert man GL(V) mit $GL_2(K)$, so bedeutet dies:
$\exists d \in \mathbf{Z} : v(s_{i,j}) \geq d \quad \forall s = (s_{i,j}) \in G$

Satz 2.19 *Sei $G \subset GL^0(V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) G ist beschränkt.

(2) Es existiert eine Gitterklasse Λ, so daß die Bahn $G\Lambda$ bzgl. des Abstandes im Baum $\mathcal{T}$ beschränkt ist.

(3) Es existiert eine Gitterklasse Λ, die unter G stabil ist (G läßt den Knoten Λ fest).

(4) Es existiert ein Gitter L, das unter G stabil ist($GL = L$).

BEWEIS:

(1) $\Rightarrow$ (2) $G \ni s = \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix} \cdot \tilde{s};\ \tilde{s} \in GL_2(O)$

Durchläuft s die beschränkte Menge G, so ist auch a,b nach unten beschränkt. Wegen $s \in G \subset GL^0(V)$ ist $v(det(s)) = 0$ und somit $v(det(\tilde{s})) = -(a+b)$. $GL_2(O)$ ist jedoch auch eine beschränkte Untergruppe von G, woraus folgt, daß a und b auch nach oben beschränkt sind. Also ist auch $d(\Lambda, s\Lambda) = |a-b|$ beschränkt, für $\Lambda = O \oplus O$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei Y der Teilbaum, der von $G\Lambda$ erzeugt wird. Es ist zu zeigen, daß Y mindestens einen Knoten enthält, der unter G stabil ist. Ich zeige nun durch vollständige Induktion über den Durchmesser: Ist Y ein Teilbaum von $\mathcal{T}$ von endlichem Durchmesser, der von G in sich selbst überführt wird, so besitzt G auf Y einen Fixpunkt.
Für n=0 ist die Behauptung offensichtlich.
Für n=1 gilt die Behauptung, da $G \subset GL^0(V)$ ohne Umkehrung von Kanten operiert.
Für $n \geq 2$ hat der Teilbaum Y' aus Satz 1.19 den Durchmesser $n-2$. G operiert auch auf Y', da durch G Endpunkte auf Endpunkte und Nichtendpunkte auf Nichtendpunkte abgebildet werden. Nach Induktionsannahme hat Y' einen Knoten $\Lambda \in V(Y')$, der stabil unter G ist. Dann hat aber auch Y einen Knoten, der unter G stabil ist.

(3) $\Rightarrow$ (4) folgt nach Satz 2.17 .

(4) $\Rightarrow$ (1) Sei $L = < ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 >$, $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von V und $\gamma : O^2 \to L$ (invertierbare Abbildung) gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann ist $G \subset G_L \subset \gamma GL_2(O)\gamma^{-1}$ beschränkt, da $GL_2(O)$ beschränkt ist. □

Korollar 2.20
Die maximalen beschränkten Untergruppen von $G \subset GL^0(V)$ sind die Stabilisatoren von Knoten.

Nun betrachte ich die Stabilisatoren von Kanten etwas genauer. Sei also $\Lambda\Lambda' \in E(\mathcal{T})$ eine Kante von $\mathcal{T}$ und $L \in \Lambda, L' \in \Lambda'$ mit $L' \subset L$ und $l(L/L') = 1$. Weiter sei G Untergruppe von $GL_2^0(K)$.
Nach Definition 2.16 gilt: $G_{\Lambda\Lambda'} = G_\Lambda \cap G_{\Lambda'}$.
Im folgenden sei $\{e_1, e_2\}$ die Standard-Basis von $V = K^2$.
Folgende drei Sätze finden sich in [Se] S.77 .

Satz 2.21 (Iwahori-Untergruppen)
Ist $L = e_1O \oplus e_2O$ und $L' = e_1O \oplus \pi e_2O$, so gilt:
$G_{\Lambda\Lambda'} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K) \mid c \equiv 0 \ (\ mod\ \pi\ )\ \}$
Diese Untergruppe von $GL_2(K)$ heißt die Standard-Iwahori-Untergruppe von $GL_2(K)$.
(Betrachtet man die Stabilisatoruntergruppen zu anderen Kanten, so sind diese konjugiert zur Iwahori-Gruppe.)

Wie sehen die Stabilisatoren von Enden und Geraden aus ?

Satz 2.22 (Borel-Untergruppen)
Ist $\Lambda_i \ni L_i := e_1O \oplus \pi^i e_2O$ (für $i \geq 0$) , so gilt:
$G_{\Lambda_0\Lambda_1\Lambda_2\ldots} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)\}$ *die in 1.39 definierte Standard-Borelgruppe* $B(K)$.

Satz 2.23 (Cartan-Untergruppen)
Ist $\Lambda_i \ni L_i := e_1O \oplus \pi^i e_2O$ (für $i \in \mathbb{Z}$) , so gilt:
$G_{\ldots\Lambda_0\Lambda_1\ldots} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)\}$
Diese Untergruppe von $GL_2(K)$ heißt die Standard-Cartan-Untergruppe von $GL_2(K)$. Eine Cartan-Untergruppe ist eine zur Standard-Cartan-Untergruppe konjugierte Untergruppe von $GL_2(K)$.

2.2 Die Operation von $GL_2(k[T])$ auf einem geeigneten Baum

Seien: $\mathbf{A} = \mathbf{F}_q[\mathrm{T}]$
$\mathbf{K} = \mathbf{F}_q(\mathrm{T})$ mit der Gradbewertung ($\mathbf{v}(\frac{f}{g}) = deg(g) - deg(f)$)
$\mathbf{O}$ Bewertungsring von $(\mathbf{K}, \mathbf{v})$
$\pi = \frac{1}{T}$ Parameter
e_1, e_2 Standard-Basis von K^2
$\mathbf{\Gamma} = GL_2(A)$

$L_n := e_1O \oplus \pi^n e_2O$ ist ein Repräsentant der Gitterklasse Λ_n. Die Λ_n bilden als Knoten von $\mathcal{T}$ aufgefaßt die Halbgerade Υ:

$$\Upsilon = \overset{\Lambda_0}{\bigcirc} \longrightarrow \overset{\Lambda_1}{\bigcirc} \longrightarrow \overset{\Lambda_2}{\bigcirc} \longrightarrow \ldots$$

Sei weiter: $G_0 := GL_2(\mathbf{F_q})$
$G_n := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbf{F_q}^\times;\ b \in \mathbf{F_q}[T]; deg(b) \leq n\right\}$ $(n \geq 1)$
$Z := Z(\mathbf{\Gamma})$ Zentrum von $\mathbf{\Gamma}$ (Skalarmatrizen)

Satz 2.24 (Fixgruppe der Λ_n)
Mit obigen Bezeichnungen gilt:

(1) Die Gitterklassen Λ_n sind paarweise inäquivalent mod Γ, d.h.
$\nexists \gamma \in \mathbf{\Gamma} : \gamma\Lambda_i = \Lambda_j$ *für* $i \neq j$.

(2) Die G_n sind die Fixgruppen der Λ_n.

(3) G_0 operiert transitiv auf der Menge der Kanten mit Ursprung Λ_0.

(4) G_n ($n \geq 1$) hält die Kante $\Lambda_n\Lambda_{n+1}$ fest und operiert transitiv auf den Kanten ($\neq \Lambda_n\Lambda_{n+1}$) mit Ursprung in Λ_n.