

Arithmetisch definierte  
Darstellungen von Gruppen vom  
Typ  $SL(2, \mathbb{F}_q)$

Diplomarbeit  
Imke Rust

Saarbrücken, 27. Februar 1995  
Fachbereich 9, Mathematik

1995 Rust, Imke

Ich erkläre hiermit an Eides statt, diese Arbeit selbständig geschrieben und keine Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Saarbrücken, 1.3.1995 Imke Rust

Fachbereich 9 MATHEMATIK  
Nr. 27397-00  
Universität des Saarlandes

# Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	2
1	Grundlagen aus der Darstellungstheorie	4
1.1	Grundbegriffe	4
1.2	Die Darstellungen der $GL(2, K)$ für $\#(K) \neq 2$	9
1.2.1	Die Gruppe $G = GL(2, K)$	10
1.2.2	Die Darstellungen von Untergruppen von $G$	12
1.2.3	Die Darstellungen von $G$	13
1.3	Die Darstellungen der $SL(2, K)$	20
1.3.1	Die Konjugationsklassen der $SL(2, K)$	20
1.3.2	Einschränkung der Darstellungen von $G$ auf $S$	22
2	Grundlagen aus der Graphentheorie	27
2.1	Graphen	27
2.2	Operationen von Gruppen auf Graphen	30
3	Der Baum $\mathcal{T}$ und der Graph $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$	32
3.1	Der Bruhat-Tits-Baum $\mathcal{T}$ von $PGL(2, K_\infty)$	32
3.1.1	Die Knotenmenge $V(\mathcal{T})$	33
3.1.2	Die Kantenmenge $E(\mathcal{T})$	33
3.2	Der Quotientengraph $\Gamma\backslash\mathcal{T}$	34
3.3	Der Quotientengraph $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$ und die Gruppe $G$	34
4	Die Darstellungen von $\Gamma/\Gamma(n)$ für irreduzibles $n$	41
4.1	Der Fall $\text{char } k = 2$ oder $\text{char } k$ und $d$ ungerade	42
4.1.1	Die Konjugationsklassen im Fall 1	43
4.1.2	Die Darstellungen von $G$ im Fall 1	44
4.2	Der Fall $\text{char } k \neq 2$ und $d$ gerade	46
4.2.1	Die Konjugationsklassen im Fall 2	47
4.2.2	Die Darstellungen von $G$ im Fall 2	48
4.3	Die Darstellungen von $G/Z(k)$	52
5	Die Zerlegung der Darstellung auf $H_1(\Gamma\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$	55
5.1	Die Zerlegung von $\rho$ anhand der Kantentypen	55
5.2	Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$	62
5.2.1	Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für $d$ ungerade	63
5.2.2	Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für $\text{char } k = 2$ und $d$ gerade	68
5.2.3	Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für $\text{char } k \neq 2$ und $d$ gerade	70
5.3	Zusammenfassung der drei Fälle	74
	Symbolverzeichnis	76

# Kapitel 0

## Einleitung

In den Jahren 1928 und 1930 veröffentlichte Hecke die Artikel [Hec59b] und [Hec59a], die sich mit der folgenden Situation beschäftigten: Ist  $m$  eine Primzahl und  $\Gamma(m)$  die Hauptkongruenzuntergruppe der Modulgruppe  $SL(2, \mathbb{Z})$  zu  $m$ , so operiert die Gruppe  $PSL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  auf dem Vektorraum der holomorphen Differentialformen auf der Modulkurve zu  $\Gamma(n)$ . Hecke ermittelte in den beiden genannten Arbeiten sämtliche irreduziblen Bestandteile der hierdurch gegebenen Darstellung. Dabei stellte er fest, daß bis auf einige Ausnahmen die auftretenden Vielfachheiten um höchstens zwei voneinander abweichen. Ferner entdeckte er einen Zusammenhang zwischen der Vielfachheit der einzigen  $\frac{m-1}{2}$ -dimensionalen Darstellung von  $PSL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  und der Klassenzahl des quadratischen Zahlkörpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ .

Indem man Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene  $H$  als Funktionen auf der Gruppe  $SL(2, \mathbb{R})$  interpretiert, die ein vorgeschriebenes Transformationsverhalten unter gewissen Untergruppen besitzen, kann man, wie z.B. Weil in [Wei70] beschreibt, diese Problemstellung auf zugrundeliegende Körper der Charakteristik  $p > 0$  übertragen. Wir betrachten daher einen endlichen Körper  $k$ , als Analogon zur diskreten Untergruppe  $\mathbb{Z}$  von  $\mathbb{R}$  den Polynomring  $A = k[T]$  in der Unbestimmten  $T$  mit der Gradbewertung, und die Vervollständigung  $K_\infty$  des Quotientenkörpers von  $A$  bezüglich dieser Bewertung. Der komplexen oberen Halbebene entspricht dann der von Serre in [Ser80] eingeführte Bruhat-Tits-Baum  $T$  zur Gruppe  $PGL(2, K_\infty)$ , und die holomorphen Differentialformen auf  $H$  kann man mit harmonischen Funktionen auf den Kanten von  $T$  vergleichen. Schreiben wir weiter Invarianz dieser Funktionen unter einer Operation der Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma(n)$  von  $\Gamma = GL(2, A)$  zu einem irreduziblen Polynom  $n \in A$  vor, so erhalten wir einen Vektorraum, der isomorph zur Homologie  $H_1(\Gamma(n) \backslash T, \mathbb{C})$  des Quotientengraphen  $\Gamma(n) \backslash T$  ist, und auf dem die Gruppe  $G(n) = \Gamma/\Gamma(n)$  operiert. Die hierdurch gegebene Darstellung  $\rho$  entspricht der von Hecke untersuchten. Das Ziel der vorliegenden Arbeit wird sein, die irreduziblen Bestandteile von  $\rho$  zu ermitteln. Wir werden dafür den folgenden Weg beschreiten:

In Kapitel 1 werden wir zunächst der Begriff der Darstellung einer Gruppe einführen und die im weiteren benötigten Sachverhalte aus der Darstellungstheorie zusammenstellen. Anschließend werden wir für einen Körper  $K$  mit mehr als zwei Elementen die Darstellungen der Gruppe  $GL(2, K)$  beschreiben und aus diesen die Darstellungen der Gruppe  $SL(2, K)$  herleiten. Die verwendeten Begriffe aus der Graphentheorie werden in Kapitel 2 dargestellt. Insbesondere werden wir dort erläutern, wie durch einen Dualisierungsprozeß die Operation einer Gruppe auf einem Graphen Anlaß zu einer Darstellung dieser Gruppe auf der Homologie des Graphen gibt. In Kapitel 3 widmen wir unsere Aufmerksamkeit dem Bruhat-Tits-Baum von  $PGL(2, K_\infty)$  und beschreiben den Quotientengraphen  $\Gamma(n) \backslash T$  als Überlagerung des Quotientengraphen  $\Gamma \backslash T$ . Ferner geben wir für ein irreduzibles Polynom  $n \in A$

eine Charakterisierung der Gruppe  $G(n)$ , die auf dem Graphen operiert. Um die dadurch induzierte Darstellung  $\rho$  der Gruppe  $G(n)$  auf  $H_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$  untersuchen zu können, benötigen wir die Kenntnis aller irreduziblen Darstellungen von  $G(n)$ . Diese werden wir im Kapitel 4 aus den im ersten Kapitel bereitgestellten Ergebnissen für die Gruppen  $GL(2, A/(n))$  und  $SL(2, A/(n))$  entwickeln; auf die Darstellungstheorie einer dieser Gruppen kann man nämlich jene von  $G(n)$  in Abhängigkeit von der Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers und des Grades  $d$  von  $n$  zurückführen. In Kapitel 5 werden wir schließlich alle bisher zusammengetragenen und entwickelten Ergebnisse verknüpfen. Ausgehend von der Beschreibung des Graphen  $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$  aus Kapitel 3 nehmen wir eine Zerlegung von  $H_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$  in gewisse Unterräume vor, die unter der Operation  $\rho$  von  $G$  stabil sind. Diese Zerlegung (die kein offensichtliches Analogon in der klassischen Theorie der Modulformen besitzt) führt auf eine ausgezeichnete Unterdarstellung, die bis auf die erwähnten Ausnahmedarstellungen sämtliche Informationen über die Unterschiede in den Vielfachheiten enthält. Alle anderen aus der Zerlegung gewonnenen Unterdarstellungen weisen eine sehr symmetrische Struktur auf.

Setzen wir nunmehr die Ergebnisse aus der Untersuchung der Unterdarstellungen zusammen, so führt dies zu einer vollständigen Zerlegung der Darstellung  $\rho$ . Insbesondere werden wir feststellen, daß auch in der hier untersuchten Situation bis auf einige Ausnahmen die Vielfachheiten aller auftretenden Darstellungen höchstens um zwei voneinander abweichen. Interessanterweise bleiben Zusammenhänge von Vielfachheiten gewisser Ausnahmedarstellungen mit Klassenzahlen in unserer Situation verborgen, da die Darstellungen, die im klassischen Fall diese Informationen codieren, in unserer Situation nicht auftreten. Ferner drängt sich die Frage nach einer weiteren Analogie zwischen den beiden Situationen geradezu auf: Hecke konnte die Funktionen, die den Darstellungsraum zu bestimmten isotypischen Komponenten der von ihm untersuchten Darstellung bilden, als Thetareihen identifizieren, und der Versuch, diese Ergebnisse zu übertragen, liegt nahe. Im Rahmen dieser Arbeit müssen wir uns jedoch mit den bisher ermittelten Ergebnissen bescheiden.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich direkt oder indirekt beim Erstellen der vorliegenden Arbeit unterstützt haben. Besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir bei diesem (wie auch schon bei so manch anderem Unterfangen) sehr viel mehr als den nötigen Rückhalt geboten haben. Bei Prof. Dr. E.-U. Gekeler möchte ich mich erstens für den guten Themenvorschlag und zweitens für die großen Mengen an Zeit bedanken, die er immer wieder für die Beantwortung von Fragen im Zusammenhang mit der Arbeit und zur Erhellung angrenzender Fragestellungen zur Verfügung stellte. Weiter sei Herrn Dipl. Inf. O. Scheja mein Dank für das unermüdliche Korrekturlesen ausgesprochen und Herrn Dipl. Math. A. Schweizer für einige nützliche fachliche Tips. Nicht zu vergessen sind all diejenigen, die mir hier in Saarbrücken ein Umfeld schafften, das mich in die Lage versetzte, viel Energie in meine Arbeit zu investieren - stellvertretend für viele seien hier Stefan Müller und Kai Ibach genannt. Ein letzter Dank geht an diejenigen, die mich in Phasen der Frustration dadurch wieder aufgebaut haben, daß sie die dann entstandenen "Frustkuchen" beseitigten.

# Kapitel 1

## Grundlagen aus der Darstellungstheorie

### 1.1 Grundbegriffe

Einführungen in dieses Thema sind z.B. bei [Ser67] oder [Lan93] zu finden.

Es sei  $k$  ein Körper und  $G$  eine endliche Gruppe.  $k[G]$  bezeichne die Gruppenalgebra, d.h.

$$k[G] = \left\{ \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma : a_{\sigma} \in k, \sigma \in G \right\},$$

mit dem Produkt

$$\left( \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma \right) \cdot \left( \sum_{\tau \in G} b_{\tau} \tau \right) = \sum_{\sigma, \tau \in G} a_{\sigma} b_{\tau} \sigma \tau.$$

**Definition 1.1** Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Eine Darstellung von  $G$  (auf  $V$ ) ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V).$$

$V$  heißt dann  $G$ -Modul oder Darstellungsraum von  $\rho$ , und die Dimension von  $V$  über  $k$  bezeichnet man als Dimension der Darstellung  $\rho$ .

Jeder Homomorphismus  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$  entspricht bei linearer Fortsetzung eindeutig einem (ebenfalls mit  $\rho$  bezeichneten) Algebrahomomorphismus

$$\rho : k[G] \longrightarrow \text{End}_k(V).$$

Die *triviale Darstellung* oder *Einsdarstellung*  $1$  sei gegeben durch die Vorschrift

$$1(\sigma) = \text{id}_k \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

Ist  $V$  ein  $G$ -Modul vermöge der Darstellung  $\rho$  und  $\tilde{V}$  ein  $G$ -Modul vermöge der Darstellung  $\tilde{\rho}$ , so heißt ein Vektorraumhomomorphismus  $\varphi$  von  $V$  nach  $\tilde{V}$  ein  $G$ -Homomorphismus, falls er mit der Operation von  $G$  verträglich ist, d.h. falls für jedes  $\sigma \in G$  und  $v \in V$  gilt

$$\varphi(\rho(\sigma)(v)) = \tilde{\rho}(\sigma)(\varphi(v)).$$

Ist aus dem Zusammenhang ersichtlich, welche Darstellung verwendet wird, so schreibt man auch kürzer  $\sigma v$  statt  $\rho(\sigma)(v)$  für  $\sigma \in G$  und  $v \in V$ .

**Definition 1.2** Sind  $\rho$  und  $\rho'$  Darstellungen von  $G$  auf  $V$  mit den Darstellungsräumen  $V$  und  $V'$ , so heißen  $\rho$  und  $\rho'$  äquivalent, falls ein Isomorphismus  $\tau : V \rightarrow V'$  existiert, so daß für  $\sigma \in G$  gilt:

$$\tau \circ (\rho(\sigma)) = (\rho'(\sigma)) \circ \tau.$$

Sind die Darstellungen  $\rho$  und  $\rho'$  in Matrixform gegeben, d.h. in Bezug auf ausgewählte Basen von  $V$  und  $V'$ , so besagt die obige Bedingung, daß eine Matrix  $T$  existiert, die für alle  $\sigma \in G$  die folgende Gleichung erfüllt:

$$T^{-1} \rho'(\sigma) T = \rho(\sigma).$$

**Definition 1.3** Ein Untervektorraum  $U$  von  $V$  heißt  $G$ -Untermodul von  $V$ , falls er  $G$ -stabil ist, d.h. falls für alle  $\sigma \in G$  die Inklusion  $\rho(\sigma)(U) \subseteq U$  gilt. Eine Darstellung  $\rho$  von  $G$  auf  $V$  heißt irreduzibel, falls  $V$  außer  $(0)$  und  $V$  keine  $G$ -Untermoduln besitzt, andernfalls heißt sie reduzibel. Ferner ist  $\rho$  eine direkte Summe von Darstellungen  $\rho_1 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_1)$  und  $\rho_2 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_2)$ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $V = V_1 \oplus V_2$  als  $k$ -Vektorraum,
- (ii)  $V_1$  und  $V_2$  sind  $G$ -stabil,
- (iii)  $\forall \sigma \in G : \rho(\sigma)|_{V_1} = \rho_1(\sigma)$  und  $\rho(\sigma)|_{V_2} = \rho_2(\sigma)$ .

Man schreibt in diesem Fall auch  $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$  und nennt  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Unterdarstellungen von  $\rho$ . Das Tensorprodukt  $\rho_1 \otimes \rho_2$  der Darstellungen  $\rho_1 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_1)$  und  $\rho_2 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_2)$  ist für  $\sigma \in G$  gegeben durch den Homomorphismus

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(\sigma) := \rho_1(\sigma) \otimes \rho_2(\sigma) \in \text{Aut}_k(V_1 \otimes V_2),$$

wobei auf der rechten Seite der Zuweisung das Tensorprodukt von Homomorphismen gemeint ist.

Wählt man als Basis von  $V_1 \oplus V_2$  die Vereinigung der Basen von  $V_1$  und  $V_2$ , so ergibt sich für Darstellungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  in Matrixform für  $\sigma \in G$ :

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(\sigma) = \begin{pmatrix} \rho_1(\sigma) & 0 \\ 0 & \rho_2(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Die oben angegebene Definition von Irreduzibilität gilt bei Darstellungen über beliebigen Körpern. Im speziellen Fall der Darstellungen über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist aber der folgende Satz von Maschke anwendbar, der den Zusammenhang von Irreduzibilität und der Zerlegbarkeit einer Darstellung in eine direkte Summe klärt:

**Satz 1.1 (Maschke)** Sei  $G$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $n$  und  $k$  ein Körper, dessen Charakteristik  $n$  nicht teilt. Dann ist die Gruppenalgebra  $k[G]$  halbeinfach, d.h. es gibt eine Zerlegung von  $k[G]$  in ein endliches direktes Produkt einfacher Ringe:

$$k[G] = \prod_{i=1}^s R_i.$$

**Beweis:** [Lan93, Theorem 1.2] □

Sind also die Voraussetzungen für den Satz von Maschke erfüllt, so gibt es zu jedem echten  $G$ -Untermodul  $U$  eines  $G$ -Moduls  $V$  einen  $G$ -Untermodul  $U'$  mit

$$V = U \oplus U'.$$

Dies gilt jedoch i.a. nicht. Wir nehmen ab jetzt an, daß  $k = \mathbb{C}$ , der Körper der komplexen Zahlen, ist.

**Definition 1.4** Der Charakter  $\chi_\rho$  einer Darstellung  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$  ist definiert als die Abbildung

$$\chi_\rho : G \rightarrow k, \sigma \mapsto \text{Tr}(\rho(\sigma)),$$

wobei  $\text{Tr}(\rho(\sigma))$  die Spur des Endomorphismus  $\rho(\sigma)$  bezeichnet.

Da die Spur eine unter Konjugation invariante Abbildung und  $\rho$  ein Homomorphismus ist, gilt für  $\sigma, \tau \in G$ :

$$\chi_\rho(\sigma^\tau) = \chi_\rho(\tau^{-1}\sigma\tau) = \text{Tr}(\rho(\tau^{-1})\rho(\sigma)\rho(\tau)) = \text{Tr}(\rho(\sigma)) = \chi_\rho(\sigma).$$

Allgemein nennt man eine Funktion  $f : G \rightarrow k$ , die invariant unter der Konjugation ist, eine *Klassenfunktion*. Der Grund für die Bedeutung der Charaktere liegt im folgenden Satz:

**Satz 1.2** Seien  $\rho$  und  $\rho'$  Darstellungen von  $G$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $\rho$  und  $\rho'$  sind äquivalent,

(ii)  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .

**Beweis:** [Lan93, Theorem 2.3] □

Betrachtet man die Summe und das Tensorprodukt zweier Darstellungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  in Matrixform, so ist offensichtlich  $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$  und  $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$ . Es gilt ferner

**Satz 1.3** Jede Darstellung ist eine endliche direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Diese Zerlegung ist bis auf Äquivalenz eindeutig.

**Beweis:** [Lan93, Theorem 2.3] □

**Satz 1.4** Die Anzahl der inäquivalenten Darstellungen von  $G$  über  $\mathbb{C}$  ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von  $G$ . Wir bezeichnen diese Anzahl mit  $h$ .

**Beweis:** [Lan93, Proposition 4.2] □

Dieser Satz gilt allgemeiner für Darstellungen über algebraisch abgeschlossenen Körpern; jedoch genügt für die hiesige Anwendung die Aussage für Darstellungen über  $\mathbb{C}$ . Bezeichnet man den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Klassenfunktionen von  $G$  mit  $X_{\mathbb{C}}(G)$ , so ist die Zahl  $h$  aus dem vorherigen Satz gerade die Dimension von  $X_{\mathbb{C}}(G)$ . Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen von  $G$  bilden eine Basis von  $X_{\mathbb{C}}(G)$ . Bezüglich der hermiteschen Form

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_G : X_{\mathbb{C}}(G) \times X_{\mathbb{C}}(G) \rightarrow \mathbb{C},$$

die für  $f, g \in X_{\mathbb{C}}(G)$  durch die Vorschrift

$$\langle f, g \rangle_G := \frac{1}{\#(G)} \sum_{\sigma \in G} f(\sigma) \overline{g(\sigma)}$$

definiert ist, bilden die Charaktere  $\chi_1, \dots, \chi_h$  zu  $h$  paarweise inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von  $G$  eine Orthonormalbasis. Es gilt also

$$\forall i, j \in \{1, \dots, h\} : \langle \chi_i, \chi_j \rangle_G = \delta_{ij}.$$

Ist  $\chi$  der Charakter einer beliebigen Darstellung von  $G$ , so ergibt sich daraus

$$\chi = \sum_{i=1}^h \langle \chi, \chi_i \rangle_G \chi_i.$$

Weil eindimensionale Darstellungen immer irreduzibel sind, erhält man für einen nichttrivialen Charakter  $\mu$  einer Gruppe  $G$  die Gleichung

$$\sum_{\sigma \in G} \mu(\sigma) = \langle \mu, 1_G \rangle_G = 0.$$

Eine spezielle Darstellung von  $G$  ist die *reguläre Darstellung*  $reg_G$ . Der zugehörige Darstellungsraum ist die Gruppenalgebra  $k[G]$  mit der Basis  $G$  als  $k$ -Vektorraum betrachtet. Jedes Element  $\sigma$  von  $G$  operiert auf  $k[G]$  vermöge der Multiplikation in  $k[G]$ . Weil ein Element  $1 \neq \sigma \in G$  die Basiselemente fixpunktfrei permutiert, und  $1 \in G$  alle  $n := \#(G)$  Basiselemente fest läßt, hat der Charakter  $\chi_{reg}$  die Werte

$$\chi_{reg}(1) = n, \chi_{reg}(\sigma) = 0, \forall \sigma \neq 1.$$

Das Skalarprodukt von  $\chi_{reg}$  mit dem Charakter jeder irreduziblen Darstellung  $\rho$  ergibt sich daher als  $\chi_\rho(1) = \dim \rho$ . Hieraus folgt

**Satz 1.5** Sind  $n = \#(G)$  und  $\rho_i, i = 1, \dots, h$ , die paarweise inäquivalenten irreduziblen Darstellungen mit den Dimensionen  $d_i$ , so gilt die Gleichung:

$$n = \sum_{i=1}^h d_i^2.$$

Insbesondere folgt aus Satz 1.4 und Satz 1.5, daß eine kommutative Gruppe nur eindimensionale irreduzible Darstellungen zuläßt.

Ist  $H$  eine Untergruppe von  $G$ , so definiert jede Darstellung  $\rho$  von  $G$  durch Einschränkung eine Darstellung von  $H$ , die wir mit  $\text{Res}_H^G \rho$  bezeichnen. Der Charakter dieser Darstellung ist dann  $\text{Res}_H^G \chi$ , wenn  $\chi$  der Charakter von  $\rho$  ist. Für normale Untergruppen wollen wir die Zerlegung der so gewonnenen Darstellungen untersuchen.

**Definition 1.5** Es sei  $H$  eine normale Untergruppe von  $G$  und  $\tilde{\chi}$  der Charakter einer irreduziblen Darstellung  $\tilde{\rho}$  von  $H$ . Für  $\sigma \in G$  bezeichne weiter  $\tilde{\rho}^\sigma$  die durch  $\tilde{\rho}^\sigma(\xi) := \tilde{\rho}(\sigma\xi\sigma^{-1})$  gegebene Darstellung von  $H$  und  $\tilde{\chi}^\sigma$  ihren Charakter. Dann heißt die Gruppe

$$\mathfrak{I}(\tilde{\chi}) := \{\sigma \in G : \tilde{\chi}^\sigma = \tilde{\chi}\}$$

die Trägheitsgruppe von  $\tilde{\chi}$  in  $G$ .

**Satz 1.6** Es sei  $H$  eine normale Untergruppe von  $G$ ,  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $G$  mit Charakter  $\chi$  und  $\tilde{\rho}$  eine irreduzible Darstellung von  $H$  mit dem Charakter  $\tilde{\chi}$ , so daß gilt

$$e := \langle \text{Res}_H^G \chi, \tilde{\chi} \rangle_H > 0.$$

Ferner sei  $G = \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{I}(\tilde{\chi})\sigma_i$  eine Nebenklassenzerlegung von  $G$  bezüglich  $\mathfrak{I}(\tilde{\chi})$ . Dann gilt:

$$\text{Res}_H^G \chi = e \sum_{i=1}^m \tilde{\chi}^{\sigma_i}.$$

**Beweis:** [Hup67, Seite 565, Hauptsatz 17.3 g] □



## Induzierte Darstellungen

Es sei  $k$  ein Körper und  $H$  eine Untergruppe der Gruppe  $G$  mit einer Darstellung  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}_k(W)$ . Wir wollen aus dieser Darstellung von  $H$  eine Darstellung von  $G$  konstruieren. Sei dafür  $V$  der Raum der Funktionen  $f : G \rightarrow W$ , für die für  $\tau \in H$ ,  $\xi \in G$  gilt

$$f(\tau\xi) = \rho(\tau)(f(\xi)).$$

Die folgende Vorschrift für  $\sigma \in G$  definiert eine Darstellung von  $G$  auf  $V$ :

$$\forall \xi \in G : (\sigma f)(\xi) := f(\xi\sigma).$$

Mit dieser Operation wird  $V$  zum  $G$ -Modul; die zugehörige Darstellung  $\text{Ind}_H^G \rho$  heißt die *von  $\rho$  induzierte Darstellung von  $G$*  und  $V =: \text{Ind}_H^G W$  der *von  $W$  induzierte  $G$ -Modul*. Man beachte, daß jedes  $f \in \text{Ind}_H^G W$  vollständig durch seine Werte auf einem Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von  $G$  bezüglich  $H$  bestimmt ist.

**Satz 1.7** *Vermöge der Einbettung*

$$W \hookrightarrow \text{Ind}_H^G W, \quad w \mapsto f_w,$$

wobei

$$f_w(\sigma) = \begin{cases} \rho(\sigma)(w) & , \text{ falls } \sigma \in H \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

erhalten wir

$$\text{Ind}_H^G W \cong \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W.$$

Dabei ist  $R$  ein Repräsentantensystem von  $G/H$ .

**Beweis:** [Lan93, Theorem 7.3] □

Insbesondere ist also  $\dim_k(\text{Ind}_H^G W) = [G : H] \cdot \dim_k W$ . Im Verlauf der Arbeit werden wir beide Beschreibungen von  $\text{Ind}_H^G W$  verwenden.

**Satz 1.8 (Transitivität der induzierten Darstellung)** *Seien  $H_1, H_2$  und  $G$  Gruppen mit  $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$  und  $\rho : H_1 \rightarrow \text{Aut}_k(V)$  eine Darstellung von  $H_1$ . Dann gilt:*

$$\text{Ind}_{H_2}^G(\text{Ind}_{H_1}^{H_2} \rho) = \text{Ind}_{H_1}^G \rho.$$

Für die Charaktere der induzierten Darstellungen gilt:

**Satz 1.9** *Sei  $H$  eine Untergruppe der Gruppe  $G$  und  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}_k(W)$  eine Darstellung von  $H$  mit dem Charakter  $\chi$ . Dann hat der Charakter  $\text{Ind}_H^G \chi$  der von  $\rho$  induzierten Darstellung für  $\sigma \in G$  den Wert:*

$$(\text{Ind}_H^G \chi)(\sigma) = \frac{1}{\#(H)} \sum_{\substack{\tau \in G \\ \sigma\tau \in H}} \chi(\sigma\tau).$$

**Beweis:** [Lan93, Proposition 7.4] □

$\text{Ind}_H^G \chi$  wird auch als der von  $\chi$  induzierte Charakter bezeichnet. Entsprechend bezeichnet  $\text{Res}_H^G \varphi$  die Einschränkung eines Charakters  $\varphi$  von  $G$  auf  $H$ . Die explizite Berechnung der Werte von  $\text{Ind}_H^G \chi$  kann man oft unter Benutzung der folgenden Gleichung umgehen.

**Satz 1.10 (Frobeniusreziprozität)** Sei  $H$  eine Untergruppe der Gruppe  $G$ . Ist  $\varphi$  ein Charakter von  $H$ ,  $\psi$  ein Charakter von  $G$ , so gilt für das Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \text{Res}_H^G \psi \rangle_H = \langle \text{Ind}_H^G \varphi, \psi \rangle_G.$$

**Beweis:** [Lan93, Theorem 6.1 (i)] □

Ein weiterer Sachverhalt, der unmittelbar aus dem Homomorphiesatz folgt, soll hier nicht unerwähnt bleiben: Ist  $H$  eine normale Untergruppe von  $G$ , so sind die irreduziblen Darstellungen der Gruppe  $G/H$  gerade diejenigen irreduziblen Darstellungen von  $G$ , deren Einschränkung auf  $H$  die triviale Darstellung liefert.

## 1.2 Die Darstellungen der $GL(2, K)$ für $\#(K) \neq 2$

In diesem und im nächsten Abschnitt sei  $K$  ein endlicher Körper der Ordnung  $q = p^f$  mit  $q \neq 2$ .  $L$  sei die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) quadratische Erweiterung von  $K$ . Ferner sei  $\varepsilon \in K^\times$  ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe  $K^\times$  von  $K$  und  $G$  bezeichne  $GL(2, K)$ , die Gruppe der invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrizen über dem Körper  $K$ . Dann ist  $\#(G) = (q+1)(q-1)^2 q$ . Unter einem Charakter einer Untergruppe von  $G$  verstehen wir immer einen eindimensionalen Charakter, es sei denn, es ist ausdrücklich die Rede vom Charakter einer Darstellung. Ferner verwenden wir folgende Bezeichnungen für gewisse Untergruppen von  $G$ :

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in K^\times, b \in K \right\} && \text{(Borelgruppe von } G), \\ D &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in K^\times \right\} && \text{(Diagonalgruppe von } G), \\ U &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in K \right\} && \text{(unipotente Untergruppe von } G), \\ P &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in K^\times, b \in K \right\} && \text{(affine Gruppe),} \\ A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in K^\times \right\}, \\ Z &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in K^\times \right\} && \text{(Zentrum von } G), \\ E &= \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in K^\times \right\}. \end{aligned}$$

Außerdem sei  $\psi$  ein fest gewählter nichttrivialer Charakter der additiven Gruppe  $K^+$  von  $K$ , der bei der Konstruktion der Darstellungen fixiert bleiben wird.  $w$  und  $w'$  bezeichnen die Elemente

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Klasse ausgezeichneter Untergruppen sind die *Cartan-Untergruppen*. Man unterscheidet die *zerfallenden Cartan-Untergruppen*, die aus allen zu  $D$  konjugierten Untergruppen bestehen, und die *nicht-zerfallenden Cartan-Untergruppen*.

Letztere erhält man folgendermaßen: Für ein beliebiges Element  $\xi \in L^\times$  ist die Abbildung  $m_\xi : L^\times \rightarrow L^\times$ ,  $m_\xi : \alpha \mapsto \xi\alpha$   $K$ -linear. Wählt man eine  $K$ -Basis von  $L$ , so entspricht jedes  $m_\xi$  einem Element von  $G$ , so daß man eine Einbettung  $L^\times \hookrightarrow G$  erhält. Die nicht-zerfallenden Cartan-Untergruppen von  $G$  sind die (paarweise zueinander konjugierten) Bilder von  $L^\times$  unter derartigen Einbettungen.

In Anlehnung an [PS83] wird nun eine Beschreibung der komplexen Darstellungen der Gruppe  $G$  folgen.

### 1.2.1 Die Gruppe $G = GL(2, K)$

Bevor wir die irreduziblen Darstellungen im einzelnen untersuchen, wollen wir in diesem Abschnitt einige Eigenschaften von  $G$  und Zusammenhänge zwischen den Untergruppen zusammenstellen (vgl. [PS83, Seiten 11-13]).

**Satz 1.11** *Für die Untergruppen von  $G$  gelten die Beziehungen*

- (i)  $B = P \times Z = D \rtimes U$ ,
- (ii)  $D = A \times wAw = A \times E \cong B/U$ ,
- (iii)  $U = B' = P' \cong K^+$ ,
- (iv)  $P = U \rtimes A$ ,
- (v)  $A \cong P/U \cong K^\times$ ,
- (vi)  $Z \cong K^\times$ ,
- (vii)  $E \cong K^\times$ .

Hierbei bezeichnen wir den Kommutator einer Gruppe  $H$  mit  $H'$ , und für zwei Untergruppen  $H, \tilde{H}$  von  $G$ , von denen  $H$  normal in  $G$  ist, sei  $H \rtimes \tilde{H}$  das semidirekte Produkt.

Eine wichtige Zerlegung von  $G$  wird in folgendem Satz genannt:

**Satz 1.12 (Bruhat-Zerlegung)** *Die Gruppe  $G$  ist die disjunkte Vereinigung*

$$G = B \cup BwU = B \cup U w B.$$

Ein Element

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit  $c \neq 0$  läßt sich gemäß dieser Zerlegungen schreiben als

$$\sigma = \begin{pmatrix} b - \frac{ad}{c} & a \\ 0 & c \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b - \frac{ad}{c} \end{pmatrix}.$$

### Die Konjugationsklassen von $G$

Die Konjugationsklassen von  $G$  lassen sich in vier Typen einteilen. Sei  $\sigma \in G$ .

**Fall 1:** Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $P_\sigma$  von  $\sigma$  liegen in  $K^\times$ . Dann gibt es in der Konjugationsklasse  $\sigma^G$  von  $\sigma$  ein Element  $\sigma'$  in Jordanscher Normalform.

- Hat  $P_\sigma$  die doppelte Nullstelle  $a \in K^\times$ , und ist das Minimalpolynom von  $\sigma$  verschieden von  $P_\sigma$ , so ist  $\sigma' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \sigma$ . Wir setzen

$$\sigma^G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^G =: c_1(a).$$

- Besitzt  $P_\sigma$  die doppelte Nullstelle  $a \in K^\times$ , und stimmt  $P_\sigma$  mit dem Minimalpolynom überein, so ist  $\sigma' = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Also erhalten wir

$$\sigma^G = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^G =: c_2(a).$$

- Sind die Nullstellen  $a, b \in K^\times$  von  $P_\sigma$  voneinander verschieden, so ergibt sich  $\sigma' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , und

$$\sigma^G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^G =: c_3(a, b).$$

Dabei gilt  $c_3(a, b) = c_3(b, a)$ .

**Fall 2:** Die Nullstellen  $\alpha, \beta \in L$  von  $P_\sigma$  liegen nicht in  $K$ .

In diesem Fall ist  $P_\sigma$  irreduzibel über  $K$ , und die beiden Nullstellen müssen zueinander konjugiert und verschieden sein, da  $K$  als endlicher Körper vollkommen ist. Es ist also  $\beta = \bar{\alpha}$ , und man erhält

$$\sigma^G = \begin{pmatrix} 0 & -N_K^L \alpha \\ 1 & \text{Tr}_K^L \alpha \end{pmatrix}^G =: c_4(\alpha)$$

und  $c_4(\alpha) = c_4(\bar{\alpha})$ .

Die Mächtigkeiten der verschiedenen Konjugationsklassen desselben Typs sind gleich. Man kann sie unter Verwendung der Formel

$$\#(\sigma^G) = [G : Z_G(\sigma)]$$

ermitteln, wobei  $Z_G(\sigma)$  den Zentralisator von  $\sigma$  in  $G$  bezeichnet. Dieser ist nur für die im Fall 2 auftretenden Elemente nicht durch das Lösen einfacher Gleichungen zu ermitteln. Dort benutzt man z.B. das folgende Lemma:

**Lemma 1.13** *Jede nicht zerfallende Cartan-Untergruppe  $C_L$  von  $G$  ist ihr eigener Zentralisator.*

**Beweis:** Sei  $\xi \in L^\times$  ein Element einer Ordnung  $> q-1$ . Dann ist  $\xi \notin K^\times$  und  $\{1, \xi\}$  eine  $K$ -Basis von  $L$ . Sei weiter  $\sigma \in Z_G(m_\xi)$ , aufgefaßt als  $K$ -lineare Abbildung von  $L$  nach  $L$ . Für alle  $\alpha = a + b\xi$  mit  $a, b \in K$  gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \sigma(a + b\xi) \\ &\stackrel{\sigma \text{ K-linear}}{=} a\sigma(1) + b\sigma(m_\xi(1)) \\ &\stackrel{\sigma \in Z_G(m_\xi)}{=} a\sigma(1) + bm_\xi(\sigma(1)) \\ &= (a + b\xi)\sigma(1) = \alpha\sigma(1). \end{aligned}$$

Es ist demnach  $\sigma = m_{\sigma(1)}$ , und nach Wahl einer  $K$ -Basis von  $L$  liegen die  $m_\xi$  und  $m_{\sigma(1)}$  repräsentierenden Matrizen in der Cartan-Untergruppe  $C_L$  von  $G$ . Also ist  $Z_G(C_L) \subseteq C_L$ . Die umgekehrte Inklusion gilt aber ebenfalls, da  $C_L \cong L^\times$  kommutativ ist.  $\square$

Der folgenden Tabelle kann man sowohl die Mächtigkeiten der Konjugationsklassen als auch die Anzahlen der Konjugationsklassen eines Typs entnehmen:

Klassentyp	Anzahl der Klassen	Elemente in der Klasse
$c_1(a), a \in K^\times$	$q - 1$	1
$c_2(a), a \in K^\times$	$q - 1$	$q^2 - 1$
$c_3(a, b), \begin{matrix} a, b \in K^\times \\ a \neq b \end{matrix}$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	$q^2 + q$
$c_4(\alpha), \alpha \in L \setminus K$	$\frac{q^2 - q}{2}$	$q^2 - q$

Nach Abschnitt 1.1 gibt es soviele inäquivalente irreduzible Darstellungen von  $G$ , wie es Konjugationsklassen in  $G$  gibt. Also besitzt  $G$

$$(q - 1) + (q - 1) + \frac{(q - 1)(q - 2)}{2} + \frac{q^2 - q}{2} = q^2 - 1$$

inäquivalente irreduzible Darstellungen.

### 1.2.2 Die Darstellungen von Untergruppen von $G$

Bevor wir die irreduziblen Darstellungen der Gruppe  $G$  beschreiben, sollen hier kurz die diejenigen der aufgelisteten Untergruppen von  $G$  dargelegt werden, da die Darstellungen von  $G$  zum Teil aus denen der Untergruppen entwickelt werden.

#### Die zu $K^\times$ isomorphen Untergruppen

Nach Satz 1.11 sind unter den ausgezeichneten Untergruppen von  $G$  gerade die Gruppen  $A$ ,  $Z$  und  $E$  zu  $K^\times$  isomorph. Da  $K^\times$  kommutativ ist, gibt es von einer zu  $K^\times$  isomorphen Untergruppe nur eindimensionale irreduzible Darstellungen; die Menge derselben ist also gerade die Charaktergruppe von  $K^\times$ .

#### Die Darstellungen von $U$

Auch  $U \cong K^+$  ist eine kommutative Gruppe, die folglich nur eindimensionale irreduzible Darstellungen zulässt. Eine davon ist der fest gewählte Charakter  $\psi$  von  $K^+$ . Identifiziert man  $U$  mit  $K^+$  und definiert man zu jedem  $a \in K$  den Charakter  $\psi_a$  durch

$$\forall x \in K : \psi_a(x) := \psi(ax),$$

so sind für  $a \neq a'$  die Charaktere  $\psi_a$  und  $\psi_{a'}$  voneinander verschieden, und die Menge  $\{\psi_a : a \in K\}$  enthält sämtliche Charaktere von  $U$ .

#### Die Darstellungen von $P$

Nach Satz 1.11 ist die Kommutatorgruppe  $P'$  von  $P$  gerade  $U$ . Dank der Zerlegung von  $P$  als semidirektes Produkt von  $U$  und  $A$  entsprechen die Charaktere, also die

eindimensionalen Darstellungen von  $P$ , gerade den Charakteren von  $A$ . Ferner ist die induzierte Darstellung  $\pi := \text{Ind}_U^P \psi$  eine irreduzible Darstellung der Dimension  $[P : U] = q - 1$ .  $\pi$  zerfällt bei Einschränkung auf  $U$  in die Summe aller nichttrivialen Charaktere von  $U$ , d.h.

$$\text{Res}_U^P \pi = \bigoplus_{a \in K^\times} \psi_a,$$

wie man unter Benutzung der Frobeniusreziprozität zeigen kann. Die übrigen irreduziblen Darstellungen von  $P$  ergeben sich als Skalarprodukte der eindimensionalen Charaktere mit  $\pi$ .

### Die Darstellungen von $D$

Wie bei den zu  $K^\times$  isomorphen Untergruppen müssen auch alle irreduziblen Darstellungen von  $D$  eindimensional sein. Es handelt sich also um die Charaktere von  $D$ . Weil  $D = A \times E$  und  $A \cong K^\times \cong E$  ist, entspricht ein Charakter  $\mu$  von  $D$  gerade einem Paar  $(\mu_1, \mu_2)$  von Charakteren von  $K^\times$  mit der Vorschrift

$$\mu \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \mu \left( \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \mu_1(ad)\mu_2(d)$$

für alle  $a, d \in K^\times$ . Zu  $\mu$  definieren wir den Charakter  $\mu_w : D \rightarrow \mathbb{C}^\times$  durch

$$\mu_w \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := \mu \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^w \right) = \mu \left( \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right).$$

Man kann leicht nachprüfen, daß für einen Charakter  $\mu$ , der dem Paar  $(\mu_1, \mu_2)$  von Charakteren von  $K^\times$  entspricht, der Charakter  $\mu_w$  zu dem Paar  $(\mu_1\mu_2, \mu_2^{-1})$  gehört. Es gilt also die Äquivalenz

$$\mu = \mu_w \iff \mu_2 = 1.$$

**Bemerkung:** Die hier definierte Korrespondenz zwischen Charakteren von  $D$  und Paaren von Charakteren von  $K^\times$  weicht ab von der in [PS83] angegebenen:

$$\mu \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \mu'_1(a)\mu'_2(d).$$

Die hier angeführte ist aber für die spätere Verwendung günstiger.

### Die Darstellungen von $B$

Wie aus Satz 1.11 bekannt, ist  $B = P \times Z$ . Die irreduziblen Darstellungen von  $B$  ergeben sich daher aus den irreduziblen Darstellungen von  $P$  und  $Z$ , indem man diese auf der jeweils anderen Untergruppe trivial fortsetzt und dann das Tensorprodukt bildet. Man beachte ferner die Isomorphie  $B/B' = B/U \cong D$ . Daher ist jeder Charakter von  $B$  eindeutig durch seine Einschränkung auf  $D$  bestimmt. Im weiteren wird daher nicht immer unterschieden, wann es sich um einen Charakter von  $D$  und wann um seine Fortsetzung auf  $B$  handelt.

### 1.2.3 Die Darstellungen von $G$

Nach [PS83] teilen sich die inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von  $G$  in zwei Klassen:

- die *Darstellungen der Hauptserie*, d.h. diejenigen, die als Komponenten von Darstellungen der Form  $\text{Ind}_B^G \mu$  auftreten, wobei  $\mu$  ein Charakter der Borelgruppe  $B$  ist, und
- die übrigen irreduziblen Darstellungen, die als *cuspidale Darstellungen* bezeichnet werden.

### Die Darstellungen der Hauptserie

Es sei  $\mu$  ein Charakter von  $B$ . Nach der Einschränkung auf  $D$  entspricht  $\mu$  einem Paar von Charakteren von  $K^\times$ . Der folgende Satz beschreibt, wie die Darstellung  $\text{Ind}_B^G \mu$  in Abhängigkeit von der Beschaffenheit dieses Paares von Charakteren zerfällt.

**Satz 1.14** *Sei  $\mu$  ein Charakter von  $B$ , der einem Paar  $(\mu_1, \mu_2)$  von Charakteren von  $K^\times$  entspricht.*

- (i) *Ist  $\mu_2 \neq 1$ , so ist  $\text{Ind}_B^G \mu =: \rho_\mu$  eine irreduzible  $(q+1)$ -dimensionale Darstellung von  $G$ . Ihr Charakter wird mit  $\chi_\mu$  oder mit  $\chi_{(\mu_1, \mu_2)}$  bezeichnet.  $\rho_\mu$  ist genau dann äquivalent zu  $\rho_{\mu'}$ , wenn  $\mu' = \mu$  oder  $\mu' = \mu_w$  erfüllt ist.*
- (ii) *Ist  $\mu_2 = 1$ , so gilt*

$$\text{Ind}_B^G \mu = (\mu_1 \circ \det) \oplus \rho_{(\mu_1, 1)},$$

wobei  $\rho_{(\mu_1, 1)}$  eine irreduzible  $q$ -dimensionale Darstellung von  $G$  ist. Ihr Charakter sei  $\chi_{(\mu_1, 1)}$  oder  $\chi_\mu$ . Zwei Darstellungen  $\rho_{(\mu_1, 1)}$  und  $\rho_{(\mu'_1, 1)}$  sind dann und nur dann äquivalent, wenn  $\mu_1 = \mu'_1$  ist.

- (iii) *Alle irreduziblen Darstellungen von  $G$ , die als Komponenten von Darstellungen der Form  $\text{Ind}_B^G \mu$  auftreten, sind zu einer der folgenden äquivalent:*

- $q - 1$  verschiedene eindimensionale Darstellungen der Form  $\mu_1 \circ \det$ ,
- $q - 1$  inäquivalente  $q$ -dimensionale Darstellungen der Form  $\rho_{(\mu_1, 1)}$ ,
- $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$  inäquivalente  $(q + 1)$ -dimensionale Darstellungen der Form  $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$  mit  $\mu_2 \neq 1$ .

**Beweis:** [PS83, Theorem 8.12, Theorem 8.13] □

Die Werte der Charaktere dieser Darstellungen auf den einzelnen Konjugationsklassen werden mittels der Formel für den induzierten Charakter ermittelt und sind aus der Tabelle am Ende dieses Kapitels ersichtlich. Bevor wir nun zur Beschreibung der cuspidalen Darstellungen fortschreiten, soll an dieser Stelle eine konkrete Basis für  $\text{Ind}_B^G \mu$  angegeben und die Operation von  $G$  auf dieser Basis beschrieben werden.  $\mu$  entspreche wieder dem Paar von Charakteren  $(\mu_1, \mu_2)$  von  $K^\times$ . Wie aus Abschnitt 1.1 hervorgeht, ist der Darstellungsraum  $V$  von  $\text{Ind}_B^G \mu$  gegeben durch den Raum der Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , für die für  $\tau \in B$ ,  $\xi \in G$  gilt

$$f(\tau\xi) = \mu(\tau)f(\xi).$$

Wir wählen das System von Rechtsnebenklassenrepräsentanten von  $G$  bezüglich  $B$ :

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} : a \in K \right\}.$$

Jedes Element  $\sigma \in G \setminus B$  läßt sich zerlegen in

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{ad}{c} - b & a \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{\in B} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix}}_{\in R}.$$

Nun definieren wir ein System von Funktionen  $\{f_i \in V\}_{i \in I}$  mit  $I = \mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$  durch

$$\forall a, b \in K : \begin{cases} f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, & f_\infty \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = 0 \\ f_b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, & f_b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \psi(ab). \end{cases}$$

**Behauptung:** Die Familie  $(f_i)_{i \in I}$  ist linear unabhängig.

**Beweis:** Daß  $f_\infty$  linear unabhängig von  $(f_i)_{i \in I \setminus \{\infty\}}$  ist, ist klar, da

$$f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad f_b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

gilt für alle  $b \in K$ . Sei also  $\sum_{a \in K} \lambda_a f_a = 0$ ,  $\lambda_a \in \mathbb{C}$ . Nach Definition der  $f_a$  ist dann  $\sum_{a \in K} \lambda_a \psi_a = 0$ . Weil aber die Charaktere  $\psi_a$  voneinander linear unabhängig sind, muß für alle  $a \in K$  gelten:  $\lambda_a = 0$ . Somit ist die Familie  $(f_i)_{i \in K}$  linear unabhängig.  $\square$

Die Funktionen  $f_i$ ,  $i \in I$ , bilden daher eine Basis von  $V$ . Für jedes  $\sigma \in G$  existiert also eine Matrix  $(k(i, j; \sigma))_{i, j \in I}$  mit

$$\sigma f_j = \sum_{i \in I} k(i, j; \sigma) f_i.$$

Diese Koeffizienten wollen wir nun bestimmen. Wir können uns dabei auf Elemente  $\sigma \in B$  und  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  beschränken, weil diese gemeinsam die Gruppe  $G$  erzeugen. Unter Verwendung der Vorschriften  $(\sigma f)(\xi) = f(\xi\sigma)$  für  $\sigma, \xi \in G$  und  $f(\tau\xi) = \mu(\tau)f(\xi)$  für  $\tau \in B, \xi \in G$  für die Wirkung der von  $\mu$  induzierten Darstellung ergibt sich:

(i) Elemente der Form  $k(i, \infty; \sigma)$ :

•  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$ : Es gilt

$$\sigma f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f_\infty(\sigma) = \mu(\sigma) f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mu(\sigma)$$

und

$$\sigma f_\infty \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a' \end{pmatrix} = f_\infty \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b + a'd \end{pmatrix} = 0 \quad \forall a' \in K.$$

Also ist  $\sigma f_\infty = \mu(\sigma) f_\infty$ , d.h.

$$k(\infty, \infty; \sigma) = \mu(\sigma),$$

$$k(a', \infty; \sigma) = 0 \quad \forall a' \in K.$$

•  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ : Sei  $a \in K$ . Dann ist

$$\sigma f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f_\infty \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} f_\infty \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$



und

$$\sigma f_{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = f_{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } a \neq 0 \\ 1 & , \text{ falls } a = 0. \end{cases}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in I} k(i, \infty; \sigma) f_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k(\infty, \infty; \sigma) \\ 0 &= \sum_{i \in I} k(i, \infty; \sigma) f_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \sum_{a' \in K} k(a', \infty; \sigma) \psi(aa') \quad \forall a \in K^{\times} \\ 1 &= \sum_{i \in I} k(i, \infty; \sigma) f_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{a' \in K} k(a', \infty; \sigma). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von  $\sum_{a' \in K} \psi(a') = 0$

$$k(\infty, \infty; \sigma) = 0 \quad \text{und}$$

$$k(a, \infty; \sigma) = \frac{1}{q} \quad \forall a \in K.$$

(ii) Elemente der Form  $k(i, b'; \sigma), b' \in K$ :

•  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$ :

Mittels derselben Methode wie in (i) erhält man für die Koeffizienten die folgenden Werte:

$$\forall a', b' \in K, a' \neq \frac{b'd}{a} : \begin{cases} k(\infty, b'; \sigma) = 0 \\ k(\frac{b'd}{a}, b'; \sigma) = \mu \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \psi(\frac{b'b}{a}) \\ k(a', b'; \sigma) = 0. \end{cases}$$

•  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ : In diesem Fall liefert die Methode von (i) das Gleichungssystem

$$(*) := \forall b \in K, a' \in K^{\times} \begin{cases} k(\infty, b; \sigma) = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sum_{a \in K} k(a, b; \sigma) \psi(aa') = \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{a'} & 1 \\ 0 & -a' \end{pmatrix} \psi(-\frac{b}{a'}) \\ \sum_{a \in K} k(a, b; \sigma) = 0. \end{cases}$$

**Behauptung:** Eine Lösung des Gleichungssystems (\*) ist für  $a, b \in K$  durch

$$\begin{aligned} k(\infty, b; \sigma) &= \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ k(a, b; \sigma) &= \frac{1}{q} \sum_{c \in K^{\times}} \psi(ac + \frac{b}{c}) \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gegeben.

**Beweis:** (a) Es ist  $k(\infty, b; \sigma) = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  nach Definition.

(b) Sei  $a' \in K^\times, b \in K$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in K} k(a, b; \sigma) \psi(aa') &= \frac{1}{q} \sum_{a \in K} \sum_{c \in K^\times} \psi \left( ac + \frac{b}{c} \right) \underbrace{\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{=\mu_2(c)} \psi(aa') \\
&= \frac{1}{q} \sum_{a \in K} \left( \psi \left( -\frac{b}{a'} \right) \mu_2(-a') + \sum_{\substack{c \in K^\times \\ c \neq -a'}} \psi \left( a(a' + c) + \frac{b}{c} \right) \mu_2(c) \right) \\
&= \psi \left( -\frac{b}{a'} \right) \mu_2(-a') + \frac{1}{q} \sum_{\substack{c \in K^\times \\ c \neq -a'}} \left( \psi \left( \frac{b}{c} \right) \mu_2(c) \underbrace{\sum_{a \in K} \psi(a(a' + c))}_{=0} \right) \\
&= \psi \left( -\frac{b}{a'} \right) \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{a'} & 0 \\ 0 & -a' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Sei  $b \in K$ . Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in K} k(a, b; \sigma) &= \frac{1}{q} \sum_{a \in K} \sum_{c \in K^\times} \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \psi \left( ac + \frac{b}{c} \right) \\
&= \frac{1}{q} \sum_{c \in K^\times} \left( \psi \left( \frac{b}{c} \right) \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{a \in K} \psi(ac)}_{=0} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist somit gezeigt und die Koeffizienten  $k(i, j; \sigma)$  für die nötigen Fälle bestimmt.  $\square$

Wir werden auf diese Basis später zurückkommen, um bestimmte Darstellungen der  $SL(2, K)$  zu konstruieren.

### Die cuspidalen Darstellungen

Die cuspidalen Darstellungen, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden, besitzen alle die Dimension  $q - 1$ . Sie stimmen auf der Untergruppe  $P$  von  $G$  mit der Darstellung  $\pi$  überein. In ähnlicher Weise, wie die Darstellungen der Hauptserie mit Charakteren der Diagonalgruppe  $D$  zusammenhängen, kann man die cuspidalen Darstellungen mit Hilfe von Charakteren konstruieren, und zwar mit Charakteren von  $L^\times$ . Man beachte, daß man für jeden Charakter  $\chi$  von  $K^\times$  durch die Verknüpfung mit der Normfunktion einen Charakter  $\tilde{\chi} = \chi \circ N$  von  $L^\times$  bilden kann. Umgekehrt kann man jedoch zu einem Charakter  $\tilde{\chi}$  von  $L^\times$  nach dem Homomorphiesatz genau dann einen Charakter  $\chi$  von  $K^\times$  finden, so daß  $\tilde{\chi} = \chi \circ N$ , wenn der Kern von  $\tilde{\chi}$  den Kern der Normabbildung umfaßt. Diese Überlegung gibt Anlaß zu der folgenden Definition:

**Definition 1.6** Ein Charakter  $\tilde{\chi}$  von  $L^\times$  heißt zerlegbar, falls ein Charakter  $\chi$  von  $K^\times$  existiert, so daß  $\tilde{\chi} = \chi \circ N$ . Andernfalls heißt  $\tilde{\chi}$  unzerlegbar. Für einen beliebigen Charakter  $\nu$  von  $L^\times$  bezeichne ferner  $\bar{\nu}$  den zu  $\nu$  konjugierten Charakter, definiert durch:

$$\bar{\nu}(\alpha) := \nu(\bar{\alpha})$$

für alle  $\alpha \in L^\times$ .

Unter Verwendung von *Hilberts Satz 90*, der für eine quadratische Körpererweiterung besagt, daß jedes Element  $\alpha \in L^\times$  mit  $N(\alpha) = 1$  eine Darstellung der Form  $\alpha = \frac{\beta}{\bar{\beta}}$  mit  $\beta \in L^\times$  besitzt, kann man leicht zeigen, daß ein Charakter  $\nu$  von  $L^\times$  genau dann zerlegbar ist, wenn gilt:  $\nu = \bar{\nu}$ . Sei nun  $\nu$  ein unzerlegbarer Charakter von  $L^\times$ . Zu  $\nu$  definieren wir eine Funktion

$$j : K^\times \rightarrow \mathbb{C}$$

durch die Vorschrift <sup>1</sup>

$$j(a) = -\frac{1}{q} \sum_{\substack{\alpha \in L^\times \\ N\alpha = a}} \psi(\alpha + \bar{\alpha})\nu(\alpha).$$

Mit Hilfe dieser Funktion konstruieren wir eine Darstellung  $\rho_\nu$  von  $G$  auf dem Raum

$$V := \{f : K^\times \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Wir setzen dazu für  $f \in V, x \in K^\times, \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$ :

$$\text{(def1)} \quad \left( \rho_\nu \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} f \right) (x) := \nu(d)\psi\left(\frac{b}{d}x\right) f\left(\frac{a}{d}x\right).$$

Diese Definition ergibt sich aus der Gleichung  $\rho_\nu|_P = \text{Ind}_U^P \psi = \pi$ , und dadurch daß man die Nebenklassen von  $U$  in  $P$  mit  $K^\times$  identifizieren kann. Ferner setzt man  $\rho_\nu|_Z = \nu|_{K^\times}$ , indem man  $Z$  mit  $K^\times$  identifiziert, und bildet dann das Skalarprodukt der beiden Darstellungen.

Weiter definieren wir für  $f \in V, x \in K^\times$ :

$$\text{(def2)} \quad (\rho_n u(w')f)(x) = \sum_{y \in K^\times} \nu(y^{-1})j(xy)f(y).$$

Die gegebenen Vorschriften sind mit den in  $G$  bestehenden Relationen verträglich. Da  $G$  von  $B$  und  $w'$  erzeugt wird, liefern (def1) und (def2) tatsächlich eine Darstellung von  $G$ . Anhand der Charaktertafel am Ende dieses Kapitels wird deutlich, daß zu  $\nu$  und  $\nu'$  genau dann äquivalente Darstellungen gehören, wenn  $\nu' = \nu$  oder  $\nu' = \bar{\nu}$  gilt. Aus dieser Tatsache, und weil es genau  $\frac{\#(L^\times)}{\#(K \text{ or } N)} = \frac{q^2-1}{q+1} = q-1$  zerlegbare Charaktere von  $L^\times$  gibt, erhalten wir den folgenden Satz:

**Satz 1.15** Die Anzahl der inäquivalenten cuspidalen Darstellungen von  $G$  ist  $\frac{q(q-1)}{2}$ .

Auch für eine cuspidale Darstellung sollen hier eine Basis des Darstellungsraums gegeben und die zugehörigen Matrizen ermittelt werden.

Wir fixieren als Basis die Menge der Funktionen  $\{h_a : a \in K\}$ , wobei die Funktion  $h_a : K^\times \rightarrow \mathbb{C}$  definiert ist durch

$$\forall a, x \in K^\times : h_a(x) = \begin{cases} 1 & , x = a \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Es bezeichnen nun  $k(i, j; \sigma), i, j \in K^\times, \sigma \in G$ , die Elemente aus  $\mathbb{C}$ , so daß gilt

$$\sigma h_j = \sum_{i \in K^\times} k(i, j; \sigma) h_i.$$

<sup>1</sup>In [PS83, Seite 35] ist die Funktion  $j$  ohne das hier auftretende Minuszeichen definiert. Dabei handelt es sich jedoch um einen Druckfehler, wie sich aus den folgenden Rechnungen ergibt.

Wir ermitteln ihre Werte wie schon bei den Darstellungen der Hauptserie nur für  $\sigma \in B$  oder  $\sigma = w'$ .

- $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$ : Wir haben

$$\begin{aligned} \sigma h_{b'}(x) &= \nu(d)\psi\left(\frac{b}{d}x\right) h_{b'}\left(\frac{a}{d}x\right) \\ &= \nu(d)\psi\left(\frac{b}{d}x\right) h_{b'\frac{d}{a}}(x) \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \neq b'\frac{d}{a} \\ \nu(d)\psi\left(b'\frac{b}{a}\right) & , \text{ falls } x = b'\frac{d}{a}. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist

$$k(a', b'; \sigma) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } a' \neq b'\frac{d}{a} \\ \nu(d)\psi\left(b'\frac{b}{a}\right) & , \text{ falls } a' = b'\frac{d}{a}. \end{cases}$$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ : Es ist

$$(\sigma h_{b'})(x) = \sum_{a' \in K^\times} \nu(a'^{-1})j(xa')h_{b'}(a') = \nu(b'^{-1})j(xb'),$$

somit gilt

$$\sigma h_{b'} = \sum_{a' \in K^\times} \nu(b'^{-1})j(a'b')h_{a'}.$$

Für die Koeffizienten bedeutet dies:

$$\forall a', b' \in K^\times : k(a', b'; \sigma) = \nu(b'^{-1})j(a'b').$$

### Die Charaktertafel von $G$

(vgl. [PS83, Seite 70])

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$
$\mu_1 \circ \det$	$\mu_1(a)^2$	$\mu_1(a)^2$	$\mu_1(ad)$	$\mu_1(N\alpha)$
$\chi_{(\mu_1, 1)}$	$q\mu_1(a)^2$	0	$\mu_1(ad)$	$-\mu_1(N\alpha)$
$\chi_\mu = \chi_{(\mu_1, \mu_2)}$ , $\mu_2 \neq 1$	$(q+1)\mu\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$	$\mu\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$	$\mu\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + \mu\left(\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$	0
$\chi_\nu, \nu \neq \bar{\nu}$	$(q-1)\nu(a)$	$-\nu(a)$	0	$-(\nu(\alpha) + \nu(\bar{\alpha}))$

### 1.3 Die Darstellungen der $SL(2, K)$

Die  $SL(2, K)$  ist die Gruppe der invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrizen über  $K$ , deren Determinante 1 ist. Basierend auf der Darstellungstheorie der  $GL(2, K)$  sollen in diesem Abschnitt die irreduziblen Darstellungen der  $SL(2, K)$  für Körper der Charakteristik  $\text{char}(K) \neq 2$  ermittelt werden. Ein großer Teil derselben ergibt sich als Einschränkung von irreduziblen Darstellungen der  $GL(2, K)$ , jedoch liefern einige inäquivalente Darstellungen der  $GL(2, K)$  durch Einschränkung äquivalente Darstellungen der  $SL(2, K)$ , und gewisse irreduzible Darstellungen der  $GL(2, K)$  zerfallen bei Einschränkung in mehrere irreduzible Bestandteile. Diese Phänomene werden im folgenden beschrieben werden. Wir übernehmen die Bezeichnungen des vorherigen Abschnitts und setzen ferner  $S := SL(2, K)$ . Eine Zerlegung von  $G$  in ein semidirektes Produkt, die immer wieder Verwendung finden wird, ist die folgende:

$$G = A \rtimes S = S \ltimes A.$$

**Bemerkung:** Ist  $\text{char}(K) = 2$ , so ist

$$G = Z \times S,$$

da in diesem Fall (und nur im diesem Fall)  $K^\times$  eine ungerade Ordnung hat, und daher jedes Element von  $K^\times$  ein Quadrat in  $K^\times$  ist. Aus dieser Zerlegung folgt aber, daß jede irreduzible Darstellung von  $S$  die Einschränkung einer irreduziblen Darstellung von  $G$  ist. Es bleibt also nichts weiter zu untersuchen.

Im Verlaufe dieses Abschnitts werden wir auf Ausdrücke der Form

$$\tau(\mu_1, \psi) := \sum_{a \in K^\times} \psi(a)\mu(a)$$

stoßen, wobei  $\mu_1$  ein Charakter von  $K^\times$  ist. Es handelt sich hierbei um *Gauß'sche Summen*. Für eine Gauß'sche Summe  $\tau(\mu_1, \psi)$  gilt die Gleichung

$$|\tau(\mu_1, \psi)|^2 = q. \quad (1.1)$$

Wir werden im weiteren  $\tau(\mu_1) := \tau(\mu_1, \psi)$  setzen, wobei  $\psi$  der fest gewählte Charakter von  $K^+$  ist. Ist  $\mu_1$  speziell der quadratische Charakter von  $K^\times$ , so verwenden wir auch die Bezeichnung  $\tau := \tau(\mu_1)$ . In dieser Situation kann man die Gleichung 1.1 noch präzisieren; es gilt nämlich

$$\tau^2 = \mu_1(-1)q. \quad (1.2)$$

Beweise für diese Aussagen über Gauß'sche Summen endlicher Körper sowie weitere Eigenschaften sind z.B. bei [Sma91, Seiten 120ff] zu finden.

#### 1.3.1 Die Konjugationsklassen der $SL(2, K)$

Bei der Bestimmung der Konjugationsklassen von  $S$  können wir von denen von  $G$  ausgehen. Weil  $S \subseteq G$  ist, gilt auch  $\sigma^S \subseteq \sigma^G$  für  $\sigma \in G$ . Außerdem ist  $\sigma^G \subseteq S$ , falls  $\sigma \in S$ , weil die Determinante invariant unter der Konjugation ist. Es genügt also, für die ausgewählten Repräsentanten  $\sigma$  der Konjugationsklassen von  $G$  mit  $\sigma \in S$  eine Zerlegung  $\sigma^G = \bigcup_{i=1}^k \sigma_i^S$  mit  $k \geq 1$ ,  $\sigma_i \in S$ ,  $i = 1, \dots, k$  zu finden. Erinnern wir uns dafür daran, daß  $\varepsilon$  einen Erzeuger von  $K^\times$  bezeichnet.

- $c_1(a), a^2 = 1$ : Es gilt

$$c_1(a) = \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^G = \left\{ \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right) \right\} = \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^S.$$

- $c_2(a), a^2 = 1$ :

Sei  $\sigma \in c_2(a)$ . Dann existiert  $\xi \in G$ , so daß  $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \xi^{-1}\sigma\xi$ . Weil  $G = S \rtimes A$  gilt, gibt es  $\eta \in S$  und  $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$  mit  $\xi = \eta \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Also ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta^{-1}\sigma\eta \in \sigma^S.$$

Es bleibt zu untersuchen, für welche  $b, c \in K^\times$  die Gleichheit  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^S = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}^S$  erfüllt ist. Durch den Ansatz  $\theta^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$  mit  $\theta \in S$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \exists \theta \in S : \theta^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \theta &= \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ \iff \exists d' \in K^\times : d'^2 b &= c \\ \iff bc &\in (K^\times)^2. \end{aligned}$$

Somit ist  $\sigma$  konjugiert zu  $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , falls  $b \in (K^\times)^2$ , und zu  $\begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , falls  $b \in \varepsilon(K^\times)^2$ . Wir setzen nun für  $a \in K^\times, a^2 = 1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^S &=: c_2(a, 1) \quad \text{und} \\ \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}^S &=: c_2(a, \varepsilon). \end{aligned}$$

- $c_3(a, a^{-1}), a \in K^\times$ :

Ist  $\sigma \in c_3(a, a^{-1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^G$ , so existiert wie eben ein  $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$ , so daß

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \sigma^S.$$

Daher ist  $c_3(a, a^{-1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^S$ .

- $c_4(\alpha), \alpha \in L \setminus K, N\alpha = 1$ :

Nach Lemma 1.13 besteht der Zentralisator von  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$  in  $S$  aus denjenigen Elementen der enthaltenden Cartan-Untergruppe, deren Determinante 1 ist. Diese entsprechen aber genau den Elementen von  $L$ , deren Norm 1 beträgt. Folglich gilt

$$\# \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}^S \right) = [S : Z_S \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix} \right)] = \frac{(q^2 - 1)q}{q + 1} = q^2 - q = \#(c_4(\alpha)),$$

und es folgt  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}^S = c_4(\alpha)$ .

Fassen wir die hieraus resultierenden Ergebnisse wieder in einer Tabelle zusammen:

Klassentyp	Anzahl der Klassen	Elemente in der Klasse
$c_1(a), a \in K^\times, a^2 = 1$	2	1
$c_2(a, 1), a \in K^\times, a^2 = 1$	2	$\frac{q^2-1}{2}$
$c_2(a, \varepsilon), a \in K^\times, a^2 = 1$	2	$\frac{q^2-1}{2}$
$c_3(a, a^{-1}), a \in K^\times, a \neq a^{-1}$	$\frac{(q-3)}{2}$	$q^2 + q$
$c_4(\alpha), \alpha \in L \setminus K, N\alpha = 1$	$\frac{q-1}{2}$	$q^2 - q$

### 1.3.2 Einschränkung der Darstellungen von $G$ auf $S$

Die irreduziblen Darstellungen von  $G$  ließen sich in vier Typen gliedern, die sich jeweils in der Dimension unterscheiden. Wir werden das Verhalten der Darstellungen der vier Typen bei Einschränkung auf  $S$  nacheinander beschreiben.

- Darstellungen der Form  $\mu_1 \circ \det$ :

Bei Einschränkung auf  $S$  liefern nach Definition von  $S$  alle Darstellungen dieses Typs die triviale Darstellung.

- Darstellungen der Form  $\rho_{(\mu_1, 1)}$ :

Für das Skalarprodukt des zugehörigen Charakters  $\chi := \chi_{(\mu_1, 1)}$  gilt

$$\langle \text{Res}_S^G \chi, \text{Res}_S^G \chi \rangle_S = 1,$$

wie man leicht nachrechnen kann. Also ist die Einschränkung  $\text{Res}_S^G \rho_{(\mu_1, 1)}$  irreduzibel. Anhand der Charaktertafel von  $G$  sieht man, daß wieder alle Einschränkungen von Darstellungen dieses Typs zueinander äquivalent, also insbesondere äquivalent zu  $\text{Res}_S^G \rho_{(1, 1)}$  sind. Wir bezeichnen  $\text{Res}_S^G \rho_{(1, 1)}$  mit  $\rho_{(1)}$ .

- $(q+1)$ -dimensionale Darstellungen der Form  $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ ,  $\mu_2 \neq 1$ :

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: Ist  $\mu_2^2 \neq 1$ , so ist  $\text{Res}_S^G \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$  irreduzibel. Da die Werte des zugehörigen Charakters auf  $S$  nur von  $\mu_2$  abhängen und sich für  $\mu_2$  und  $\mu_2^{-1}$  äquivalente Darstellungen ergeben, erhalten wir  $\frac{q-3}{2}$  Darstellungen dieses Typs. Wir bezeichnen sie mit  $\rho_{\mu_2}$ .

Gilt jedoch  $\mu_2^2 = 1$ , dann ist  $\mu_2$  der quadratische Charakter auf  $K^\times$ , und folglich ist  $\mu_2(a) = \mu_2(a^{-1})$ . Die Charaktertafel von  $G$  liefert

$$\langle \text{Res}_S^G \chi_{(\mu_1, \mu_2)}, \text{Res}_S^G \chi_{(\mu_1, \mu_2)} \rangle_S = 2,$$

d.h.  $\text{Res}_S^G \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$  zerfällt in zwei irreduzible Komponenten. Um diese zu beschreiben, verwenden wir die Basis  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{F}^1(K)}$  von Seite 15. Nach den dort ermittelten

Ergebnissen operiert  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B \cap S$  auf dieser Basis durch

$$\begin{aligned} \sigma f_\infty &= \mu_2(a) f_\infty \\ \sigma f_{a'} &= \mu_2(a) \psi \left( \frac{a'b}{a} \right) f_{\frac{a'}{a^2}} \quad \forall a' \in K, \end{aligned}$$

und  $w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  operiert durch

$$w' f_\infty = \frac{1}{q} \sum_{a \in K} f_a$$

$$w' f_{a'} = \mu_2(-1) f_\infty + \frac{1}{q} \sum_{a \in K} \sum_{b \in K^\times} \psi(ab + \frac{a'}{b}) \mu_2(b) f_a \quad \forall a' \in K.$$

Der folgende Satz beschreibt nun die Zerlegung in  $S$ -irreduzible Unterräume.

**Satz 1.16** *Es sei  $V$  der Darstellungsraum von  $\text{Res}_S^G \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ , wobei  $\mu_1$  ein beliebiger Charakter von  $K^\times$  und  $\mu_2$  der quadratische Charakter auf  $K^\times$  ist. Dann gilt*

$$V = V^+ \oplus V^-,$$

wobei  $V^+$  die Basis  $\{f_a\}_{a \in (K^\times)^2} \cup \{\mu_2(-1) f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0\}$   
und  $V^-$  die Basis  $\{f_a\}_{a \in \varepsilon(K^\times)^2} \cup \{\mu_2(-1) f_\infty - \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0\}$   
besitzt, und  $V^+$  und  $V^-$   $S$ -stabil sind.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma:

**Lemma 1.17** *Es seien  $a, b \in K^\times$  mit  $ab \notin (K^\times)^2$ . Dann gilt*

$$A := \sum_{c \in K^\times} \psi(ac + \frac{b}{c}) \mu_2(c) = 0.$$

**Beweis:** Es ist

$$\begin{aligned} A &= \sum_{c \in K^\times} \psi(ac + \frac{b}{c}) \mu_2(c) \stackrel{c' = \frac{b}{ac}}{=} \sum_{c' \in K^\times} \psi(\frac{b}{c'} + ac') \mu_2(\frac{b}{ac'}) \\ &= \underbrace{\mu_2(\frac{b}{a})}_{=-1} \sum_{c' \in K^\times} \psi(ac' + \frac{b}{c'}) \mu_2(c') = -A. \end{aligned}$$

Also ist  $A = 0$ . □

**Beweis des Satzes:** Nach Konstruktion von  $V^+$  und  $V^-$  ist  $V = V^+ \oplus V^-$  als Vektorraum. Es bleibt zu zeigen, daß  $V^+$  und  $V^-$   $S$ -stabil sind. Es genügt dafür zu prüfen, ob  $\sigma f \in V^+$  (bzw.  $V^-$ ) für jeden Basisvektor  $f$  von  $V^+$  (bzw.  $V^-$ ) und  $\sigma \in B \cap S$  oder  $\sigma = w'$ .

(i) Sei  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B \cap S$ .

Ist  $f = f_{a'}$ ,  $a' \in (K^\times)^2$ , so ist

$$\sigma f = \mu_2(a) \psi(\frac{a'b}{a}) f_{\frac{a'}{a^2}} \in V^+,$$

da  $\frac{a'}{a^2} \in (K^\times)^2$ .

Ist  $f = \mu_2(-1) f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0$ , so ist

$$\sigma f = \mu_2(-1) \mu_2(a) f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} \mu_2(a) f_0 = \mu_2(a) f \in V^+.$$



(ii) Sei  $\sigma = w'$ .

Ist  $f = f_a, a \in (K^\times)^2$ , so ist

$$\begin{aligned}
\sigma f &= \mu_2(-1)f_\infty + \frac{1}{q} \sum_{a' \in K} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b + \frac{a}{b}) \mu_2(b) f_{a'} \\
&= \mu_2(-1)f_\infty + \frac{1}{q} \sum_{b \in K^\times} \psi(\frac{a}{b}) \mu_2(b) f_0 \\
&\quad + \frac{1}{q} \sum_{a' \in K^\times} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b + \frac{a}{b}) \mu_2(b) f_{a'} \\
&\stackrel{\text{Lemma 1.17}}{=} \underbrace{\mu_2(-1)f_\infty + \frac{1}{q} \overbrace{\mu_2(a)}^{=1} \tau(\mu_2) f_0}_{\in V^+} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{q} \sum_{a' \in (K^\times)^2} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b + \frac{a}{b}) \mu_2(b) f_{a'}}_{\in V^+} \\
&\in V^+.
\end{aligned}$$

Ist schließlich  $f = \mu_2(-1)f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sigma f &= \frac{\mu_2(-1)}{q} \sum_{a \in K} f_a \\
&\quad + \frac{\tau(\mu_2)}{q} \left( \mu_2(-1)f_\infty + \frac{1}{q} \sum_{a' \in K} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b) \mu_2(b) f_{a'} \right) \\
&= \frac{\tau(\mu_2)}{q} \mu_2(-1) f_\infty + \left( \frac{\mu_2(-1)}{q} + \frac{\tau(\mu_2)}{q^2} \underbrace{\sum_{b \in K^\times} \mu_2(b)}_{=0} \right) f_0 \\
&\quad + \sum_{a' \in K^\times} \left( \frac{\mu_2(-1)}{q} + \frac{\tau(\mu_2)}{q^2} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b) \mu_2(b) \right) f_{a'} \\
&\stackrel{(1,2)}{=} \frac{\tau(\mu_2)}{q} (\mu_2(-1) f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0) \\
&\quad + \sum_{a' \in K^\times} \left( \frac{\mu_2(-1)}{q} + \mu_2(a') \frac{\tau(\mu_2)^2}{q^2} \right) f_{a'} \\
&\stackrel{(1,2)}{=} \frac{\tau(\mu_2)}{q} f + \sum_{a' \in K^\times} \frac{\mu_2(-1)}{q} \underbrace{(1 + \mu_2(a'))}_{=0, \text{ falls } a' \in \varepsilon(K^\times)^2} f_{a'} \\
&\in V^+.
\end{aligned}$$

Also ist  $V^+$   $S$ -stabil. Ganz analog zeigt man die Aussage für  $V^-$ .  $\square$

Wir bezeichnen die Darstellungen mit den Darstellungsräumen  $V^+$  und  $V^-$  als  $\rho_{\mu_2}^+$  bzw.  $\rho_{\mu_2}^-$ . Die Werte der zugehörigen Charaktere  $\chi_{\mu_2}^+$  und  $\chi_{\mu_2}^-$  kann man der Charaktertafel entnehmen.

• Es bleiben noch die  $(q-1)$ -dimensionalen Darstellungen der Form  $\rho_\nu, \nu \neq \bar{\nu}$  auf ihr Verhalten unter der Einschränkung zu untersuchen. Auch bei den Darstellungen

dieses Typs sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wir setzen zunächst

$$[N = 1] := \{\alpha \in L : N\alpha = 1\}.$$

Gilt  $\nu^2|_{[N=1]} \neq 1$ , so stellt man fest, daß  $\text{Res}_S^G \rho_\nu$  irreduzibel ist. Da je zwei Darstellungen zu Charakteren von  $[N = 1]$  mit  $\nu^2 \neq 1$  zueinander äquivalent sind, gibt es  $\frac{\#([N=1]) - 2}{2} = \frac{q-1}{2}$  irreduzible Darstellungen der Dimension  $q - 1$  von  $S$ . Ist dagegen  $\nu^2|_{[N=1]} = 1$ , so erhält man  $\langle \text{Res}_S^G \chi_\nu, \text{Res}_S^G \chi_\nu \rangle_S = 2$ , so daß die Darstellung  $\text{Res}_S^G \rho_\nu$  in zwei irreduzible Bestandteile zerfallen muß. Wir beschreiben diese mit Hilfe der auf Seite 18 gegebenen Basis. Man beachte, daß  $\nu|_{[N=1]}$  im zweiten Fall der quadratische Charakter auf  $[N = 1]$  sein muß, denn wäre schon  $\nu|_{[N=1]}$  trivial, so wäre  $\nu$  zerlegbar.

**Satz 1.18** *Es sei  $W$  der Darstellungsraum von  $\text{Res}_S^G \rho_\nu$  mit der Basis  $\{h_a\}_{a \in K^\times}$ ,  $\nu|_{[N=1]}$  der quadratische Charakter auf  $C$ . Dann ist die Zerlegung*

$$W = W^+ \oplus W^-,$$

wobei  $W^+$  die Basis  $\{h_a\}_{a \in (K^\times)^2}$  und  $W^-$  die Basis  $\{h_a\}_{a \in \varepsilon(K^\times)}$  besitzt, eine Zerlegung in  $S$ -stabile Unterräume.

Wir benötigen zwei Lemmata für den Beweis:

**Lemma 1.19** *Es sei  $\alpha \in [N = 1] \setminus [N = 1]^2$ . Dann existiert ein  $\beta \in L$ , so daß*

$$\alpha = \frac{\bar{\beta}}{\beta} \text{ und } N\beta = \varepsilon.$$

*Insbesondere gibt es für ein erzeugendes Element  $\xi$  von  $[N = 1]$  ein  $\eta \in L^\times$  mit  $\xi = \frac{\bar{\eta}}{\eta}$  und  $N\eta = \varepsilon$ .*

**Beweis:** [Tan67, Lemma 2] □

**Lemma 1.20** *Es sei  $a \in K^\times$ ,  $\nu$  ein Charakter auf  $L^\times$ , dessen Einschränkung auf  $[N = 1]$  gerade den quadratischen Charakter auf  $[N = 1]$  liefert, und  $\xi$  ein erzeugendes Element von  $[N = 1]$ . Weiter sei  $\eta$  das gemäß Lemma 1.19 zu  $\xi$  gewählte Element von  $L^\times$ . Dann gilt*

$$B := \sum_{t \in [N=1]} \psi(a(\eta t + \bar{\eta}t))\nu(t) = 0.$$

**Beweis:** Es ist

$$\begin{aligned} B &= \sum_{t \in [N=1]} \psi(a(\eta t + \bar{\eta}t))\nu(t) \\ &\stackrel{t=\xi s}{=} \sum_{s \in [N=1]} \psi(a(\bar{\eta}s + \eta s)) \underbrace{\nu(\xi)}_{=-1} \underbrace{\nu(s^{-1})}_{=\nu(s)} = -B, \end{aligned}$$

also  $B = 0$ . □

**Beweis des Satzes:** Es sei  $a \in K^\times$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B \cap S$ . Es ist

$$\sigma h_{a'} = \nu(a^{-1})\psi\left(\frac{a'b}{a}\right)h_{\frac{a'}{a^2}}.$$

Weil  $\frac{a'}{a^2} \in (K^\times)^2$  genau dann, wenn  $a' \in (K^\times)^2$ , ist auch  $\sigma h_{a'} \in W^+$  (bzw.  $\sigma h_{a'} \in W^-$ ) genau dann, wenn  $h_{a'} \in W^+$  (bzw.  $h_{a'} \in W^-$ ).

Sei nun  $\sigma = w'$ . Wir wissen, daß

$$\sigma h_{a'} = \sum_{b' \in K^\times} \nu(a'^{-1}) j(a'b') h_{b'}$$

gilt. Es ist zu zeigen, daß  $j(a'b') = 0$  erfüllt ist, falls  $a'b' \in \epsilon(K^\times)^2$ .

Sei also  $a'b' = c'^2 \epsilon$ ,  $c' \in K^\times$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} j(a'b') &= -\frac{1}{q} \sum_{\substack{\alpha \in L^\times \\ N\alpha = a'b'}} \psi(\alpha + \bar{\alpha}) \nu(\alpha) \\ &\stackrel{Nc' = c'^2}{=} -\frac{1}{q} \sum_{t \in [N=1]} \psi(c'(\eta t + \bar{\eta} t)) \nu(c' \eta t) \\ &= -\frac{\nu(c' \eta)}{q} \sum_{t \in [N=1]} \psi(c'(\eta t + \bar{\eta} t)) \nu(t) \end{aligned}$$

Lemma 1.20  $\underline{=}$  0.

Somit ist  $w' h_{a'} \in W^+$  (bzw.  $\in W^-$ ), schon wenn  $h_{a'} \in W^+$  (bzw.  $\in W^-$ ). Insgesamt ergibt sich, daß  $W^+$  und  $W^-$   $S$ -invariant sind.  $\square$

Die zugehörigen Darstellungen werden mit  $\rho_\nu^+$  und  $\rho_\nu^-$  bezeichnet.

### Die Charaktertafel von $S$ für ungerades $q$

(vgl. [Tan67, Seite 83, Tabelle 2] oder [Dor71, Seite 228])

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & \epsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$
$1_S$	1	1	1	1	1
$\chi(1)$	$q$	0	0	1	-1
$\chi_{\mu_2}, \mu_2^2 \neq 1$	$(q+1)\mu_2(a)$	$\mu_2(a)$	$\mu_2(a)$	$\mu_2(a) + \mu_2(a^{-1})$	0
$\chi_{\mu_2}^\pm, \mu_2 \neq 1$ $\mu_2^2 = 1$	$\frac{q+1}{2}\mu_2(a)$	$\frac{\mu_2(a) \pm \tau}{2}$	$\frac{\mu_2(a) \mp \tau}{2}$	$\mu_2(a)$	0
$\chi_\nu, \nu^2 _{[N=1]} \neq 1$	$(q-1)\nu(a)$	$-\nu(a)$	$-\nu(a)$	0	$-(\nu(\alpha) + \nu(\bar{\alpha}))$
$\chi_\nu^\pm, \nu _{[N=1]} \neq 1$ $\nu^2 _{[N=1]} = 1$	$\frac{q-1}{2}\nu(a)$	$-\nu(a) \frac{1 \mp \tau}{2}$	$-\nu(a) \frac{1 \pm \tau}{2}$	0	$-\nu(\alpha)$

## Kapitel 2

# Grundlagen aus der Graphentheorie

In diesem Kapitel werden die notwendigen graphentheoretischen Begriffe eingeführt sowie einige später benötigte Sachverhalte zitiert. Die zugehörigen Beweise sind bei [Ser80] zu finden.

### 2.1 Graphen

**Definition 2.1** Ein Graph  $X$  besteht aus zwei disjunkten Mengen  $V(X)$  und  $E(X)$  zusammen mit einer Inzidenzabbildung

$$E(X) \rightarrow V(X) \times V(X) \quad , \quad e \mapsto (o(e), t(e))$$

und einer Inversionsabbildung

$$E(X) \rightarrow E(X) \quad , \quad e \mapsto \bar{e},$$

die für alle  $e \in E(X)$  die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i)  $\bar{\bar{e}} = e$ ,
- (ii)  $\bar{e} \neq e$ ,
- (iii)  $t(e) = o(\bar{e})$ .

Wir nennen ein Element  $v \in V(X)$  einen *Knoten* von  $X$ ,  $e \in E(X)$  eine (*orientierte*) *Kante* und  $\bar{e}$  die zu  $e$  *inverse Kante*. Der Knoten  $o(e)$  wird als *Startknoten* von  $e$ ,  $t(e)$  als *Zielknoten* von  $e$  bezeichnet.  $o(e)$  und  $t(e)$  heißen auch *Endknoten* von  $e$ . Zwei Knoten  $v_1$  und  $v_2$  sind *benachbart* oder *adjazent*, falls sie Endknoten derselben Kante  $e$  sind.

**Definition 2.2** Ein Morphismus  $m : X \rightarrow Y$  von Graphen  $X$  und  $Y$  besteht aus einem Paar von Abbildungen

$$m_V : V(X) \rightarrow V(Y), \quad m_E : E(X) \rightarrow E(Y),$$

für die gilt:

- (i)  $\forall e \in E(X) : m_V(o(e)) = o(m_V(e))$ ,
- (ii)  $\forall e \in E(X) : \overline{m_E(e)} = m_E(\bar{e})$ .

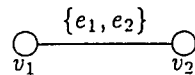
Ein Morphismus heißt *injektiv* (*surjektiv*, ...) falls  $m_V$  und  $m_E$  injektiv (surjektiv, ...) sind, und er heißt *Automorphismus*, falls er ein bijektiver Morphismus eines Graphen auf sich selbst ist. Mit  $Aut(X)$  bezeichnen wir die Automorphismengruppe des Graphen  $X$ .

**Definition 2.3** Eine Orientierung eines Graphen  $X$  ist eine Teilmenge  $E_+(X)$ , so daß  $E(X) = E_+(X) \cup \overline{E_+(X)}$  und  $E_+(X) \cap \overline{E_+(X)} = \emptyset$  ist.

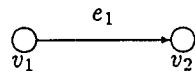
Eine solche Orientierung existiert immer. Will man einen orientierten Graphen beschreiben, so genügt es,  $V(X)$ ,  $E_+(X)$  und eine Abbildung  $E_+(X) \rightarrow V(X) \times V(X)$  anzugeben.

Um einen Graphen in Form eines Diagramms darzustellen, werden Knoten durch Kreise und Paare von Kanten  $\{e, \bar{e}\} \subset E(X)$  durch Verbindungslinien zwischen ihren Endknoten repräsentiert. Ist eine Orientierung des Graphen gegeben, so deutet ein Pfeil an, welches Element der Menge  $\{e, \bar{e}\}$  zu  $E_+(X)$  gehört.

**Beispiel:** Der Graph  $X$  mit der Knotenmenge  $V(X) = \{v_1, v_2\}$  und der Kantenmenge  $E(X) = \{e_1, e_2\}$  mit  $o(e_1) \neq t(e_1)$  wird repräsentiert durch das Bild:



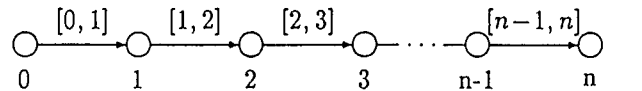
Wählt man  $E_+(X) = \{e_1\}$ , so repräsentiert



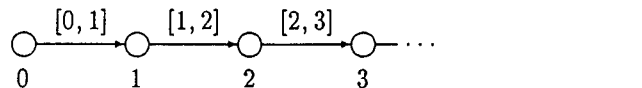
den Graphen mit derselben Knoten- und Kantenmenge.

Auf naheliegende Weise ist ein *Untergraph* eines Graphen definiert. Einige spezielle Graphen, die besonders als Untergraphen anderer Graphen Bedeutung haben, sind die folgenden:

- $Pfad_n$  ist der orientierte Graph



- $Pfad_\infty$  ist der orientierte Graph



- $Kreis_n$  ist der orientierte Graph

