

Operationen arithmetischer
Untergruppen von $GL(3)$ auf
Bruhat-Tits-Gebäuden

Diplomarbeit
Max Gebhardt

Saarbrücken, Dezember 1996
Fachbereich 9, Mathematik

Ich erkläre hiermit an Eides statt, diese Arbeit selbständig geschrieben und keine Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	2
1	Grundlagen aus der algebraischen Topologie	5
1.1	Die Homologietheorie abstrakter Simplicialkomplexe	7
2	Das Bruhat-Tits-Gebäude	14
2.1	Die Definition des Bruhat-Tits-Gebäudes	15
2.2	Die Operation von $GL(\mathcal{K})$ auf \mathcal{B}	21
2.3	Die Operation der $GL^0(\mathcal{K})$ auf \mathcal{B}	25
2.4	\mathcal{B} als Gebäude	34
3	Der Fundamentalbereich zu Γ	36
4	Der Quotient $\Gamma(n) \backslash \mathcal{B}$	48
4.1	Seitenkomplexe	49
4.2	\mathcal{B} als Seitenkomplex	52
4.3	Der Quotient $\mathcal{B}(n)$	54
5	Grundlagen aus der Darstellungstheorie	67
6	Die Charaktere der Darstellungen auf $\mathcal{B}_{d-1}(n)$	70
6.1	Simplicialkomplexe und Darstellungen	70
6.2	Die Charaktere auf $\mathcal{B}_k(n)$	72
7	Die Konjugationsklassen der $GL(3, \mathbb{F}_n)$	83
8	Die Konjugationsklassen der Gruppe $G(n)$	92
9	Der Schnitt der $V^{G(n)}$ mit Untergruppen von $G(n)$.	107
9.1	Der Schnitt $V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)$	108
9.2	Der Schnitt $V^{G(n)} \cap \tilde{U}$	113
9.3	Der Schnitt $V^{G(n)} \cap \tilde{H}$	119
9.4	Die Funktion θ	128
	Symbolverzeichnis	138
	Literaturverzeichnis	142
	\mathcal{W} mit Fixgruppen	143

Kapitel 0

Einleitung

In seinem Buch “Trees” betrachtet Serre Operationen arithmetischer Untergruppen $\tilde{\Gamma}$ der $GL(2, \mathbb{F}_q[T])$ auf dem Bruhat-Tits-Baum X . Aus der Untersuchung der Quotienten $\tilde{\Gamma} \backslash X$ schließt er auf die Struktur der Gruppen selbst zurück.

Es liegt nahe, analoge Betrachtungen für die Gruppe $GL(3, \mathbb{F}_q[T])$ und ihre arithmetischen Untergruppen durchzuführen. Hierzu läßt man die Gruppe $GL(3, \mathbb{F}_q[T])$ nicht mehr auf dem Baum X (einem 1-dimensionalen Simplizialkomplex), sondern auf seiner zweidimensionalen Verallgemeinerung, dem Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B} , operieren. Die Untersuchung dieses Objekts erfordert Begriffe und Methoden aus der algebraischen Topologie, die im 1. Kapitel zusammengefaßt werden.

Im 2. Kapitel werden dann alle Aussagen zur Geometrie von \mathcal{B} bewiesen, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden.

Ein Fundamentalbereich \mathcal{W} zur Operation von $GL(3, \mathbb{F}_q[T])$ auf \mathcal{B} wird in Kapitel 3 bestimmt. Auf Seite 143 gebe ich einen Ausschnitt von \mathcal{W} mit den Fixgruppen der Simplizes an. Ich hoffe, daß dies zum besseren Verständnis meiner Argumente in den folgenden Kapiteln beiträgt.

Im 4. Kapitel gehen wir zu Untergruppen Γ' von $GL(3, \mathbb{F}_q[T])$ über. Dabei erweist es sich bereits als schwierig, den Begriff des Quotienten vom eindimensionalen Fall auf den zweidimensionalen zu verallgemeinern. Wie im eindimensionalen der Quotient nach einer Untergruppe im allgemeinen kein kombinatorischer Graph mehr ist, so ist im zweidimensionalen der Quotient kein Simplizialkomplex mehr. Daher führen wir “ad hoc” den Begriff des Seitenkomplexes ein, so daß wir einen “vernünftigen” Quotienten definieren können. Es zeigt sich, daß der Quotient aus der Überlagerung endlich vieler Kopien von \mathcal{W} entsteht.

Darauf wenden wir uns einer speziellen Untergruppe, der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{n})$ zu einem Polynom \mathfrak{n} aus $\mathbb{F}_q[T]$, zu. In diesem Fall können wir zeigen, daß der Quotient $\Gamma(\mathfrak{n}) \backslash \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathfrak{n})$ immer noch ein Simplizialkomplex ist. Daher haben wir nicht viel Energie in die Definition der Seitenkomplexe investiert. Will man Quotienten nach beliebigen Untergruppen genauer untersuchen, so wird sich der Begriff des Seitenkomplexes als zu allgemein erweisen. In diesem Fall sollte man den größeren technischen Aufwand nicht scheuen, und die Quotienten als semisimpliziale Komplexe auffassen.

Der Quotient $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ wird anschließend genauer untersucht. Es gelingt, seine Simplizes durch Rechtsnebenklassen der Gruppe $\Gamma / \Gamma(\mathfrak{n}) = G(\mathfrak{n})$ nach den Fixgruppen der Simplizes aus \mathcal{W} zu beschreiben. Weiter zeigt sich, daß die Homologie des unendlichen Simplizialkomplexes $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ mit der Homologie des endlichen Unterkomplexes $\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n})$ übereinstimmt.

Ab Kapitel 5 wenden wir uns Darstellungen der Gruppe $G(\mathfrak{n})$ zu. Wir werden sehen, daß die Gruppe $G(\mathfrak{n})$ auf $\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n})$ operiert. Diese Operation erzeugt eine

Permutationsdarstellung der Gruppe $G(n)$ auf dem von den orientierten i -Simplizes erzeugten \mathbb{C} -Vektorraum. Da diese Operation eine Operation auf den Homologiegruppen von $\mathcal{B}(n)$ induziert, erhalten wir ebenfalls Darstellungen von $G(n)$ auf den von Elementen aus $H_i(\mathcal{B}(n))$ erzeugten \mathbb{C} -Vektorräumen. Unser Interesse ist dann, die Charaktere dieser Darstellungen zu berechnen. Formel 6.3 liefert uns einen Zusammenhang zwischen diesen Charakteren, und die Formeln 6.6 und 6.10 ermöglichen, zumindest die alternierende Summe der Charaktere zu ermitteln. Die in Formel 6.6 auftretenden Faktoren werden für den Fall eines primen n in den Kapiteln 7, 8 und 9 ermittelt und am Ende des jeweiligen Kapitels in Tabellen zusammengefaßt. Insbesondere erlauben uns die obigen Formeln, die Eulercharakteristik des Simplicialkomplexes $\mathcal{B}_{d-1}(n)$ für ein primes n in geschlossener Form (vgl. Korollar 6.12) anzugeben.

Da $\mathcal{B}_{d-1}(n)$ wegzusammenhängend ist, ist die 0-te Homologiegruppe isomorph zu \mathbb{Z} . Daher hat der zugehörige Charakter immer den Wert eins.

Würde die erste Homologie des Quotienten $\mathcal{B}_{d-1}(n)$ verschwinden, so könnten wir mit obigen Formeln für primes n den Charakter der Darstellung auf der zweiten Homologie explizit berechnen. Leider ist es mir nicht gelungen, dieses Verschwinden zu beweisen. Immerhin liefern uns die Charaktere einen Test, der im Erfolgsfall zeigt, daß die erste Homologie nicht verschwindet (vgl S.82).

Herrn Prof. Dr. E.-U. Gekeler gilt mein Dank für das interessante Thema und die sehr intensive Betreuung. Ich möchte auch Herrn Dr. A. Schweizer danken, der mir jederzeit für Fragen zur Verfügung stand. Ich danke Frau Dipl.Math. I. Rust, die viel Zeit investiert hat, um diese Arbeit Korrektur zu lesen. Schließlich möchte ich neben den oben genannten noch Frau Dipl.Math. R. Leitl, Herrn Dipl.Inf. O. Scheja und Herrn Bodo Wack für das gute Arbeitsklima am Lehrstuhl danken. Besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir immer den nötigen Rückhalt geboten haben. Ansonsten bedanke ich mich bei allen, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben.

Kapitel 1

Grundlagen aus der algebraischen Topologie

In diesem Kapitel werden die später benötigten Sachverhalte aus der algebraischen Topologie zusammengefaßt.

Definition 1.1 Ein Simplizialkomplex \mathcal{D} besteht aus einer nichtleeren Menge $V(\mathcal{D})$ und einer Menge $S(\mathcal{D})$ von endlichen, nichtleeren Teilmengen von $V(\mathcal{D})$, so daß

- 1) $\{v\} \in S(\mathcal{D}) \iff v \in V(\mathcal{D})$,
- 2) für alle Mengen \mathcal{S} in $S(\mathcal{D})$ liegt jede nichtleere Teilmenge von \mathcal{S} in $S(\mathcal{D})$.

Die Elemente aus $V(\mathcal{D})$ heißen Knoten, die Elemente aus $S(\mathcal{D})$ heißen Simplizes.

Ein Simplizialkomplex \mathcal{D} heißt endlich, falls $S(\mathcal{D})$ endlich ist, ansonsten unendlich. Statt $\mathcal{S} \in S(\mathcal{D})$ schreibt man einfacher $\mathcal{S} \in \mathcal{D}$.

Definition 1.2 Sei \mathcal{D} ein Simplizialkomplex, \mathcal{S} ein Simplex aus \mathcal{D} . Dann wird die Dimension von \mathcal{S} als

$$\dim(\mathcal{S}) := |\mathcal{S}| - 1$$

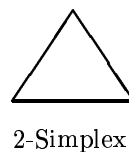
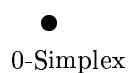
und die Dimension von \mathcal{D} als

$$\dim(\mathcal{D}) := \max\{\dim(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \in \mathcal{D}\}$$

definiert.

Ein Simplex der Dimension i wird i -Simplex genannt. Die Menge aller i -Simplizes eines Komplexes \mathcal{D} wird mit $S_i(\mathcal{D})$ bezeichnet. Falls $\hat{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$, dann wird $\hat{\mathcal{S}}$ eine Seite, oder genauer eine $(\dim \hat{\mathcal{S}})$ -Seite, von \mathcal{S} genannt. $\hat{\mathcal{S}}$ wird echte Seite von \mathcal{S} genannt (geschrieben $\hat{\mathcal{S}} < \mathcal{S}$), falls $\dim \hat{\mathcal{S}} < \dim \mathcal{S}$. Aus Bedingung 1 in Definition 1.1 folgt, daß $S_0(\mathcal{D})$ in Bijektion zu $V(\mathcal{D})$ steht. Daher wird üblicherweise ein 0-Simplex mit dem zugehörigen Knoten identifiziert.

Graphisch werden 0-Simplizes durch Punkte, 1-Simplizes durch Strecken und 2-Simplizes durch Dreiecke dargestellt.



Definition 1.3 Ein Simplizialkomplex $\bar{\mathcal{D}} = (\bar{V}, \bar{S})$ mit $\bar{V} \subseteq V$ und $\bar{S} \subseteq S$ heißt Unterkomplex von $\mathcal{D} = (V, S)$.

Definition 1.4 Sei $S \in \mathcal{D}$. Der Link von S in \mathcal{D} wird definiert als

$$\mathcal{LK}_{\mathcal{D}}(S) := \{t \in S(\mathcal{D}) \mid t \cup S \in S(\mathcal{D})\}.$$

Der Link eines Simplex $S \in \mathcal{D}$ ist immer ein Unterkomplex von \mathcal{D} .

Definition 1.5 Eine Folge von 1-Simplizes

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-2}, v_{n-1}\}, \{v_{n-1}, v_n\}$$

heißt ein Weg von v_0 nach v_n der Länge n in \mathcal{D} .

Ein Simplizialkomplex heißt wegzusammenhängend, falls es zu je zwei Knoten immer einen verbindenden Weg gibt.

Definition 1.6 Seien \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 Simplizialkomplexe. Eine simpliziale Abbildung

$$\varphi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$$

ist eine Abbildung von $V(\mathcal{D}_1)$ nach $V(\mathcal{D}_2)$, so daß für jeden Simplex S aus \mathcal{D}_1 das Bild $\varphi(S)$ ein Simplex aus \mathcal{D}_2 ist.

Definition 1.7 Zwei Simplizialkomplexe \mathcal{D} und \mathcal{E} heißen isomorph, falls eine Bijektion $\varphi : V(\mathcal{D}) \rightarrow V(\mathcal{E})$ mit der Eigenschaft

$$S \in S(\mathcal{D}) \Leftrightarrow \varphi(S) \in S(\mathcal{E})$$

existiert. Eine solche Abbildung ist immer simplizial.

Definition 1.8 Sei $S = \{v_0, \dots, v_n\}$ ein Simplex. Die Menge aller geordneten Tupel von Elementen aus S heißt die Ordnung von S , d.h.

$$\text{ord}(S) := \{(v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(n)}) \mid \pi \in S_{n+1}\}.$$

Analog definiert man für einen Simplizialkomplex \mathcal{D}

$$\text{ord}(\mathcal{D}) := \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \text{ord}(S).$$

Auf der Ordnung eines n -Simplex S operiert die Gruppe A_{n+1} der geraden Permutationen von $(n+1)$ -Elementen durch Vertauschen der Knoten.

Definition 1.9 Die Menge der Orientierungen eines n -Simplex S definiert man als

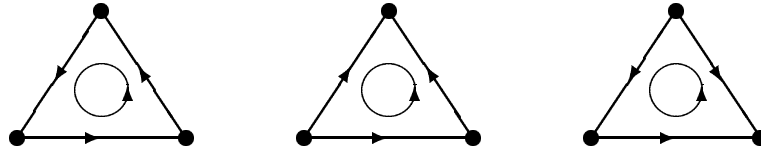
$$\text{or}(S) := A_{n+1} \setminus \text{ord}(S).$$

Ein 0-Simplex hat nur eine Orientierung. Jeder andere Simplex hat genau zwei Orientierungen.

Definition 1.10 Ein Simplizialkomplex \mathcal{D} heißt orientiert, falls jeder seiner Simplizes mit einer Orientierung versehen ist. Den orientierten Simplizialkomplex bezeichnen wir mit \mathcal{D}^{or} . Für jeden Simplex s aus \mathcal{D} bezeichnet dann s^+ die in \mathcal{D}^{or} enthaltene Orientierung von s und s^- die dazu negative Orientierung.

Bemerkung: Jeder Simplizialkomplex ist in diesem Sinne orientierbar. Dieser Begriff der Orientierbarkeit darf nicht mit der Orientierbarkeit einer Fläche verwechselt werden. Es besteht keine Beziehung zwischen der Orientierung eines Simplex und

der Orientierung seiner Seiten. Folgende Orientierungen sind z.B. erlaubt:



Definition 1.11 Sei G eine Gruppe, $\mathcal{D} = (V, S)$ ein Simplizialkomplex und G operiere von links auf V . Dann operiert G auf \mathcal{D} genau dann, wenn $S(\mathcal{D})$ unter der Verknüpfung

$$\tau \circ \{v_0, \dots, v_n\} := \{\tau \circ v_0, \dots, \tau \circ v_n\}$$

abgeschlossen ist.

1.1 Die Homologietheorie abstrakter Simplizialkomplexe

In diesem Abschnitt werden die für uns relevanten Definitionen und Sätze aus der Homologietheorie der abstrakten Simplizialkomplexe zusammengefaßt. Dabei orientiere ich mich an dem Buch von Spanier [Spa66]. Nicht ausgeführte Beweise sind dort zu finden.

Definition 1.12 Ein Kettenkomplex C ist eine durch die ganzen Zahlen indizierte Folge von abelschen Gruppen C_i (genannt i -te Kettengruppe) und Homomorphismen $\delta_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$, so daß die Komposition der triviale Homomorphismus ist, d.h. es ist

$$\delta_{i-1} \circ \delta_i = 0$$

für alle i aus \mathbb{Z} .

Ein Kettenkomplex wird häufig durch

$$\dots \xrightarrow{\delta_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{\delta_{i+1}} C_i \xrightarrow{\delta_i} C_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \dots$$

dargestellt. Die Elemente aus C_i heißen i -Ketten. Die Elemente aus $\text{Im}(\delta_{i+1}) \subset C_i$ werden als i -Ränder und die aus $\ker(\delta_i)$ werden als i -Zykel bezeichnet. Aus $\delta_i \circ \delta_{i+1} = 0$ folgt, daß $\text{Im}(\delta_{i+1})$ immer eine Untergruppe von $\ker(\delta_i)$ ist. Daher kann man folgendes definieren:

Definition 1.13 Sei $C = \{(C_i, \delta_i)\}$ ein Kettenkomplex. Dann heißt

$$H_i(C) := \ker(\delta_i) / \text{Im}(\delta_{i+1})$$

die i -te Homologiegruppe von C .

Um für Simplizialkomplexe eine Homologietheorie zu erhalten, müssen wir zu einem Simplizialkomplex einen Kettenkomplex definieren. Dies geschieht wie folgt: Sei \mathcal{D} ein Simplizialkomplex. Dann sei $C_i(\mathcal{D}) = 0$ für alle $i < 0$ und $C_0(\mathcal{D})$ sei die von den Elementen aus $S_0(\mathcal{D})$ erzeugte freie abelsche Gruppe. Für $i > 0$ sei $C_i(\mathcal{D})$ die von den orientierten Simplizes der Dimension i erzeugte abelsche Gruppe mit der Relation $s^+ + s^- = 0$. Dann ist $C_i(\mathcal{D})$ eine freie abelsche Gruppe, deren Rang mit der Anzahl der i -Simplizes im nicht orientierten Simplizialkomplex \mathcal{D} übereinstimmt.

Also kann man die Elemente von $C_i(\mathcal{D})$ als endliche Summen von orientierten i -Simplizes mit der Relation $s^- = -s^+$ auffassen.

Die Randabbildungen werden folgendermaßen definiert. Für $i < 1$ ist δ_i der Nullhomomorphismus. Im Fall $1 \leq i$ definieren wir

$$\delta_i : C_i(\mathcal{D}) \longrightarrow C_{i-1}(\mathcal{D})$$

wie folgt:

Sei $[s] = [v_0, \dots, v_i]$ ein orientierter Simplex. Dann ist

$$\delta_i([v_0, \dots, v_i]) := \sum_{j=0}^i (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i],$$

wobei $[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i]$ den orientierten $(i-1)$ -Simplex bezeichnet, den man durch Entfernen von v_i erhält. Durch lineare Fortsetzung wird δ_i auf ganz $C_i(\mathcal{D})$ definiert. Für die so definierten Abbildungen gilt dann immer

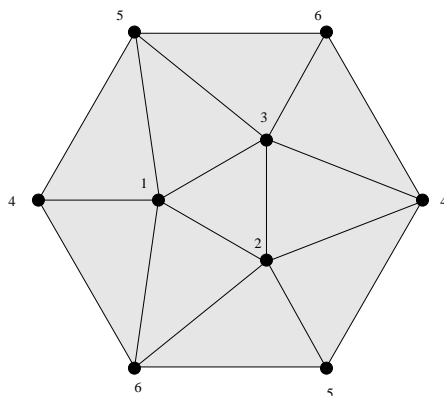
$$\delta_{i-1} \circ \delta_i = 0.$$

Insgesamt erhalten wir, daß $\{(C_i(\mathcal{D}), \delta_i)\}$ ein Kettenkomplex ist. Er wird als der Kettenkomplex von \mathcal{D} bezeichnet. Die i -te orientierte Homologiegruppe von \mathcal{D} wird dann als

$$H_i(\mathcal{D}) := \ker(\delta_i) / \text{Im}(\delta_{i+1})$$

definiert. Ein Simplicialkomplex ist genau dann wegzusammenhängend, wenn seine nullte Homologiegruppe isomorph zu \mathbb{Z} ist.

Obwohl die $C_i(\mathcal{D})$ freie abelsche Gruppen sind, sind die Homologiegruppen $H_i(\mathcal{D})$ i.a. nicht frei. Zum Beispiel ist für den Simplicialkomplex



$H_2(\mathcal{D})$ trivial, $H_0(\mathcal{D})$ isomorph zu \mathbb{Z} , und $H_1(\mathcal{D})$ ist das Erzeugnis der Klasse von $(4, 5) + (5, 6) + (6, 4)$. Man rechnet nach, daß $2((4, 5) + (5, 6) + (6, 4))$ der Rand der Summe aller zehn 2-Simplizes ist, wenn man diese im Uhrzeigersinn orientiert. Daher liegt $2((4, 5) + (5, 6) + (6, 4))$ in der Klasse der Null, und $H_1(\mathcal{D})$ ist isomorph zur Gruppe mit zwei Elementen.

Ich erinnere daran, daß das Tensorprodukt zweier abelschen Gruppen G, H wie folgt definiert ist: $G \otimes H$ ist die von den Symbolen $g \otimes h$ mit $g \in G$ und $h \in H$ mit den Relationen (für $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$)

$$\begin{aligned} (g_1 + g_2) \otimes h_1 &= g_1 \otimes h_1 + g_2 \otimes h_1 \\ g_1 \otimes (h_1 + h_2) &= g_1 \otimes h_1 + g_1 \otimes h_2 \end{aligned}$$

erzeugte abelsche Gruppe.
Zwei Homomorphismen

$$f_1 : G_1 \rightarrow H_1, \quad f_2 : G_2 \rightarrow H_2$$

induzieren einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} f_1 \otimes f_2 : G_1 \otimes G_2 &\rightarrow H_1 \otimes H_2 \\ g_1 \otimes g_2 &\mapsto f_1(g_1) \otimes f_2(g_2) \end{aligned}$$

Unter dem Rang ($rg(G)$) einer endlich erzeugten abelschen Gruppe G ist der Rang des torsionsfreien Anteils von G zu verstehen, d.h. der Rang ist die \mathbb{Q} -Dimension von $G \otimes \mathbb{Q}$. Für eine exakte Sequenz von endlich erzeugten abelschen Gruppen

$$F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H,$$

ist

$$F \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha \otimes id} G \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta \otimes id} H \otimes \mathbb{Q}$$

eine exakte Sequenz von \mathbb{Q} -Vektorräumen, wobei id die identische Abbildung auf \mathbb{Q} bezeichnet. Daraus folgt insbesondere für die i -te Kettengruppe eines endlichen Simplicialkomplexes \mathcal{D}

$$\begin{aligned} rg(C_i(\mathcal{D})) &= \dim_{\mathbb{Q}}(C_i(\mathcal{D}) \otimes \mathbb{Q}) \\ &= \dim_{\mathbb{Q}}((\ker(\delta_i) \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\text{Im}(\delta_i) \otimes \mathbb{Q})) \\ &= \dim_{\mathbb{Q}}(\ker(\delta_i) \otimes \mathbb{Q}) + \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Im}(\delta_i) \otimes \mathbb{Q}) \\ &= rg(\ker(\delta_i)) + rg(\text{Im}(\delta_i)). \end{aligned}$$

Analog folgt aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Im}(\delta_{i+1}) \rightarrow \ker(\delta_i) \rightarrow H_i(\mathcal{D}) \rightarrow 0$$

die Gleichheit

$$rg(H_i(\mathcal{D})) = rg(\ker(\delta_i)) - rg(\text{Im}(\delta_{i+1})).$$

Definition 1.14 Sei \mathcal{D} ein n -dimensionaler endlicher Simplicialkomplex. Dann wird die Euler-Charakteristik von \mathcal{D} definiert als

$$\text{Eu}(\mathcal{D}) := \sum_{i=0}^n (-1)^i rg(C_i(\mathcal{D})).$$

Mit den beiden Formeln von oben erhalten wir durch Umordnen der endlichen Summe

$$\text{Eu}(\mathcal{D}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i rg(H_i(\mathcal{D})).$$

Andererseits haben wir uns bereits überlegt, daß der Rang von $C_i(\mathcal{D})$ mit der Anzahl der nichtorientierten i -Simplices übereinstimmt. Daher gilt auch

$$\text{Eu}(\mathcal{D}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i |\mathcal{S}_i(\mathcal{D})|.$$

Die Euler-Charakteristik liefert uns eine Möglichkeit, von der Anzahl der Simplices Rückschlüsse auf den Rang der Homologiegruppen zu ziehen. Insbesondere besitzen

zwei Simplizialkomplexe mit unterschiedlicher Euler-Charakteristik unterschiedliche Homologien.

Für einen endlichen Simplizialkomplex \mathcal{D} sind die oben definierten Kettengruppen $C_k(\mathcal{D})$ und Homologiegruppen $H_k(\mathcal{D})$ endlich erzeugte abelsche Gruppen. Um im Kapitel 6 zu einem solchen Simplizialkomplex Darstellungen zu definieren, muß der Koeffizientenbereich von \mathbb{Z} zu \mathbb{C} erweitert werden. Dazu ordnet man einem gegebenen Kettenkomplex $C = (C_k, \delta_k)$ den Kettenkomplex $C \otimes \mathbb{C} = (C_k \otimes \mathbb{C}, \delta_k \otimes 1)$ zu, wobei 1 die identische Abbildung auf \mathbb{C} bezeichnet. Für einen Simplizialkomplex \mathcal{D} ist die Gruppe $C_k(\mathcal{D}) \otimes \mathbb{C}$ ein \mathbb{C} -Vektorraum mit den positiv orientierten k -Simplizes von \mathcal{D} als Basis. Die k -te Homologiegruppe von \mathcal{D} mit Koeffizienten in \mathbb{C} definiert man als die k -te Homologiegruppe des Kettenkomplexes $C(\mathcal{D}) \otimes \mathbb{C}$. Sie wird mit $H_k(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ bezeichnet. Die $H_k(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ sind \mathbb{C} -Vektorräume, und es gilt

$$rg_{\mathbb{Z}}(H_k(\mathcal{D})) = \dim_{\mathbb{Q}}(H_k(\mathcal{D}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{C}}(H_k(\mathcal{D}) \otimes \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}}(H_k(\mathcal{D}, \mathbb{C})) .$$

Sei \mathcal{E} ein Unterkomplex von \mathcal{D} und $i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ die Einbettung. Dann liefert auch \mathcal{E} einen Kettenkomplex, und durch die Einbettung i werden für alle k injektive Homomorphismen

$$i^* : C_k(\mathcal{E}) \hookrightarrow C_k(\mathcal{D})$$

induziert. Daher liefert das simpliziale Paar $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ einen Kettenkomplex

$$\dots \xrightarrow{\delta_{k+2}^*} C_{k+1}(\mathcal{D}) / C_{k+1}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta_{k+1}^*} C_k(\mathcal{D}) / C_k(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta_k^*} C_{k-1}(\mathcal{D}) / C_{k-1}(\mathcal{E}) \rightarrow \dots .$$

Die k -te relative Homologiegruppe von $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ wird dann als

$$H_k(\mathcal{D}, \mathcal{E}) := \ker(\delta_k^*) / \text{Im}(\delta_{k+1}^*)$$

definiert. Wie man sieht, ist $H_k(\mathcal{D}, \emptyset) = H_k(\mathcal{D})$. Es existiert immer eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow H_k(\mathcal{E}) \rightarrow H_k(\mathcal{D}) \rightarrow H_k(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \dots ,$$

die als Homologiesequenz des Paares $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ bezeichnet wird [Spa66, S. 184]. Diese Sequenz wird uns nun ein Verfahren liefern, Simplizialkomplexe zu vereinfachen, ohne ihre Homologie zu ändern. Zur Herleitung folge ich dem Buch von Giblin [Gib77].

Definition 1.15 Sei \mathcal{D} ein Simplizialkomplex.

- (i) Ein Simplex s aus $S_k(\mathcal{D})$ heißt Hauptsimplex, falls kein $t \in S_{k+1}(\mathcal{D})$ existiert mit $s \subset t$.
- (ii) Ein Simplex $s \in S_k(\mathcal{D})$ heißt freie Seite von \mathcal{D} , falls genau ein $t \in S_{k+1}(\mathcal{D})$ existiert mit $s \subset t$.

Ein Simplex kann also höchstens dann eine freie Seite sein, falls er Seite eines Hauptsimplex ist.

Definition 1.16 Sei \mathcal{D} ein Simplizialkomplex mit einer freien Seite s und einem zugehörigen Hauptsimplex t . \mathcal{E} gehe aus \mathcal{D} hervor, indem man in \mathcal{D} die Simplizes s und t entfernt. Dann sagen wir \mathcal{E} geht durch einen elementaren Zusammenbruch aus \mathcal{D} hervor, und schreiben

$$\mathcal{D} \xrightarrow{1} \mathcal{E} .$$

Es gilt

Lemma 1.17 *Das eben definierte Objekt \mathcal{E} ist ein Unterkomplex von \mathcal{D} .*

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß \mathcal{E} ein Simplicialkomplex ist. Da t ein Hauptsimplex ist, ist t keine Teilmenge eines anderen Simplex in \mathcal{D} und sein Entfernen ändert nichts an der Gültigkeit der Bedingung zwei aus Definition 1.1. Die freie Seite s ist in \mathcal{D} nur Seite von t . Da t nicht in \mathcal{E} liegt, ist auch nach dem Entfernen von s Bedingung zwei für \mathcal{E} noch erfüllt. Zu Bedingung eins ist nur zu beachten, daß das Entfernen eines 0-Simplex bedeutet, daß das entsprechende Element auch aus $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ entfernt wird. Es ist klar, daß jeder Simplex aus \mathcal{E} auch in \mathcal{D} liegt und daher ist \mathcal{E} ein Unterkomplex von \mathcal{D} . \square

Der nächste Satz zeigt, warum man das Zusammenbrechen zur Berechnung der Homologie benutzen kann.

Satz 1.18 *Sei $\mathcal{D} \xrightarrow{1} \mathcal{E}$. Dann gilt für alle k aus \mathbb{Z}*

$$H_k(\mathcal{D}) \cong H_k(\mathcal{E}).$$

Beweis: Sei s die freie Seite von \mathcal{D} , die beim Zusammenbruch zu \mathcal{E} entfernt wird, und t sei der zugehörige Hauptsimplex. Die Dimension von s sei k . Dann ist $\dim(t) = k + 1$ und zwischen den Simplizes von \mathcal{D} und \mathcal{E} besteht folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(\mathcal{D}) &= \mathcal{S}_n(\mathcal{E}) && \text{für } n \neq k, k + 1, \\ \mathcal{S}_k(\mathcal{D}) &= \mathcal{S}_k(\mathcal{E}) \cup \{s\}, \\ \mathcal{S}_{k+1}(\mathcal{D}) &= \mathcal{S}_{k+1}(\mathcal{E}) \cup \{t\}. \end{aligned}$$

Wir werden nun zeigen, daß für alle n die relative Homologiegruppe $H_n(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ trivial ist. Dann ergibt sich die Aussage aus der Exaktheit der Homologiesequenz des Paares $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$. Im Fall $n \neq k, k + 1$ besitzen \mathcal{D} und \mathcal{E} die gleichen n -Simplizes, und daher ist

$$C_n(\mathcal{D}, \mathcal{E}) = C_n(\mathcal{D}) / C_n(\mathcal{E}) = 0.$$

Also hat der relative Kettenkomplex folgende Gestalt

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_{k+1}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\delta_{k+1}^*} C_k(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

und alle relativen Homologiegruppen ungleich k und $k + 1$ sind trivial. Seien nun s^+ und t^+ die ausgewählten Orientierungen der beiden Simplizes. Da s die einzige Seite von t ist, die nicht in \mathcal{E} vorkommt, ist

$$\delta_{k+1}^*(t^+ + C_{k+1}(\mathcal{E})) = \pm s^+ + C_k(\mathcal{E}) \neq C_k(\mathcal{E}).$$

Da sowohl $C_{k+1}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ als auch $C_k(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ den Rang eins haben, ist δ_{k+1}^* ein Isomorphismus. Daher sind auch $H_k(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ und $H_{k+1}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ gleich Null. Mit der Exaktheit der Homologiesequenz des Paares $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ ergibt sich die Aussage. \square

Da die Hintereinanderausführung von Isomorphismen wieder einen Isomorphismus liefert, gilt folgender Satz:

Satz 1.19 *Sei*

$$\mathcal{D}_0 \xrightarrow{1} \mathcal{D}_1 \xrightarrow{1} \mathcal{D}_2 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} \mathcal{D}_n$$

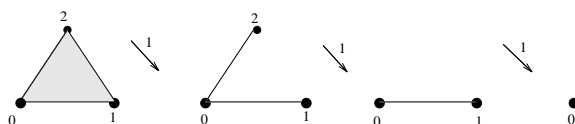
eine Folge von elementaren Zusammenbrüchen. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(\mathcal{D}_0) \cong H_k(\mathcal{D}_n).$$

Im weiteren werden wir statt der Folge von elementaren Zusammenbrüchen kurz $\mathcal{D}_0 \searrow \mathcal{D}_n$ schreiben. Ich werde nun an einigen Beispielen aufzeigen, wie Satz 1.19 angewandt wird.

Beispiel: :

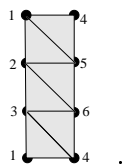
- (i) Sei \mathcal{D} der Simplicialkomplex, der aus einem 2-Simplex und all seinen Seiten besteht. Dann können wir ihn wie folgt zusammenstürzen lassen:



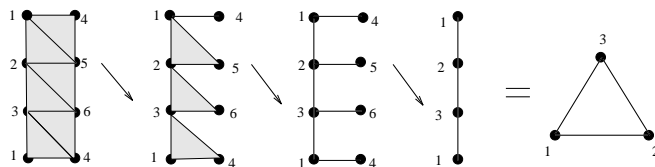
Also hat \mathcal{D} die Homologie eines Punktes, und es gilt

$$H_k(\mathcal{D}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & : k = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

- (ii) Sei \mathcal{D} der Simplicialkomplex



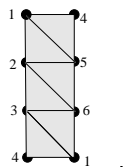
\mathcal{D} läßt sich geometrisch als geschlossenes Band realisieren. Wir können \mathcal{D} wie folgt einstürzen lassen:



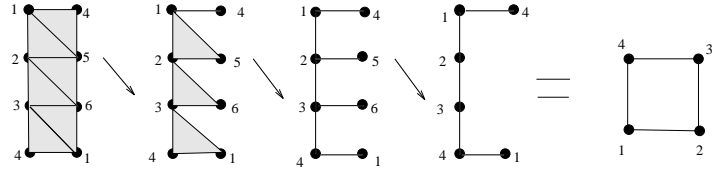
Also hat \mathcal{D} die Homologie des Kreisrandes, und für alle k gilt

$$H_k(\mathcal{D}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & : k = 0, 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

- (iii) Betrachten wir folgenden Simplicialkomplex \mathcal{D}



Die geometrische Realisierung dieses Simplicialkomplexes ist das Möbiusband, das Standardbeispiel einer nicht orientierbaren Fläche. Indem wir \mathcal{D} zusammenbrechen lassen, erhalten wir



Also hat auch dieser Simplicialkomplex die Homologie des Kreisrandes, und es ist

$$H_k(\mathcal{D}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & : k = 0, 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

für alle k . Das Beispiel zeigt, dass die hier definierte Homologie (die \mathbb{Z} -Homologie) uns nicht in die Lage versetzt, zwischen orientierbaren und nicht-orientierbaren Flächen zu unterscheiden.

Da wir unendliche Simplicialkomplexe betrachten werden, hilft uns folgender Satz, deren Homologiegruppen zu berechnen.

Satz 1.20 *Die Homologiegruppen eines Simplicialkomplexes sind isomorph zum direkten (bzw. induktiven) Limes der Homologiegruppen seiner endlichen Unterkomplexe.*

Beweis: [Spa66, Kap4, S.171] □

Wir werden den Satz in folgendem Fall anwenden:

Korollar 1.21 *Sei \mathcal{D} ein unendlicher Simplicialkomplex und $(\mathcal{E}_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge endlicher Unterkomplexe mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) \mathcal{E}_i ist Unterkomplex von \mathcal{E}_{i+1} für alle $i \in \mathbb{N}$.
- (ii) Jeder endliche Unterkomplex von \mathcal{D} liegt in einem \mathcal{E}_i .
- (iii) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$H_k(\mathcal{E}_n) = H_k(\mathcal{E}_{n+j}).$$

Dann ist für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(\mathcal{D}) \cong H_k(\mathcal{E}_n).$$

Das Korollar liefert uns also die Möglichkeit, die Berechnung der Homologie eines unendlichen Simplicialkomplexes auf die Berechnung der Homologie eines endlichen Unterkomplexes zurückzuführen.

Kapitel 2

Das Bruhat-Tits-Gebäude

In diesem Kapitel wird das Bruhat-Tits-Gebäude zur Gruppe $GL(3, \mathcal{K})$ definiert und einige seiner Eigenschaften werden diskutiert. Nicht alle Aussagen in diesem Kapitel werden im weiteren benutzt. Manche Sätze verdeutlichen lediglich die Geometrie des Gebäudes und sollen zur Veranschaulichung dienen. Zur allgemeinen Theorie der Gebäude sei auf die Bücher von Ronan [Ron89] und Brown [Bro89] verwiesen. Für einen beliebigen kommutativen Ring R mit Eins bezeichnen:

- $GL(R)$ = Gruppe der invertierbaren 3×3 -Matrizen mit Koeffizienten aus R ,
- $B(R)$ = Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $GL(R)$,
- $SL(R)$ = $\{M \in GL(R) \mid \det(M) = 1\}$,
- $Z(R)$ = das Zentrum von $GL(R)$, d.h. die Gruppe der Skalarmatrizen,
- $MON(R)$ = die Gruppe aller Matrizen aus $GL(R)$, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen Eintrag ungleich Null besitzen,
- $DIAG(R)$ = die Gruppe aller Diagonalmatrizen in $GL(R)$.

Außerdem sei die S_3 als Gruppe der Permutationsmatrizen in $GL(R)$ eingebettet. Dann ist $MON(R)$ das semidirekte Produkt von S_3 und $DIAG(R)$. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

wird kurz als $diag(a, b, c)$ bezeichnet.

Ferner werden folgende Notationen verwandt:

- \mathbb{Z} = Menge der ganzen Zahlen,
- \mathbb{N}_0 = Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null,
- \mathbb{F}_q = der endliche Körper mit $q = p^f$ Elementen,
- $\mathbb{F}_q[T]$ = der Polynomring über \mathbb{F}_q in der Unbestimmten T ,
versehen mit der Gradfunktion $\deg : \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$,
- Γ = $GL(\mathbb{F}_q[T])$
- n ein Polynom aus $\mathbb{F}_q[T]$ vom Grad d ,
- K = $\mathbb{F}_q(T)$, der rationale Funktionenkörper über \mathbb{F}_q in T
mit der Gradbewertung $v : K \rightarrow \mathbb{Z}$, $v(\frac{f}{g}) = \deg g - \deg f$,

$$\begin{aligned}
\pi &= T^{-1}, \text{ eine Uniformisierende bzgl. der Gradbewertung,} \\
\mathcal{K} &= \mathbb{F}_q((\pi)), \text{ die Vervollständigung von } K \text{ bzgl. } v, \\
\mathcal{O} &= \mathbb{F}_q[[\pi]], \text{ der Ganzheitsring von } \mathcal{K}, \\
V &= \text{ein dreidimensionaler Vektorraum über } \mathcal{K}, \\
\{e_1, e_2, e_3\} &= \text{eine ausgewählte Basis von } V \text{ und} \\
(b_1, b_2, b_3) &= \text{eine beliebige geordnete Basis von } V.
\end{aligned}$$

Im allgemeinen bezeichnen große römische Buchstaben Gruppen und kalligraphische Buchstaben Simplizialkomplexe. Durch die Auswahl einer festen geordneten Basis von V steht die Menge aller geordneten Basen von V in Bijektion zu $GL(\mathcal{K})$. Jede Matrix entspricht der geordneten Menge ihrer Spaltenvektoren. Daher wird im weiteren zwischen einer geordneten Basis und der zugeordneten Matrix nicht unterschieden.

2.1 Die Definition des Bruhat-Tits-Gebäudes

Definition 2.1 Sei $B=(b_1, b_2, b_3)$ eine geordnete Basis von V . Dann bezeichnet $\det(B)$ die Determinante der Matrix mit den Spalten b_1, b_2, b_3 .

Definition 2.2 Eine geordnete Basis B von V heißt fast-normiert, falls ihre Determinante in \mathbb{F}_q^* liegt.

Definition 2.3 Sei $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von V . Dann heißt

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\mathcal{O}} := a_1\mathcal{O} \oplus a_2\mathcal{O} \oplus a_3\mathcal{O}$$

ein Gitter in V .

Lemma 2.4 Seien $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ geordnete Basen von V . Weiter sei $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\mathcal{O}}$ und $\tilde{L} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$. Dann gilt

$$L = \tilde{L} \iff A \in B \cdot GL(\mathcal{O}).$$

Beweis: Die Aussage folgt aus der folgenden Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
L = \tilde{L} &\iff \forall x \in \mathcal{O}^3 \exists y \in \mathcal{O}^3 : Ax = By \\
&\iff \forall x \in \mathcal{O}^3 \exists y \in \mathcal{O}^3 : B^{-1}Ax = y \\
&\iff B^{-1}A \in GL(\mathcal{O}) \\
&\iff A \in B \cdot GL(\mathcal{O}) .
\end{aligned}$$

□

Für alle $x \in \mathcal{K}^*$ und alle Gitter L ist xL wieder ein Gitter. Daher operiert \mathcal{K}^* auf den Gittern in V .

Definition 2.5 Die Bahn eines Gitters L unter der Operation von \mathcal{K}^* heißt Gitterklasse und wird mit

$$[L] := \{xL \mid x \in \mathcal{K}^*\}$$

bezeichnet.

Da \mathcal{K} ein lokaler Körper ist, stimmt $[L]$ mit $\{\pi^i L \mid i \in \mathbb{Z}\}$ überein.

Definition 2.6 Das Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B} ist der abstrakte Simplicialkomplex mit

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}) = \{[L] \mid L \text{ Gitter in } V\},$$

$$\{[L_1], \dots, [L_n]\} \in S(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \exists \tilde{L}_i \in [L_i] \text{ mit } \tilde{L}_1 \supset \tilde{L}_2 \supset \dots \supset \tilde{L}_n \supset \pi \tilde{L}_1.$$

Bemerkung: Um Unklarheiten zu vermeiden, weise ich darauf hin, daß dieses Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B} in der Literatur als “Bruhat-Tits-Gebäude zur SL über einem diskret bewerteten Körper” bezeichnet wird. Es unterscheidet sich von dem “Bruhat-Tits-Gebäude zur GL ”, das ich hier \mathcal{B}_{GL} nenne. Es ist wie folgt definiert: Zu einem beliebigen Körper k und einem endlichdimensionalen k -Vektorraum V ist

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}_{GL}) := \{U \mid U \neq 0, U \text{ ist Untervektorraum von } V\}$$

$$\{U_1, \dots, U_n\} \in S(\mathcal{B}_{GL}) : \Leftrightarrow \text{nach passender Umordnung gilt : } U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n.$$

Es ist klar, daß \mathcal{B} und \mathcal{B}_{GL} nicht isomorph sind. Im weiteren wird uns nur das Gebäude \mathcal{B} interessieren, und daher bezeichnet in dieser Arbeit der Begriff “Bruhat-Tits-Gebäude” immer \mathcal{B} .

Nun werden einige Unterkomplexe von \mathcal{B} ausgezeichnet.

Definition 2.7 Sei $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von V . Dann heißt der maximale Unterkomplex A_B von \mathcal{B} mit

$$\mathcal{V}(A_B) = \{[\langle \pi^i b_1, \pi^j b_2, \pi^k b_3 \rangle_{\mathcal{O}}] \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$$

das Apartment zu B .

Der maximale Unterkomplex W_B mit

$$\mathcal{V}(W_B) = \{[\langle \pi^i b_1, \pi^j b_2, \pi^k b_3 \rangle_{\mathcal{O}}] \mid i, j, k \in \mathbb{Z}, i \leq j \leq k\}$$

heißt die Weylkammer zu B .

Bemerkung: Indem wir jedem Knoten $[\langle \pi^i b_1, \pi^j b_2, \pi^k b_3 \rangle_{\mathcal{O}}]$ eines Apartments A_B den Punkt

$$\left(i - \frac{i+j+k}{3}, j - \frac{i+j+k}{3}, k - \frac{i+j+k}{3}\right)$$

zuordnen, erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung des Apartments A_B in die Hyperebene $\{(r_1, r_2, r_3) \mid r_1 + r_2 + r_3 = 0\}$ des \mathbb{R}^3 . Ein Apartment entspricht so der Triangulierung einer 2-dimensionalen euklidischen Ebene durch gleichseitige Dreiecke.

Eine Weylkammer in A_B stellt dann eine konische Teilmenge von A_B dar. Wenn wir von der Geometrie eines Apartments sprechen, so meinen wir die Geometrie des Bildes in \mathbb{R}^3 .

Das Bild auf Seite 17 zeigt ein Apartment mit einer enthaltenen Weylkammer. Es ist zu beachten, daß jeder Knoten eines Apartments Spitze von sechs im Apartment enthaltenen Weylkammern ist.

Sei $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ eine fest gewählte Basis von V . Es werden folgende Standardobjekte definiert.

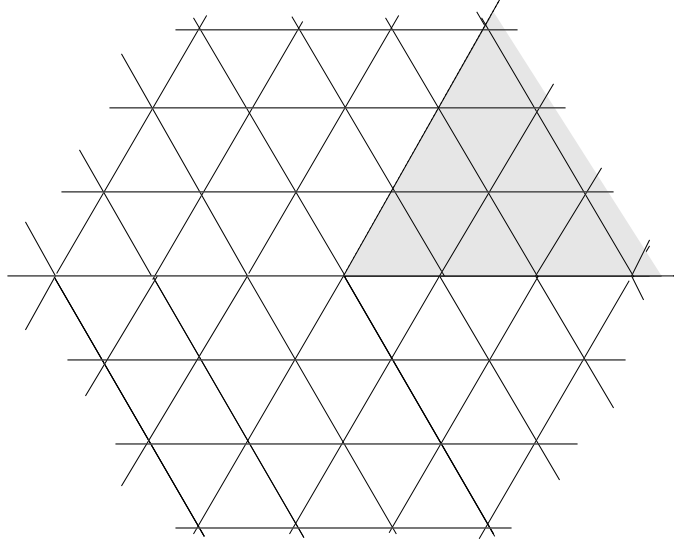
Definition 2.8 Seien $i, j, k \in \mathbb{Z}$. Dann sind

(i) $L_{i,j,k} := \langle \pi^i e_1, \pi^j e_2, \pi^k e_3 \rangle_{\mathcal{O}}$,

(ii) $[i, j, k] := [L_{i,j,k}]$,

(iii) $C_{00} := [0, 0, 0]$, $C_{01} := [0, 0, 1]$, $C_{02} := [0, 1, 1]$ die Standardknoten,

(iv) $C_{10} := \{C_{00}, C_{01}\}$, $C_{11} := \{C_{01}, C_{02}\}$, $C_{12} := \{C_{02}, C_{00}\}$ die Standardkanten,



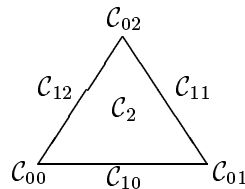
Apartment mit Weylkammer.

(v) $\mathcal{C}_2 := \{\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{01}, \mathcal{C}_{02}\}$ der Standard-2-Simplex,

(vi) $\mathcal{A} := A_E$ das Standardapartment,

(vii) $\mathcal{W} := W_E$ die Standardweylkammer.

Es ist zu beachten, daß für alle $t \in \mathbb{Z}$ die Klassen $[i, j, k]$ und $[i + t, j + t, k + t]$ übereinstimmen. Das Verhältnis zwischen Standardknoten, -kanten und -2-Simplex wird durch folgendes Bild verdeutlicht:



Die Bezeichnungen sind so gewählt, daß der erste Index die Dimension des entsprechenden Standardsimplex bezeichnet.

Durch die Auswahl der Basis E von V operiert $GL(\mathcal{K})$ von links auf den \mathcal{K} -Basen von V und daher auf den Gitterklassen durch $g[L] := [gL]$. Die Operation wird durch

$$g \cdot \{v_0, \dots, v_n\} := \{gv_0, gv_1, \dots, gv_n\}$$

auf ganz $S(\mathcal{B})$ erweitert. Dies ist möglich, da $GL(\mathcal{K})$ die Inklusionsrelation für Gitter erhält.

Wir benötigen vorerst nur die Fixgruppe des Knotens \mathcal{C}_{00} . Die Fixgruppen der anderen Objekte werden in Abschnitt 2.2 bestimmt.

Lemma 2.9 *Es gilt:*

$$Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{00}) = GL(\mathcal{O}) \cdot Z(\mathcal{K})$$

Beweis: Sei $g \in GL(\mathcal{K})$ beliebig. Für ein \mathcal{O} -Gitter L in V stimmen nach 2.4 die Gitter L und $L \cdot g$ genau dann überein, wenn g in $GL(\mathcal{O})$ liegt. Es folgt

$$g \cdot \mathcal{C}_{00} = \mathcal{C}_{00} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{00} \cdot g = \mathcal{C}_{00} \Leftrightarrow g \in GL(\mathcal{O}) \cdot Z(\mathcal{K}) .$$

□

Wir definieren folgende Untergruppen der $GL(\mathcal{K})$:

Definition 2.10

$$(i) \quad GL^0(\mathcal{K}) := \ker(v \circ \det) = \{g \in GL(\mathcal{K}) \mid v(\det(g)) = 0\}.$$

$$(ii) \quad \text{Sei } \varphi : GL(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{Z}_3, g \mapsto (v(\det(g))) \bmod 3. \text{ Dann definieren wir} \\ GL^+(\mathcal{K}) := \ker(\varphi) = \{g \in GL(\mathcal{K}) \mid v(\det(g)) \equiv 0 \pmod{3}\}.$$

Offensichtlich gilt die folgende Beziehung:

$$SL(\mathcal{K}) \subset GL^0(\mathcal{K}) \subset GL^+(\mathcal{K}) \subset GL(\mathcal{K})$$

Definition 2.11 Sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine geordnete Basis von V und $[L] = [\langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\mathcal{O}}]$ die von B erzeugte Gitterklasse. Dann definiert man

$$\text{Typ}([L]) := v(\det(b_1, b_2, b_3)) \pmod{3}.$$

Sei $C = (c_1, c_2, c_3)$ eine beliebige andere geordnete Basis eines Gitters aus $[L]$. Dann existiert ein $i \in \mathbb{Z}$ und ein $h \in GL(\mathcal{O})$, so daß $C \cdot h \cdot \text{diag}(\pi^i, \pi^i, \pi^i) = B$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} v(\det(B)) &= v(\det(C \cdot h \cdot \text{diag}(\pi^i, \pi^i, \pi^i))) \\ &= v(\det(C) + 0 + 3i) \\ &\equiv v(\det(C)) \pmod{3}. \end{aligned}$$

Typ ist also wohldefiniert und unabhängig von der Anordnung der Basis.

Lemma 2.12 Typ ist invariant unter der Operation der Gruppe $GL^+(\mathcal{K})$.

Beweis: Seien $g \in GL^+(\mathcal{K})$, $[L] \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ und B eine Basis zu L . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Typ}(g[L]) &= v(\det(gB)) \pmod{3} \\ &= (v(\det(g)) + v(\det(B))) \pmod{3} \\ &= v(\det(B)) \pmod{3} \\ &= \text{Typ}([L]) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.13 Jeder 2-Simplex aus \mathcal{B} enthält genau einen Knoten von jedem Typ.

Beweis: Sei $\{v_0, v_1, v_2\} \in S_2(\mathcal{B})$. Dann existieren nach geeigneter Umordnung Vertretergitter $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \pi L_0$. Nach dem Elementarteilersatz existiert eine Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von V , so daß $L_0 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$, $L_1 = \langle b_1, b_2, \pi b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$, $L_2 = \langle b_1, \pi b_2, \pi b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$ ist. Da Typ unabhängig von der Wahl der Vertreter ist, folgt die Aussage. □

Nun werden wir Typ auf höherdimensionale Simplexe verallgemeinern.

Definition 2.14 Sei s ein n -Simplex in \mathcal{B} . Dann definiert man den Typ von s als das $(n+1)$ -Tupel der nach der Größe geordneten Typen der Knoten aus s .

Beispiel: Jeder 2-Simplex hat den Typ $(0,1,2)$. Ein 1-Simplex hat einen der drei Typen $(0,1)$, $(0,2)$ oder $(1,2)$.

Satz 2.15 Sei G eine Untergruppe von $GL^+(\mathcal{K})$, $\mathcal{S} = \{v_i \mid i = 0, \dots, n\} \in S(\mathcal{B})$. Dann gilt:

$$\text{Fix}_G(\mathcal{S}) = \bigcap_{i=0}^n \text{Fix}_G(v_i).$$

Beweis: Sei $g \in \text{Fix}_G(\mathcal{S})$. Da die Typen aller Knoten in \mathcal{S} verschieden und invariant unter g sind, folgt:

$$g\{v_0, \dots, v_n\} = \{v_0, \dots, v_n\} \iff \text{Für alle } i = 0, \dots, n \text{ ist } gv_i = v_i.$$

□

Wir werden im Beweis von Satz 2.25 sehen, daß diese Aussage falsch ist, falls man beliebige Untergruppen von $GL(\mathcal{K})$ zuläßt.

Lemma 2.16 *Jeder 2-Simplex aus \mathcal{B} liegt in einem Apartment.*

Beweis: Das Lemma ist eine Umformulierung des Elementarteilersatzes. Seien Repräsentanten L_0, L_1, L_2 mit $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \pi L_0$ gewählt. Dann existiert eine Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von V , so daß $L_0 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$, $L_1 = \langle b_1, b_2, \pi b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$, $L_2 = \langle b_1, \pi b_2, \pi b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$. Der 2-Simplex liegt also im Apartment zur Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$. □

Der folgende Satz gibt Auskunft über die lokale Struktur von \mathcal{B} .

Satz 2.17 *Sei $v \in \mathcal{V}(\mathcal{B}), \{v_0, v_1\} \in S_1(\mathcal{B})$. Es gelten:*

- (i) $\dim(\mathcal{B}) = 2$.
- (ii) v ist Seite von $2(q^2 + q + 1)$ 1-Simplizes.
- (iii) v ist Seite von $(q^2 + q + 1)(q + 1)$ 2-Simplizes.
- (iv) $\{v_0, v_1\}$ ist Seite von $(q + 1)$ 2-Simplizes.

Beweis: Zu (i): Sei k ein beliebiger Körper, W ein beliebiger k -Vektorraum. Dann heißt eine Familie $(U_i)_{i=0}^n$ von Untervektorräumen mit

$$W = U_n \supset U_{n-1} \supset \dots \supset U_0 = 0$$

eine Fahne in W . Ist $\dim W < \infty$, so ist die maximale Länge einer solchen Fahne gerade $\dim W$. Die Menge aller Fahnen des \mathbb{F}_q -Vektorraums $L/\pi L$ wird mit \mathcal{F} bezeichnet. In $L/\pi L$ sei eine orientierte Basis (b_1, b_2, b_3) ausgewählt. Weiter sei

$$\mathcal{G} := \{(L_i)_{i=1}^m \mid L \supset L_m, \dots \supset L_1 \supset \pi L, \text{ mit } L_1, \dots, L_m \text{ } \mathcal{O}\text{-Gitter}\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{F} \\ (L \supset L_m \supset \dots \supset L_1 \supset \pi L) &\mapsto \left(L/\pi L \supset L_m/\pi L \supset \dots \supset L_1/\pi L \supset \pi L/\pi L \right) \end{aligned}$$

eine Bijektion. Da $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/\pi L) = 3$ gilt, folgt, daß $\dim(\mathcal{B})$ zwei ist. zu iii) Die Menge

$$\mathcal{G}_1 := \left\{ L \supset L_2 \supset L_1 \supset \pi L \mid \dim_{\mathbb{F}_q}(L_i/\pi L) = i, i \in \{1, 2\} \right\}$$

entspricht den 2-Simplizes mit Seite $[L]$. Das Bild von \mathcal{G}_1 unter φ ist

$$\mathcal{F}_1 := \left\{ L/\pi L \supset U_2 \supset U_1 \supset 0 \mid \dim(U_i) = i, i \in \{1, 2\} \right\}.$$

Auf \mathcal{F} operiert $GL(\mathbb{F}_q)$ transitiv und

$$\text{Fix}_{GL(\mathbb{F}_q)} \left(L/\pi L \supset \langle b_1, b_2 \rangle \supset \langle b_1 \rangle \supset 0 \right) = B(\mathbb{F}_q).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}_1| &= |\mathcal{F}_1| = |\text{Bahn}_{GL(\mathbb{F}_q)}(L/\pi L \supset \langle b_1, b_2 \rangle \supset \langle b_1 \rangle \supset 0)| \\
&= \frac{|GL(\mathbb{F}_q)|}{|B(\mathbb{F}_q)|} \\
&= \frac{(q^3 - 1)(q^3 - q)(q^3 - q^2)}{q^3(q - 1)^3} \\
&= (q^2 + q + 1)(q + 1).
\end{aligned}$$

zu ii) Für $i \in \{1, 2\}$ sei

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_i &:= \left\{ L \supset \tilde{L} \supset \pi L \mid \dim_{\mathbb{F}_q}(\tilde{L}/\pi L) = i \right\}, \\
\mathcal{F}_i &:= \left\{ L/\pi L \supset U \supset 0 \mid \dim_{\mathbb{F}_q}(U) = i \right\}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ entspricht der Menge aller 1-Simplizes mit Seite $[L]$, und $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ ist das Bild von $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ unter φ . Die Gruppe $GL(\mathbb{F}_q)$ operiert sowohl auf \mathcal{F}_1 als auch auf \mathcal{F}_2 transitiv, und

$$\begin{aligned}
\text{Fix}_{GL(\mathbb{F}_q)}(L/\pi L \supset \langle b_1, b_2 \rangle \supset 0) &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}_q) \right\}, \\
\text{Fix}_{GL(\mathbb{F}_q)}(L/\pi L \supset \langle b_1 \rangle \supset 0) &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}_q) \right\}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2| &= |\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2| \\
&= |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \\
&= \frac{|GL(\mathbb{F}_q)|}{q^2(q - 1)|GL(2, \mathbb{F}_q)|} + \frac{|GL(\mathbb{F}_q)|}{q^2(q - 1)|GL(2, \mathbb{F}_q)|} \\
&= 2(q^2 + q + 1).
\end{aligned}$$

zu (iv): Der Beweis verläuft analog zu (ii) und (iii). Sei $\{[L], [\tilde{L}]\} \in S_1(\mathcal{B})$. Dann gilt o.B.d.A.

$$L \supset \tilde{L} \supset \pi L \text{ und } \tilde{L}/\pi L = 1$$

(ansonsten betrachte man $\tilde{L} \supset \pi L \supset \pi \tilde{L}$). Sei

$$\mathcal{G}_4 := \left\{ L \supset L_2 \supset \tilde{L} \supset \pi L \mid L_2 \text{ ist } \mathcal{O}\text{-Gitter} \right\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{F}_4 := \left\{ L/\pi L \supset U \supset \tilde{L}/\pi L \supset 0 \mid \dim_{\mathbb{F}_q}(U) = 2 \right\}$$

das Bild von \mathcal{G}_1 unter φ . Die Gruppe $\text{Fix}_{GL(\mathbb{F}_q)}(L/\pi L \supset \tilde{L}/\pi L \supset 0)$ operiert transitiv auf \mathcal{F}_4 , und die Fixgruppe der Standardfahne unter der Operation dieser Gruppe ist $B(\mathbb{F}_q)$. Wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}_4| &= |\mathcal{F}_4| \\
&= \frac{q^2(q - 1)|GL(2, \mathbb{F}_q)|}{|B(\mathbb{F}_q)|} \\
&= (q + 1).
\end{aligned}$$

□

Nun wird auf $S_2(\mathcal{B})$ ein Abstand definiert.

Definition 2.18 (i) Zwei 2-Simplizes $s, t \in S_2(\mathcal{B})$ heißen *benachbart*, falls sie eine gemeinsame 1-dimensionale Seite besitzen. Wir schreiben dann: $s \sim t$.

(ii) Eine Folge $F = (s = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = t)$ von benachbarten 2-Simplizes aus \mathcal{B} heißt *Galerie* von s nach t der Länge n .

Definition 2.19 Seien $s, t \in S_2(\mathcal{B})$. Dann heißt

$$d(s, t) := \min \{ \text{Länge}(F) \mid F \text{ ist Galerie von } s \text{ nach } t \}$$

der *Abstand von s und t* .

2.2 Die Operation von $GL(\mathcal{K})$ auf \mathcal{B}

Obwohl \mathcal{B} als das ‘‘Bruhat-Tits-Gebäude zur SL über einem diskret bewerteten Körper’’ bezeichnet wird, werden wir die Operation der $GL(\mathcal{K})$ auf \mathcal{B} untersuchen. Im nächsten Abschnitt wird klar werden, warum dies für uns interessant ist.

Da $GL(\mathcal{K})$ transitiv auf den orientierten \mathcal{K} -Basen von V operiert, gilt der folgende Satz:

Satz 2.20 Die $GL(\mathcal{K})$ operiert jeweils transitiv auf $\mathcal{V}(\mathcal{B})$, $S_1(\mathcal{B})$ und $S_2(\mathcal{B})$. Außerdem operiert $GL(\mathcal{K})$ jeweils transitiv auf den Apartments und den Weylkammern in \mathcal{B} .

Lemma 2.21 Seien $v_0, v_1 \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ und $\text{Typ}(v_0) \neq \text{Typ}(v_1)$. Dann existiert kein Element aus $GL(\mathcal{K})$, das die beiden Knoten vertauscht.

Beweis: Sei also $\text{Typ}(v_0) \neq \text{Typ}(v_1)$, $g \in GL(\mathcal{K})$, $g \cdot v_0 = v_1$ und $g \cdot v_1 = v_0$. Es folgt, daß $g^2 \cdot v_0 = v_0$ und daher $2 \cdot v(\det(g)) \equiv 0 \pmod{3}$. Dies ist äquivalent dazu, daß $v(\det(g)) \equiv 0 \pmod{3}$. Dann ist aber $\text{Typ}(v_1) = \text{Typ}(g \cdot v_0) = \text{Typ}(v_0)$ im Widerspruch zur Annahme. □

Da die $GL(\mathcal{K})$ u.a. die Spiegelung an der durch die Knoten $[0, 0, 0]$ und $[0, 1, 2]$ festgelegten Geraden nicht enthält, ist die volle Automorphismengruppe von \mathcal{A} keine Untergruppe von $GL(\mathcal{K})$.

Im weiteren wird es sich als nützlich erweisen, die Fixgruppen einiger Standardobjekte unter der $GL(\mathcal{K})$ zu kennen.

Satz 2.22 Die Fixgruppe eines Knotens $[i, j, k]$ unter der $GL(\mathcal{K})$ ist

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \pi^{i-j} a_{12} & \pi^{i-k} a_{13} \\ \pi^{j-i} a_{21} & a_{22} & \pi^{j-k} a_{23} \\ \pi^{k-i} a_{31} & \pi^{k-j} a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \mid (a_{cd})_{1 \leq c, d \leq 3} \in GL(\mathcal{O}) \right\} \cdot Z(\mathcal{K}).$$

Beweis: Sei $M = \text{diag}(\pi^i, \pi^j, \pi^k)$. Dann ist $M \cdot [0, 0, 0] = [i, j, k]$ und für ein $g \in GL(\mathcal{K})$ gilt:

$$\begin{aligned} g \cdot [i, j, k] &= [i, j, k] \\ \Leftrightarrow g \cdot M \cdot [0, 0, 0] &= M \cdot [0, 0, 0] \\ \Leftrightarrow M^{-1} g M &\in \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}([0, 0, 0]) \\ \Leftrightarrow g &\in M \cdot \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}([0, 0, 0]) \cdot M^{-1} \\ \Leftrightarrow g &\in M \cdot GL(\mathcal{O}) \cdot M^{-1} \cdot Z(\mathcal{K}) \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren folgt die Aussage. □

Definition 2.23 (i) Die Gruppe

$$I := \left\{ M \in GL(\mathcal{O}) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{\pi} \right\}$$

heißt Standard-Iwahorigruppe.

(ii) Die Untergruppe

$$P_1 := \left\{ M \in GL(\mathcal{O}) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{\pi} \right\}$$

von I heißt erste Standard-Parahorigruppe.

(iii) Die Untergruppe

$$P_2 := \left\{ M \in GL(\mathcal{O}) \mid M \equiv \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \pmod{\pi} \right\}$$

von I heißt zweite Standard-Parahorigruppe.

Satz 2.24 Es gilt

(i)

$$\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{10}) = P_1 \cdot Z(\mathcal{K})$$

(ii)

$$\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{12}) = P_2 \cdot Z(\mathcal{K})$$

Beweis: (i) Die beiden 0-dimensionalen Seiten von \mathcal{C}_{10} besitzen unterschiedliche Typen. Nach 2.21 existiert kein g aus $GL(\mathcal{K})$, daß diese beiden Seiten vertauscht. Daher ist

$$\begin{aligned} \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{10}) &= \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{00}) \cap \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{01}) \\ &= (Z(\mathcal{K}) \cdot GL(\mathcal{O})) \cap \left(Z(\mathcal{K}) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \pi^{-1}a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \pi^{-1}a_{23} \\ \pi a_{31} & \pi a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) \\ &= Z(\mathcal{K}) \cdot P_1 . \end{aligned}$$

(ii) analog zu (i)

□

Satz 2.25 Es gilt:

$$\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_2) = Z(\mathcal{K}) \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot I .$$

Beweis: Jedes Element aus $GL(\mathcal{K})$, das jeden Knoten von \mathcal{C}_2 festläßt, läßt auch ganz \mathcal{C}_2 fest. Daher ergibt sich

$$\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_2) \supset (\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{00}) \cap \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{01}) \cap \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{02})) = Z(\mathcal{K}) \cdot I .$$

Weiter existiert in $GL(\mathcal{K})$ die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

die zwar ganz \mathcal{C}_2 , aber keinen Knoten von \mathcal{C}_2 fixiert. Nach 2.21 hat ein $h \in \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_2)$ nur drei Möglichkeiten, auf den Knoten von \mathcal{C}_2 zu operieren.

- (i) \mathcal{C}_2 wird durch h punktweise fixiert. Dann liegt h in $Z(\mathcal{K}) \cdot I$.
(ii) Das Element h transformiert \mathcal{C}_{00} in \mathcal{C}_{01} . Dann muß wegen 2.21 gelten

$$h \cdot \mathcal{C}_{00} = \mathcal{C}_{01}, \quad h \cdot \mathcal{C}_{01} = \mathcal{C}_{02}, \quad h \cdot \mathcal{C}_{02} = \mathcal{C}_{00},$$

bzw.

$$h \cdot \mathcal{C}_{00} = M \cdot \mathcal{C}_{00}, \quad h \cdot \mathcal{C}_{01} = M \cdot \mathcal{C}_{01}, \quad h \cdot \mathcal{C}_{02} = M \cdot \mathcal{C}_{02}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$h \in M \cdot (Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{00}) \cap Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{01}) \cap Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{02})) = M \cdot I \cdot Z(\mathcal{K}).$$

- (iii) Der Knoten \mathcal{C}_{00} wird durch h in den Knoten \mathcal{C}_{02} überführt. Dann folgt mit den gleichen Überlegungen wie oben, daß

$$h \in M^2 \cdot I \cdot Z(\mathcal{K})$$

gilt, und damit folgt die Aussage. □

Der Beweis hat gezeigt, daß $M^2 \cdot \mathcal{C}_{10} = \mathcal{C}_{12}$ ist. Daher sind die entsprechenden Fixgruppen konjugiert. Insbesondere gilt

$$M^2 \cdot P_1 \cdot M^{-2} = P_2.$$

Kommen wir nun zu den Fixgruppen der Standardweylkammer und des Standardapartments.

Satz 2.26 *Es gilt*

$$Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{W}) = Z(\mathcal{K}) \cdot B(\mathcal{O}).$$

Beweis: Für alle von $[0, 0, 0]$ verschiedenen Knoten $[i, j, k]$ ist der Simplicialkomplex $\mathcal{LK}_{\mathcal{W}}([i, j, k])$ nicht isomorph zu $\mathcal{LK}_{\mathcal{W}}([0, 0, 0])$. Also muß jedes Element, daß \mathcal{W} festläßt bereits $[0, 0, 0]$ festlassen. Also ist $Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{W})$ eine Untergruppe von $Z(\mathcal{K}) \cdot GL(\mathcal{O})$. Da $Z(\mathcal{K}) \cdot GL(\mathcal{O})$ den Typ erhält und $\text{Typ}(\mathcal{C}_{01}) \neq \text{Typ}(\mathcal{C}_{02})$ ist, muß $Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{W})$ auch die Knoten \mathcal{C}_{01} und \mathcal{C}_{02} fest lassen. Dann fixiert sie aber bereits jeden Randknoten von \mathcal{W} . Also ist

$$Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{W}) \subset \left(\bigcap_{0 \leq i} Fix_{GL(\mathcal{K})}([0, 0, i]) \right) \cap \left(\bigcap_{0 \leq i} Fix_{GL(\mathcal{K})}([0, i, i]) \right).$$

Da

$$\bigcap_{0 \leq i} Fix_{GL(\mathcal{K})}([0, 0, i]) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \right\} \cdot Z(\mathcal{K})$$

und

$$\bigcap_{0 \leq i} Fix_{GL(\mathcal{K})}([0, i, i]) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{O}) \right\} \cdot Z(\mathcal{K})$$

ist, folgt

$$Fix_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{W}) \subset B(\mathcal{O}) \cdot Z(\mathcal{K}).$$

Umgekehrt sieht man mit Satz 2.22 direkt, daß für jeden Knoten $[i, j, k]$ aus \mathcal{W} die Gruppe $B(\mathcal{O}) \cdot Z(\mathcal{K})$ Untergruppe der entsprechenden Fixgruppe ist. Also läßt ganz $B(\mathcal{O}) \cdot Z(\mathcal{K})$ die Standardweylkammer fest, und damit ist der Satz gezeigt. □

Satz 2.27 *Es gilt:*

$$\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{A}) = \text{MON}(\mathcal{K})$$

Beweis: \mathcal{A} ist das Apartment zur ausgewählten Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Dann ist $\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{A})$ die Menge aller Matrizen, die die Menge $\{\{\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \alpha_3 e_3\} \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{K}^*\}$ stabilisieren. Daher ist $\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\mathcal{A})$ das Erzeugnis der Gruppen $Z(\mathcal{K})$, $\text{DIAG}(\mathcal{K})$ und S_3 . Daraus folgt die Aussage. \square

Wir haben also gezeigt, daß $GL(\mathcal{K})$ transitiv auf bestimmten Objekten operiert, und wir haben deren Fixgruppen berechnet. Insgesamt erhalten wir folgende Beschreibungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{B}) &\longleftrightarrow GL(\mathcal{K}) / GL(\mathcal{O}) \cdot Z(\mathcal{K}), \\ S_1(\mathcal{B}) &\longleftrightarrow GL(\mathcal{K}) / P_1 \cdot Z(\mathcal{K}), \\ S_2(\mathcal{B}) &\longleftrightarrow GL(\mathcal{K}) / \left(Z(\mathcal{K}) \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot I \right), \\ \{\text{Apartments in } \mathcal{B}\} &\longleftrightarrow GL(\mathcal{K}) / \text{MON}(\mathcal{K}), \\ \{\text{Weylkammern in } \mathcal{B}\} &\longleftrightarrow GL(\mathcal{K}) / B(\mathcal{O}) \cdot Z(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

In den nächsten Kapiteln werden sich folgende Aussagen als hilfreich erweisen:

Lemma 2.28 *Für alle $s, t \in S_2(\mathcal{B})$ und $g \in GL(\mathcal{K})$ gilt*

$$s \sim t \iff gs \sim gt.$$

Beweis: Sei u die gemeinsame 1-dimensionale Seite von s und t . Dann ist $g \cdot u$ gemeinsame 1-dimensionale Seite von gs und gt . \square

Dies hat zur Konsequenz, daß $GL(\mathcal{K})$ auf der Menge der Galerien operiert. Es gilt:

Satz 2.29 *Der Abstand zwischen 2-Simplizes ist invariant unter der Operation der $GL(\mathcal{K})$.*

Beweis: Seien $s, t \in S_2(\mathcal{B})$, $g \in GL(\mathcal{K})$. Dann ist $(s = x_0, x_1, \dots, x_n = t)$ genau dann minimal, wenn $(gs = gx_0, gx_1, \dots, gx_n = t)$ minimal ist. \square

Satz 2.30 *Sei s aus $S_2(\mathcal{A})$. Dann existiert eine Galerie von \mathcal{C}_2 nach s , die ganz in \mathcal{A} liegt.*

Beweis: Sei $s = \{w_0, w_1, w_2\} \in S_2(\mathcal{A})$. Dann existiert ein Weg

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$$

in \mathcal{A} mit $v_0 = \mathcal{C}_{00}$, $v_1 = \mathcal{C}_{01}$, $v_{n-1} = w_0$ und $v_n = w_1$. Jedes Teilstück $\{\{v_{i-1}, v_i\}, \{v_i, v_{i+1}\}\}$ mit $0 < i < n$ liegt in $\mathcal{LK}_{\mathcal{A}}(v_i)$. In $\mathcal{LK}_{\mathcal{A}}(v_i)$ existiert immer eine Galerie

$$(\{v_{i-1}, v_i, u_1\}, \{v_i, u_1, u_2\}, \{v_i, v_{i+1}, u_2\}),$$

wobei u_1, u_2 unter Umständen aus der Menge $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}$ sein können. Indem man diese Teilgalerien zusammensetzt, erhält man eine in \mathcal{A} verlaufende Galerie (λ) , deren Startsimplex die Seite $\{\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{01}\}$ und deren Endsimplex die Seite $\{w_0, w_1\}$ besitzt. Dann liegt auch die Galerie

$$(\{\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{01}, \mathcal{C}_{02}\}, \lambda, \{w_0, w_1, w_2\})$$

ganz in \mathcal{A} , und damit ist der Satz gezeigt. \square

2.3 Die Operation der $GL^0(\mathcal{K})$ auf \mathcal{B}

In der einschlägigen Literatur wird meist die Operation der $SL(\mathcal{K})$ auf \mathcal{B} betrachtet, da diese den Typ erhält. Im weiteren Verlauf der Arbeit interessiert uns jedoch die Operation der Gruppe $GL(\mathbb{F}_q[T])$ auf \mathcal{B} . Da $GL(\mathbb{F}_q[T])$ keine Untergruppe der $SL(\mathcal{K})$ ist, bietet es sich an, die Operation der Gruppe $GL^0(\mathcal{K})$ zu betrachten. Sie enthält einerseits die Gruppe $GL(\mathbb{F}_q[T])$, und andererseits verändert sie den Typ eines Knotens nicht. Im letzten Abschnitt haben wir die Operation der Gruppe $GL(\mathcal{K})$ nur betrachtet, weil sie im Gegensatz zur $GL^0(\mathcal{K})$ transitiv auf den 0-Simplizes operiert. Dies hat uns ermöglicht, die Fixgruppen aller Knoten unter der $GL(\mathcal{K})$ zu berechnen. Indem wir diese Fixgruppen mit $GL^0(\mathcal{K})$ schneiden, werden wir problemlos die Fixgruppen der Knoten unter der $GL^0(\mathcal{K})$ erhalten. Zudem ist $GL^0(\mathcal{K}) \cap Z(\mathcal{K}) = Z(\mathcal{O})$, so daß der "unschöne" Faktor $Z(\mathcal{K})$ in den Fixgruppen verschwindet.

Es folgen einige Lemmata zur Operation der $GL^0(\mathcal{K})$ auf \mathcal{B} .

Lemma 2.31 *Keine zwei verschiedenen Gitter in einer Gitterklasse sind äquivalent unter $GL^0(\mathcal{K})$.*

Beweis: Sei $[L_1] = [L_2]$, $L_1 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$, $g \in GL^0(\mathcal{K})$ und $g \cdot L_1 = L_2$. Da \mathcal{K} ein lokaler Körper ist, ist $L_1 = \pi^i L_2$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} g \cdot L_1 &= \pi^i L_1 \\ \Rightarrow v(\det(g)) + v(\det(B)) &= 3i + v(\det(B)) \\ \Rightarrow i &= v(\det(g)) = 0 \\ \Rightarrow L_1 &= L_2. \end{aligned}$$

□

Wir können das Lemma auch wie folgt formulieren:

Lemma 2.32 *Sei $[L]$ aus $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ und G eine Untergruppe von $GL^0(\mathcal{K})$. Dann gilt*

$$\text{Fix}_G([L]) = \text{Fix}_G(L).$$

Wenn eine Matrix aus GL^0 eine Gitterklasse fixiert, so fixiert sie also bereits jedes Gitter in der Klasse.

Lemma 2.33 *Seien $v_1, v_2 \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ äquivalent unter $GL^0(\mathcal{K})$. Dann existiert zu jedem Gitter $L_1 \in v_1$ genau ein unter $GL^0(\mathcal{K})$ äquivalentes Gitter L_2 aus v_2 .*

Beweis: Die Existenz eines solchen Gitters ist trivial. Seien also L_2 und L_3 aus v_2 , g, h aus $GL^0(\mathcal{K})$, $g \cdot L_2 = L_1$ und $h \cdot L_3 = L_1$. Dann folgt $h^{-1}g \cdot L_2 = L_3$ und nach Lemma 2.31 ist L_2 gleich L_3 . □

Wir werden nun aus der Operation der $GL^0(\mathcal{K})$ weitere Aussagen über die Struktur von \mathcal{B} herleiten. Dazu benötigen wir folgende Untergruppe von \mathcal{B} :

Definition 2.34 *Seien*

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann heißt

$$W := \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$$

die Weylgruppe zu $GL^0(\mathcal{K})$.

Dann ist die Weylgruppe das semidirekte Produkt

$$W = S_3 \ltimes \left\{ \begin{pmatrix} \pi^i & 0 & 0 \\ 0 & \pi^j & 0 \\ 0 & 0 & \pi^k \end{pmatrix} \mid i + j + k = 0 \right\} .$$

Um zu zeigen, daß $GL^0(\mathcal{K})$ transitiv auf den 2-Simplizes von \mathcal{B} operiert, werden wir zeigen, daß \mathcal{W} transitiv auf $S_2(\mathcal{A})$ und $GL^0(\mathcal{K})$ transitiv auf der Menge aller Apartments operiert.

Satz 2.35 Sei $[i, j, k] \in \mathcal{V}(\mathcal{A})$ beliebig. Dann existiert ein $w \in W$ mit $w \cdot [i, j, k] \in \mathcal{C}_2$.

Beweis: Sei $[i, j, k] \in \mathcal{V}(\mathcal{A})$ fest gewählt. Dann kann man die Indizes so wählen, daß $i + j + k \in \{0, 1, 2\}$. W operiert auf $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_1[i, j, k] &= [j, i, k], \\ \sigma_2[i, j, k] &= [i, k, j], \\ \sigma_3[i, j, k] &= [k - 1, j, i + 1]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3[i, j, k] &= [i + 1, j, k - 1] \\ \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1[i, j, k] &= [i - 1, j, k + 1]. \end{aligned}$$

Also existiert ein w_1 aus W und n_1, n_2 aus \mathbb{Z} mit

$$w_1[i, j, k] = [0, n_1, n_2].$$

Weiter bewirkt

$$\begin{aligned} \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_1[i, j, k] &= [i, j + 1, k - 1], \\ \sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_2[i, j, k] &= [i, j - 1, k + 1]. \end{aligned}$$

Es existiert also ein w_2 aus W und n_3 aus \mathbb{Z} , so daß

$$w_2[0, n_1, n_2] = [0, 0, n_3],$$

da W die Summe der Indizes nicht verändert, ist $n_3 \in \{0, 1, 2\}$. Da $[0, 0, 0]$ und $[0, 0, 1]$ in \mathcal{C}_2 liegen, ist die Aussage für n_3 ungleich 2 gezeigt. Sei also $n_3 = 2$. Dann ist

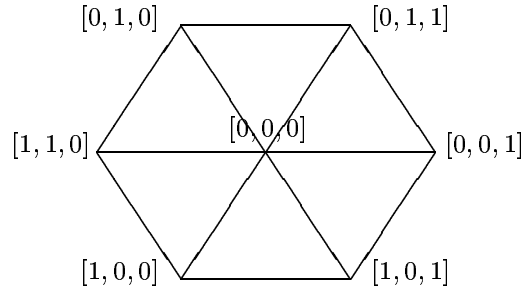
$$\sigma_1\sigma_3[0, 0, 2] = [0, 1, 1],$$

und es folgt die Aussage. \square

Die σ_i entsprechen den Spiegelungen des Standardapartments an den durch die 1-Seiten des Standard-2-Simplex festgelegten Achsen, und W ist die Gruppe der typerhaltenden simplizialen Automorphismen von \mathcal{A} .

Satz 2.36 $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ operiert transitiv auf den 2-Simplizes von $\mathcal{LK}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_0)$.

Beweis: $\mathcal{LK}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_0)$ hat folgende Gestalt:



Die Matrix σ_1 bewirkt eine Spiegelung an der Achse $[1,1,0]-[0,0,0]-[0,0,1]$ und σ_2 bewirkt eine Spiegelung an der Achse $[1,0,0]-[0,0,0]-[0,1,1]$. Man sieht leicht, daß diese Spiegelungen ausreichen, um jeden 2-Simplex aus $\mathcal{LK}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_0)$ in \mathcal{C}_2 zu transformieren. \square

Satz 2.37 *W operiert transitiv auf $S_2(\mathcal{A})$.*

Beweis: Sei $s = \{v_0, v_1, v_2\} \in S_2(\mathcal{A})$. Dann sei o.B.d.A. nach Lemma 2.13 $\text{Typ}(v_0)=0$. Nach Satz 2.35 existiert ein $w_1 \in W$, so daß $w_1 \cdot v_0 = \mathcal{C}_{00}$ bzw. $w_1 \cdot s \in \mathcal{LK}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_0)$. Nach 2.36 existiert ein $w_2 \in W$ mit $w_2 w_1 \cdot s = \mathcal{C}_2$. Für $s_1, s_2 \in S_2(\mathcal{A})$ folgt, daß $w_3, w_4 \in W$ mit $w_3 \cdot s_1 = \mathcal{C}_2 = w_4 \cdot s_2$ existieren. Also ist $s_1 = w_3^{-1} w_4 \cdot s_2$ und die Aussage ist gezeigt. \square

Lemma 2.38 *$GL^0(\mathcal{K})$ operiert transitiv auf der Menge der Apartments.*

Beweis: Sei B eine geordnete Basis von V und A_B das zugehörige Apartment. Dann existiert eine geordnete und fast-normierte Basis C von V mit $A_B = A_C$. Da $GL^0(\mathcal{K})$ transitiv auf den geordneten, fast-normierten Basen von V operiert, folgt die Aussage. \square

Es folgt der wichtige Satz

Satz 2.39 *$GL^0(\mathcal{K})$ operiert transitiv auf $S_2(\mathcal{B})$.*

Beweis: Sei $s_1 \in S_2(\mathcal{B})$ beliebig. Dann liegt s_2 nach 2.16 in einem Apartment A und nach 2.38 existiert ein g aus $GL^0(\mathcal{K})$ mit $g \cdot s_1 \in S_2(\mathcal{A})$. Dann existiert ein w aus W , so daß $wg \cdot s_2 = \mathcal{C}_2$ gilt. Also ist $\text{Bahn}_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_2) = S_2(\mathcal{B})$. \square

Obige Aussage ergibt sich auch direkt. Jedem 2-Simplex $\{v_0, v_1, v_2\}$ ist eine geordnete, fast-normierte Basis (b_1, b_2, b_3) zugeordnet, so daß nach entsprechender Umordnung $v_0 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$, $v_1 = \langle b_1, b_2, \pi b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$ und $v_2 = \langle b_1, \pi b_2, \pi b_3 \rangle_{\mathcal{O}}$ gilt. Da $GL^0(\mathcal{K})$ transitiv auf den fast-normierten Basen operiert, operiert sie auch transitiv auf den 2-Simplizes in \mathcal{B} .

Der im Text verwandte Beweis hat den Vorteil, daß er einen tieferen Einblick in die $GL^0(\mathcal{K})$ und ihre Operation auf \mathcal{B} gibt.

Der nächste Satz zeigt, daß der Fundamentalbereich der $GL^0(\mathcal{K})$, im Gegensatz zum Fundamentalbereich der $GL(\mathcal{K})$, ein Simplicialkomplex ist.

Satz 2.40 *Die Seiten des Standard-2-Simplex bilden einen Fundamentalbereich zur Operation der $GL^0(\mathcal{K})$ auf \mathcal{B} .*

Beweis: Da unter $GL^0(\mathcal{K})$ jeder 2-Simplex in \mathcal{C}_2 transformiert werden kann, kann jeder 0- oder 1-Simplex in eine Seite von \mathcal{C}_2 überführt werden. Diese Seiten haben unterschiedliche Typen, und der Typ ist invariant unter $GL^0(\mathcal{K})$. Daher sind die Seiten inäquivalent unter $GL^0(\mathcal{K})$, und es folgt die Aussage. \square

Definition 2.41 *Wir definieren*

$$\tilde{N} := \text{MON}(\mathcal{K}) \cap GL^0(\mathcal{K}) .$$

Bemerkung: Für alle $a \in \mathcal{K}$ mit $a^3 = 1$ gilt, daß $v(a^3)$ und damit auch $v(a)$ gleich Null ist. Also liegt ein solches a in \mathcal{O}^* , und $(Z(\mathcal{K}) \cap GL^0(\mathcal{K}))$ ist eine Teilmenge von $GL(\mathcal{O})$.

Da für jedes Objekt \star aus \mathcal{B} gilt, daß

$$\text{Fix}_{GL^0(\mathcal{K})}(\star) = \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}(\star) \cap GL^0(\mathcal{K})$$

ist, ergibt sich nach den Aussagen des Abschnitts 2.2 der folgende Satz:

Satz 2.42 Die Fixgruppen der Standardobjekte in $GL^0(\mathcal{K})$ haben folgende Gestalt:

- (i) $Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{00}) = GL(\mathcal{O})$,
- (ii) $Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{01}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \pi^{-1}a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \pi^{-1}a_{23} \\ \pi a_{31} & \pi a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid (a_{cd})_{1 \leq c, d \leq 3} \in GL(\mathcal{O}) \right\}$,
- (iii) $Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{02}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \pi^{-1}a_{12} & \pi^{-1}a_{13} \\ \pi a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \pi a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid (a_{cd})_{1 \leq c, d \leq 3} \in GL(\mathcal{O}) \right\}$,
- (iv) $Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{10}) = P_1$,
- (v) $Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{11}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \pi^{-1}a_{13} \\ \pi a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \pi a_{31} & \pi a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid (a_{cd})_{1 \leq c, d \leq 3} \in GL(\mathcal{O}) \right\}$,
- (vi) $Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{12}) = P_2$,
- (vii) $Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_2) = I$,
- (viii) $Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{A}) = \tilde{N}$.

Wie im Fall der $GL(\mathcal{K})$ erhalten wir wieder eine Beschreibung verschiedener Objekte in \mathcal{B} .

$$\begin{aligned}
\text{Knoten vom Typ 0} &\longleftrightarrow GL^0(\mathcal{K})/GL(\mathcal{O}), \\
\text{Knoten vom Typ 1} &\longleftrightarrow GL^0(\mathcal{K})/Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{01}), \\
\text{Knoten vom Typ 2} &\longleftrightarrow GL^0(\mathcal{K})/Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{02}), \\
\text{Kanten vom Typ } \{0,1\} &\longleftrightarrow GL^0(\mathcal{K})/P_1, \\
\text{Kanten vom Typ } \{0,2\} &\longleftrightarrow GL^0(\mathcal{K})/P_2, \\
\text{Kanten vom Typ } \{1,2\} &\longleftrightarrow GL^0(\mathcal{K})/Fix_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{11}), \\
\text{2-Simplizes in } \mathcal{B} &\longleftrightarrow GL^0(\mathcal{K})/I, \\
\text{Apartments in } \mathcal{B} &\longleftrightarrow GL^0(\mathcal{K})/\tilde{N}.
\end{aligned}$$

Da W transitiv auf $S_2(\mathcal{A})$ operiert und der Schnitt $W \cap I$ trivial ist, erhalten wir noch die Korrespondenz

$$S_2(\mathcal{A}) \longleftrightarrow W.$$

Es ist klar, daß $GL^0(\mathcal{K})$ auf den Weylkammern nicht transitiv operiert, da bereits die Operation auf den Knoten nicht transitiv ist.

Wir werden nun die Bruhat-Zerlegung der Gruppe $GL^0(\mathcal{K})$ bestimmen. Dazu definieren wir zu einer Matrix $A \in GL^0(\mathcal{K})$ die Menge

$$J_A := \left\{ (i, j) \mid \begin{array}{l} a_{kj} = 0 \text{ für alle } 1 \leq k \leq 3, k \neq i, \\ a_{il} = 0 \text{ für alle } 1 \leq l \leq 3, l \neq j \end{array} \right\}.$$

Insbesondere ist für jedes (i, j) aus J_A der Eintrag a_{ij} ungleich Null. Wir zeigen das Lemma

Lemma 2.43 Zu jeder Matrix A aus $GL^0(\mathcal{K})\text{-}MON(\mathcal{K})$ existieren Matrizen M, N aus I mit

$$J_{M \cdot A \cdot N} \supset J_A \text{ und } |J_{M \cdot A \cdot N}| = |J_A| + 1.$$

Beweis: Für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ und für alle $\alpha \in \mathcal{K}$ definieren wir $M(i, j, \alpha)$ als die Matrix mit den Einträgen

$$m_{xy} = \begin{cases} 1 & : & x = y \\ \alpha & : & x = i, y = j \\ 0 & : & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es gilt also

$$M(i, j, \alpha) \in I \iff \begin{cases} i < j \text{ und } \alpha \in \mathcal{O} \\ \text{oder } i > j \text{ und } \alpha \in \pi\mathcal{O} \end{cases}.$$

Multipliziert man $M(i, j, \alpha)$ von links an eine Matrix A , so wird zur i -ten Zeile von A das α -fache der j -ten Zeile hinzuaddiert. Alle anderen Zeilen von A bleiben unverändert. Analog gilt für die Multiplikation von rechts, daß das α -fache der i -ten Spalte zur j -ten Spalte hinzuaddiert wird und alle anderen Spalten von A unverändert bleiben. Sei (x, y) aus J_A .

$$A = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{xy} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Dann stellen wir fest, daß für alle $i \neq x$ im Produkt

$$M(i, j, \alpha) \cdot A$$

die Zeile x und die Spalte y von A nicht verändert wird. Analog gilt für $j \neq y$, daß bei Rechtsmultiplikation

$$A \cdot M(i, j, \alpha)$$

die Zeile x und die Spalte y unverändert bleiben.

Wir zeigen nun, daß wir in A einen Eintrag a_{xy} finden können, so daß man jeden Eintrag in der Zeile x und in der Spalte y durch Multiplikation mit Matrizen aus I zu Null transformieren kann. Sei

$$r = \min\{v(a_{ij}) \mid (i, j) \notin J_A\}.$$

Ein solches (i, j) existiert, da A nach Voraussetzung keine monomiale Matrix ist. Wir wählen die Indizes x und y als

$$\begin{aligned} x &= \max\{i \in \{1, 2, 3\} \mid \exists (i, j) \notin J_A \text{ mit } v(a_{ij}) = r\} \\ y &= \min\{j \in \{1, 2, 3\} \mid \exists (x, j) \notin J_A \text{ mit } v(a_{xj}) = r\}. \end{aligned}$$

Wir wählen also von allen Einträgen mit minimaler Bewertung die aus, die in der niedrigsten Zeile stehen. Gibt es mehrere in dieser Zeile, so wählen wir das am weitesten links stehende aus.

Nun müssen wir zeigen, daß wir zu jedem Eintrag $a_{xi} \neq 0$ mit $i \neq y$ und jedem Eintrag $a_{jy} \neq 0$ mit $j \neq x$ eine Matrix N aus I finden können, so daß im Produkt von N und A der entsprechende Eintrag annulliert wird. Wir unterscheiden vier Fälle:

- (i) Der Eintrag $a_{xn} \neq 0$ mit $n < y$ ist zu annullieren, d.h. wir sind in folgender Situation

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{xn} & \cdots & a_{xy} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Nach Wahl von a_{xy} ist $v(a_{xn}) > v(a_{xy})$, und daher ist $\frac{a_{xn}}{a_{xy}} \in \pi\mathcal{O}$. Dann ist

$$M(y, n, -\frac{a_{xn}}{a_{xy}}) \in I$$

und

$$\left(A \cdot M(y, n, -\frac{a_{xn}}{a_{xy}}) \right)_{xn} = 0.$$

- (ii) Es sei $a_{xn} \neq 0$ mit $n > y$ zu annullieren, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{xy} & \cdots & a_{xn} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Nach Wahl von a_{xy} ist $v(a_{xy}) \leq v(a_{xn})$, d.h. $\frac{a_{xn}}{a_{xy}} \in \mathcal{O}$. Da $n > y$ ist, ist

$$M(y, n, -\frac{a_{xn}}{a_{xy}}) \in I$$

und

$$\left(A \cdot M(y, n, -\frac{a_{xn}}{a_{xy}}) \right)_{xn} = 0.$$

- (iii) Wir betrachten $a_{ny} \neq 0$ mit $n < x$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & & \\ \cdots & a_{ny} & \cdots & \\ & \vdots & & \\ \cdots & a_{xy} & \cdots & \\ & \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Dann ist $v(a_{ny}) \geq v(a_{xy})$. Da n kleiner x ist, ist

$$M(n, x, -\frac{a_{ny}}{a_{xy}}) \in I,$$

und es ist

$$\left(M(n, x, -\frac{a_{ny}}{a_{xy}}) \cdot A \right)_{ny} = 0.$$

- (iv) Wir betrachten $a_{ny} \neq 0$ mit $n > x$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & & \\ \cdots & a_{ny} & \cdots & \\ & \vdots & & \\ \cdots & a_{xn} & \cdots & \\ & \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Dann ist $v(a_{ny}) > v(a_{xy})$, d.h.

$$M(n, x, -\frac{a_{ny}}{a_{xy}}) \in I$$

und

$$\left(M(n, x, -\frac{a_{ny}}{a_{xy}}) \cdot A \right)_{ny} = 0 .$$

Indem wir diese vier Operationen oft genug ausführen, erhalten wir Matrizen M, N aus I , so daß im Produkt

$$M \cdot A \cdot N$$

alle Einträge in der Zeile x und der Spalte y mit Ausnahme von a_{xy} gleich Null sind. Nach den Überlegungen vom Anfang wird J_A durch diese Multiplikationen nicht kleiner. Da A keine monomiale Matrix ist, wird mindestens ein Eintrag in A zu Null, und daher ist

$$J_{M \cdot A \cdot N} = J_A \dot{\cup} \{(x, y)\} .$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Wir erhalten den Satz

Satz 2.44 *Sei A aus $GL^0(\mathcal{K})$. Dann existieren M, N aus I mit*

$$M \cdot A \cdot N \in \mathcal{W} .$$

Beweis: Indem man das obige Lemma endlich oft anwendet, erhält man Matrizen $\tilde{M}, \tilde{N} \in I$ mit $|J_{\tilde{M} \cdot A \cdot \tilde{N}}| = 3$, also $\tilde{M} \cdot A \cdot \tilde{N} = B \in MON(\mathcal{K})$. Definiert man $D_k(\alpha)$ als die Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonaleinträge alle Eins sind und deren Eintrag an der Stelle (k, k) gleich α ist, so liegt für alle a aus \mathcal{K} die Matrix

$$D_k\left(\frac{\pi^{v(a)}}{a}\right)$$

in I , und für alle Einträge b_{ij} ungleich Null ist

$$\left(D_i\left(\frac{\pi^{v(b_{ij})}}{b_{ij}}\right) \cdot B \right)_{ij} = \pi^{v(b_{ij})} .$$

Daher erhalten wir für entsprechende α_i

$$D_3(\alpha_3) \cdot D_2(\alpha_2) \cdot D_1(\alpha_1) \cdot \tilde{M} \cdot A \cdot \tilde{N} \in \mathcal{W} .$$

Mit

$$M = D_3(\alpha_3) \cdot D_2(\alpha_2) \cdot D_1(\alpha_1) \cdot \tilde{M}$$

und

$$N = \tilde{N}$$

folgt die Aussage. \square

Wir erhalten folgendes Ergebnis

Satz 2.45 *Die Gruppe $GL^0(\mathcal{K})$ besitzt folgende disjunkte Zerlegung in Doppelnebenklassen.*

$$GL^0(\mathcal{K}) = \dot{\bigcup}_{w \in W} I w I .$$

Beweis: Es ist lediglich zu zeigen, daß diese Zerlegung disjunkt ist. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Seien $w_1 \neq w_2$, Iw_1I und Iw_2I nicht disjunkt. Dann existieren $i_1, i_2 \in I$ mit

$$i_1 w_1 = w_2 i_2 .$$

Betrachtet man die Operation auf \mathcal{B} , so erhält man

$$i_1(w_1 \mathcal{C}_2) = w_2(i_2 \mathcal{C}_2) = w_2 \mathcal{C}_2 .$$

Da $S_2(\mathcal{A})$ in Bijektion zur Weylgruppe W steht, sind $w_1 \mathcal{C}_2$ und $w_2 \mathcal{C}_2$ unterschiedliche 2-Simplizes in \mathcal{A} . Also müssen wir die Annahme zum Widerspruch führen, daß zwei 2-Simplizes aus \mathcal{A} äquivalent unter I sind. Dies gelingt uns, indem wir die Knoten dieser 2-Simplizes betrachten. Seien $[\alpha, \beta, \gamma]$ und $[a, b, c]$ Knoten der beiden 2-Simplizes vom gleichen Typ. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß

$$\alpha + \beta + \gamma = a + b + c$$

gilt. Da i_1 den Typ erhält, muß $i_1[\alpha, \beta, \gamma] = [a, b, c]$ sein, d.h. i_1 muß folgender Gleichung mit $M \in GL(\mathcal{O})$ genügen

$$\underbrace{i_1 \cdot \text{diag}(\pi^\alpha, \pi^\beta, \pi^\gamma)}_{:= A} = \underbrace{\text{diag}(\pi^a, \pi^b, \pi^c) \cdot M \cdot \text{diag}(\pi^h, \pi^h, \pi^h)}_{:= B} .$$

Aus $v(\det(A)) = v(\det(B))$ erhalten wir $h = 0$. Da die Hauptdiagonalelemente von i_1 alle Bewertung Null haben, erhalten wir durch Vergleich der Bewertungen der Hauptdiagonaleinträge von A und B folgendes System von Gleichungen

$$\alpha = v(a_{11}) = v(b_{11}) = a + v(m_{11})$$

$$\beta = v(a_{22}) = v(b_{22}) = b + v(m_{22}) \quad \cdot$$

$$\gamma = v(a_{33}) = v(b_{33}) = c + v(m_{33})$$

Ist eines der m_{kk} gleich Null, so ist das System unlösbar. Daher müssen alle $m_{kk} \neq 0$ sein. Dann ist $v(m_{kk})$ immer größer oder gleich Null, und es ergibt sich

$$\alpha \geq a, \quad \beta \geq b, \quad \gamma \geq c .$$

Da aber nach Voraussetzung $\alpha + \beta + \gamma = a + b + c$ gilt, folgt

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c .$$

Also sind die jeweiligen Knoten vom gleichem Typ der Simplizes $w_1 \mathcal{C}_2$ und $w_2 \mathcal{C}_2$ immer identisch. Daher ist

$$w_1 \mathcal{C}_2 = w_2 \mathcal{C}_2$$

und es folgt

$$w_1 = w_2 .$$

Damit ist der Widerspruch gezeigt, und es folgt die Aussage des Satzes. □

Diese Zerlegung wird als Bruhat-Zerlegung von $GL^0(\mathcal{K})$ bezeichnet.

Bemerkung: Sei s eine Seite von \mathcal{C}_2 , und $S' \subset S$ die Menge der Spiegelungen σ_i , die s festlassen. Dann gilt

$$\text{Fix}_{GL^0(\mathcal{K})}(s) = \bigcup_{w \in \langle S' \rangle} IwI .$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
P_1 &= I\sigma_1 I \\
P_2 &= I\sigma_2 I \\
\text{Fix}_{GL^0(\mathcal{K})}(\mathcal{C}_{11}) &= I\sigma_3 I .
\end{aligned}$$

Satz 2.46 *Auf $\{(s, A) \mid A \text{ ist Apartment, } s \text{ ist 2-Simplex in } A\}$ operiert $GL^0(\mathcal{K})$ transitiv.*

Beweis: Sei (s, A) beliebig. Es genügt zu zeigen, daß ein $h \in GL^0(\mathcal{K})$ mit $h(s, A) = (\mathcal{C}_2, \mathcal{A})$ existiert.

Es existiert ein g aus $GL^0(\mathcal{K})$ mit $g \cdot A = \mathcal{A}$ und ein w aus W mit $w \cdot g \cdot s = \mathcal{C}_2$. Da W eine Untergruppe von \tilde{N} ist, folgt:

$$w g \cdot (s, A) = (\mathcal{C}_2, \mathcal{A}).$$

□

Korollar 2.47 *Für alle $s \in S_2(\mathcal{B})$ operiert $\text{Fix}_{GL^0(\mathcal{K})}(s)$ transitiv auf den Apartments, die s enthalten.*

Beweis: Seien A_1, A_2 zwei Apartments, die s enthalten. Dann existiert nach obigem Satz ein g aus $GL^0(\mathcal{K})$ mit $g \cdot (s, A_1) = (s, A_2)$. Also liegt g in $\text{Fix}_{GL^0(\mathcal{K})}(s)$. □

Wir haben die Bruhat-Zerlegung der $GL^0(\mathcal{K})$ hergeleitet, um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 2.48 *Zu je zwei 2-Simplizes aus \mathcal{B} gibt es ein Apartment, das beide enthält.*

Beweis: Da $GL^0(\mathcal{K})$ transitiv auf den 2-Simplizes operiert, kann o.B.d.A. einer der Simplizes als \mathcal{C}_2 gewählt werden. Sei s der andere Simplex. Dann existiert ein g aus $GL^0(\mathcal{K})$ mit $g \cdot \mathcal{C}_2 = s$. Nach der Bruhat-Zerlegung läßt sich g als $i_1 \cdot w \cdot i_2$ schreiben, wobei w aus W und i_1, i_2 aus I sind. Dies impliziert

$$\begin{aligned}
s &= i_1 \cdot w \cdot i_2 \cdot \mathcal{C}_2 = i_1 \cdot w \cdot \mathcal{C}_2 \in i_1 \cdot \mathcal{A} \\
\text{und } \mathcal{C}_2 &= i_1 \cdot \mathcal{C}_2 \in i_1 \cdot \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Somit ist $i_1 \cdot \mathcal{A}$ das gesuchte Apartment. □

Im Beweis von 3.17 werden wir folgendes Korollar benötigen:

Korollar 2.49 *Zu zwei 2-Simplizes s und t aus \mathcal{B} existiert immer eine Galerie, die in s startet und in t endet.*

Beweis: Es existiert ein $g \in GL^0(\mathcal{K})$ mit $g \cdot s = \mathcal{C}_2$ und ein Apartment A , daß \mathcal{C}_2 und $g \cdot t$ enthält. Nach 2.47 existiert ein $i \in I$ mit $i \cdot g \cdot t \in A$. Da $i \cdot g \cdot s = g \cdot s$ ist, erhalten wir nach 2.30 eine Galerie

$$(g \cdot s = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = i \cdot g \cdot t) .$$

Dann ist

$$(s = g^{-1}x_0, g^{-1}i^{-1}x_1, g^{-1}i^{-1}x_2, \dots, g^{-1}i^{-1}x_n = t)$$

die gesuchte Galerie. □

Bemerkung: Könnten wir den Satz 2.48 ohne die Bruhat-Zerlegung beweisen, so könnten wir letztere wie folgt elegant zeigen: Zu einem beliebigen $g \in GL^0(\mathcal{K})$ betrachten wir den 2-Simplex $g \cdot \mathcal{C}_2$. Dann können wir annehmen, daß ein Apartment A existiert, daß $g \cdot \mathcal{C}_2$ und \mathcal{C}_2 enthält. Wir wählen nach Korollar 2.47 ein i aus I mit

$$i \cdot A = \mathcal{A} .$$

Dann liegt $i \cdot g \cdot \mathcal{C}_2$ in \mathcal{A} , d.h. es existiert ein $w \in W$ mit

$$i \cdot g \cdot \mathcal{C}_2 = w \cdot \mathcal{C}_2 .$$

Da I die Fixgruppe von \mathcal{C}_2 ist, gilt für das beliebig gewählte g

$$g \in i^{-1} \cdot w \cdot I \subset I \cdot w \cdot I .$$

Damit wäre die Zerlegung gezeigt. Die Eindeutigkeit des w müßte wieder “von Hand” nachgerechnet werden.

2.4 \mathcal{B} als Gebäude

Der Vollständigkeit halber zeigen wir noch, daß \mathcal{B} zu Recht als Gebäude bezeichnet wird. Die folgenden Definitionen sind dem Buch von Brown entnommen.

Definition 2.50 Sei W eine nicht notwendig endliche Gruppe, die von einer endlichen Teilmenge $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ erzeugt wird. Weiter habe jedes der σ_i die Ordnung 2. Dann heißt W eine Coxetergruppe. Zu einer Teilmenge I von $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet W_I das Erzeugnis der σ_i mit i aus I .

Definition 2.51 Zu einer Coxetergruppe W mit erzeugender Menge S definiert man einen Simplizialkomplex $\Sigma(W, S)$ durch

$$\mathcal{V}(\Sigma(W, S)) := \{\alpha W_I \mid \alpha \in W, |I| = n - 1\},$$

und

$$\{\alpha_1 W_{I_1}, \dots, \alpha_m W_{I_m}\} \in S(\Sigma(W, S)) \iff \bigcap_{j=1}^m \alpha_j W_{I_j} \neq \emptyset.$$

Ein Simplizialkomplex, der isomorph zu einem solchen $\Sigma(W, S)$ ist, heißt Coxeterkomplex.

Definition 2.52 Ein Simplizialkomplex Δ heißt Gebäude, falls eine Menge von Unterkomplexen Σ (genannt Apartments) existiert, die den folgenden Bedingungen genügen:

- (i) Jedes Apartment ist ein Coxeterkomplex.
- (ii) Seien $s, t \in S(\Delta)$. Dann existiert ein Apartment Σ , daß s und t enthält.
- (iii) Zu je zwei Apartments Σ und Σ' , die A und B enthalten, gibt es einen simplizialen Isomorphismus von Σ nach Σ' , der jeden Knoten von A und B festläßt.
- (iv) Δ ist die Vereinigung aller seiner Apartments.

Die Weylgruppe W ist eine Coxetergruppe mit erzeugender Menge $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Man kann zeigen daß das Standardapartment (und damit jedes Apartment) isomorph zu $\Sigma(W, S)$ ist. Die σ_i repräsentieren die Spiegelungen des Standardapartments an den durch die Seiten von \mathcal{C}_2 festgelegten Achsen. Ein 2-Simplex s entspricht dann der Folge von Spiegelungen σ_i , die benötigt werden, um \mathcal{C}_2 in s zu transformieren. Also ist (i) erfüllt.

Die Bedingung (ii) ist genau die Aussage des Satzes 2.48.

Bedingung (iii) verifizieren wir, indem wir eine Abbildung R von $S_2(\mathcal{B})$ auf $S_2(\mathcal{A})$ definieren. Zu jedem 2-Simplex s aus \mathcal{B} existiert ein g aus $GL^0(\mathcal{K})$, so daß $g \cdot \mathcal{C}_2 = s$. Dann existieren nach der Bruhat-Zerlegung i_1, i_2 aus I und ein w aus W mit $g = i_1 \cdot w \cdot i_2$. Das Bild von s unter R ist dann der 2-Simplex $w \cdot \mathcal{C}_2$ aus \mathcal{A} . Diese Abbildung ist wohldefiniert, da das Element w in der Bruhat-Zerlegung eindeutig ist.

Satz 2.53 *Seien A_1, A_2 Apartments, und s_1, s_2 seien 2-Simplizes im Schnitt der beiden Apartments. Dann existiert zwischen A_1 und A_2 ein Isomorphismus von Simplicialkomplexen, der jeden Knoten von s_1 und s_2 festläßt.*

Beweis: Sei $g \in GL^0(\mathcal{K})$ so gewählt, daß $g \cdot A_2 = \mathcal{A}$. Dann bewirkt g einen simplizialen Automorphismus von \mathcal{B} . Nun definiert man den gesuchten Isomorphismus als die Einschränkung der Funktion $g^{-1} \cdot R \cdot g : S_2(\mathcal{B}) \rightarrow S_2(\mathcal{B})$ auf A_1 . Da R in \mathcal{A} alle 2-Simplizes festläßt, gilt für alle $v \in (A_1 \cap A_2)$:

$$(g^{-1}Rg)(v) = g^{-1}R(g \cdot v) = g^{-1}(g \cdot v) = v$$

Also läßt die obige Abbildung insbesondere s_1 und s_2 fest. □

Nach Lemma 2.16 genügt \mathcal{B} auch Bedingung (iv). Also bezeichnen wir \mathcal{B} zu Recht als Gebäude.

Kapitel 3

Der Fundamentalbereich zu Γ

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die Standardweylkammer \mathcal{W} ein Fundamentalbereich der Operation von Γ auf \mathcal{B} ist. Um unnötigen Schreibaufwand zu vermeiden, wird folgende Dehomogenisierung vorgenommen. Wir bezeichnen die Knoten aus \mathcal{A} mit

$$[j, k] := [0, j, k] = [L_{0,j,k}].$$

Für alle t aus \mathbb{Z} stimmen die Gitterklassen $[i, j, k]$ und $[i + t, j + t, k + t]$ überein. Da auf diese Weise der erste Eintrag auf 0 normiert werden kann, ist die neue Bezeichnung sinnvoll.

Ein Knoten $[j, k]$ liegt genau dann in \mathcal{W} , wenn $0 \leq j \leq k$ gilt.

Weiter bezeichne für $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ die Schreibweise

$$\begin{pmatrix} * & \{i\} & \{j\} \\ 0 & * & \{k\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

die Menge aller Matrizen in Γ , die durch die gegebenen Bedingungen an ihre Einträge charakterisiert sind. Hierbei bezeichnet

- * : einen Eintrag aus \mathbb{F}_q
- $\{i\} \in \mathbb{Z}$: ein Polynom aus \mathcal{A} mit Grad kleiner oder gleich i
- 0 : die Null in \mathbb{F}_q

Die Symbole $*$ und $\{0\}$ haben also die gleiche Bedeutung. Im Fall i kleiner 0 genügt nur das Nullpolynom der Gradbedingung, da $\deg(0) = -v(0) = -\infty$ ist.

Symbole wie

$$\begin{pmatrix} * & * & \{i\} \\ * & * & \{j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ \{i\} & 0 & * \\ \{j\} & \{k\} & 0 \end{pmatrix}$$

sind analog zu verstehen. Zum Beispiel sind

$$\begin{pmatrix} * & \{-1\} & \{2\} \\ 0 & * & \{3\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & \{2\} \\ 0 & * & \{3\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} * & * & \{2\} \\ 0 & * & \{5\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \{0\} & \{2\} \\ 0 & * & \{5\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Definition 3.1 Für $j, k \in \mathbb{Z}$ bezeichnen

$$(i) \Gamma_{[j,k]} := \text{Fix}_\Gamma([j, k]).$$

$$(ii) \Gamma_{[j,k]}^B = \text{Fix}_{B(\mathbb{F}_q[T])}([j, k]).$$

Da Γ eine Untergruppe der $GL^0(\mathcal{K})$ ist, ergibt sich aus der Aussage 2.32 des letzten Kapitels folgendes Lemma:

Lemma 3.2 *Es ist*

$$(i) \Gamma_{[j,k]} = \text{Fix}_{\Gamma}(L_{0,j,k}).$$

$$(ii) \Gamma_{[j,k]}^B := \text{Fix}_{B(\mathbb{F}_q[T])}(L_{0,j,k}).$$

Ein Element aus Γ fixiert also eine Gitterklasse genau dann, wenn es ein (und damit jedes) Gitter aus der Klasse fixiert.

Für beliebige Knoten aus \mathcal{A} erhalten wir:

Satz 3.3 *Für alle $j, k \in \mathbb{Z}$ gilt:*

(i)

$$\Gamma_{[j,k]} = \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ \{-j\} & * & \{k-j\} \\ \{-k\} & \{j-k\} & * \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\Gamma_{[j,k]}^B = \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wie üblich gilt

$$\Gamma_{[j,k]} = \text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}([j, k]) \cap \Gamma.$$

In 2.22 wurde $\text{Fix}_{GL(\mathcal{K})}([j, k])$ angegeben, und es folgt

$$\Gamma_{[j,k]} = \left\{ \begin{pmatrix} v=0 & v \geq -j & v \geq -k \\ v \geq j & v=0 & v \geq (j-k) \\ v \geq k & v \geq (k-j) & v=0 \end{pmatrix} \right\} \cdot Z(\mathcal{K}) \cap \Gamma.$$

Da weiter

$$\{\alpha \in \mathcal{K} \mid v(\alpha) \geq -i\} \cap A = \{p \in A \mid \text{deg}(p) \leq i\}$$

gilt, folgt die Aussage (i).

Die Aussage (ii) folgt, da $\Gamma_{[j,k]}^B$ der Schnitt der Gruppen $B(\mathbb{F}_q[T])$ und $\Gamma_{[j,k]}$ ist. \square

Während es aufwendig ist, eine geschlossene Formel für die Mächtigkeit von $\Gamma_{[j,k]}$ anzugeben, ist dies kein Problem für $\Gamma_{[j,k]}^B$.

Korollar 3.4 *Für alle $j, k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$|\Gamma_{[j,k]}^B| = (q-1)^3 \cdot q^{\max\{0, j+1\} + \max\{0, k+1\} + \max\{0, k-j+1\}}.$$

Beweis: Es gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |\{p \in A \mid \text{deg}(p) \leq i\}| &= \begin{cases} q^{i+1} & : -1 < i \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases} \\ &= q^{\max\{0, i+1\}} \end{aligned}$$

Mit der Beschreibung der Fixgruppen aus 3.3 folgt die Aussage. \square

Für die Knoten aus \mathcal{W} erhalten wir

Korollar 3.5 Sei $0 \leq i \leq j$. Dann gilt

$$\Gamma_{[j,k]} = \begin{cases} GL(\mathbb{F}_q) & : j = k = 0 \\ \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{j\} \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} & : 0 < j = k \\ \begin{pmatrix} * & * & \{k\} \\ * & * & \{k\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & : 0 = j < k \\ \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & : 0 < j < k \end{cases} .$$

Beweis: Der Beweis folgt durch Anwendung von 3.3. \square

Auf Seite 143 habe ich einen Ausschnitt von \mathcal{W} mit den Fixgruppen seiner Simplexe angegeben. Ich hoffe, daß dadurch das Verständnis der teilweise recht technischen Beweise erhöht wird.

Der Satz 3.3 zeigt, daß die entsprechenden Gruppen $\Gamma_{[j,k]}^B$ eine gleichmäßigere Struktur haben.

Wie in dieser Arbeit üblich, betrachten wir die S_3 in Γ eingebettet als Permutationsmatrizen. Dann erhalten wir folgende Zerlegung

Satz 3.6 Für alle $0 \leq j \leq k$ gilt:

$$\Gamma_{[j,k]} = B(\mathbb{F}_q) \cdot \text{Fix}_{S_3}([j,k]) \cdot \Gamma_{[j,k]}^B .$$

Beweis: Wir wissen bereits, daß die $B(\mathbb{F}_q)$ in allen $\Gamma_{[j,k]}$ mit $0 \leq j \leq k$ enthalten ist. Um die geforderte Zerlegung zu erhalten, unterscheiden wir folgende Fälle:

- (i) $0 < j < k$: Es ist $\text{Fix}_{S_3}([j,k]) = \{1\}$ und $\Gamma_{[j,k]} = \Gamma_{[j,k]}^B$. Daher ist die Aussage klar.
- (ii) $0 = j < k$: Dann ist

$$\text{Fix}_{S_3}([0,k]) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\Gamma_{[0,k]} = \begin{pmatrix} * & * & \{k\} \\ * & * & \{k\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} .$$

Sei $M \in \Gamma_{[0,k]}$ beliebig. Falls m_{21} gleich 0 ist, liegt M in $\Gamma_{[0,k]}^B$ und die Aussage ist gezeigt. Falls m_{21} ungleich 0 ist, so sind $\frac{m_{11}}{m_{21}}$ und $\frac{m_{22}}{m_{21}}$ aus \mathbb{F}_q und es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_{11}}{m_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_{22}}{m_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & 0 & \alpha_1 \\ 0 & * & \alpha_2 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} ,$$

wobei α_1, α_2 zwei Polynome vom Grad kleiner oder gleich k sind. Durch Auflösen nach M folgt die Aussage.

- (iii) $0 < j = k$: Analog zu (ii).

- (iv) $0 = i = j$: Die Aussage folgt aus der Bruhat-Zerlegung der linearen Gruppe über einem beliebigen Körper K .

$$GL(K) = \dot{\bigcup}_{w \in S_3} B(K)wB(K)$$

(vgl. [Bro89], Kapitel V).

□

Korollar 3.7 Sei $0 \leq j \leq k$. Dann gilt

$$|\Gamma_{[j,k]}| = \begin{cases} (q-1)^3 \cdot q^3 \cdot (q+1) \cdot (q^2 + q + 1) & : 0 = j = k \\ (q-1)^3 \cdot (q+1) \cdot q^{2k+3} & : 0 = j < k \\ (q-1)^3 \cdot (q+1) \cdot q^{2k+3} & : 0 < j = k \\ (q-1)^3 \cdot q^{2k+3} & : 0 < j < k \end{cases} .$$

Beweis: Wir betrachten die vier Fälle getrennt.

- (i) $0 = j = k$:

$$\begin{aligned} |\Gamma_{[0,0]}| &= |GL(3, \mathbb{F}_q)| = (q^3 - 1) \cdot (q^3 - q) \cdot (q^3 - q^2) \\ &= (q-1)^3 \cdot q^3 \cdot (q+1) \cdot (q^2 + q + 1) \end{aligned}$$

- (ii) $0 = j < k$:

$$\begin{aligned} |\Gamma_{[0,k]}| &= |GL(2, \mathbb{F}_q)| \cdot (q-1) \cdot q^{2k+2} = (q^2 - 1) \cdot (q^2 - q) \cdot (q-1) \cdot q^{2k+2} \\ &= (q-1)^3 \cdot (q+1) \cdot q^{2k+3} \end{aligned}$$

- (iii) $0 < j = k$: Analog zu (ii).

- (iv) $0 < j < k$: Klar aufgrund der Diagonalgestalt.

□

Analog erhält man

Korollar 3.8 Sei $0 \leq j \leq k$. Dann gilt

$$|\Gamma_{[j,k]}^B| = (q-1)^3 \cdot q^{2k+3} .$$

Beweis: Klar nach Satz 3.3.

□

Nun muß leider noch ein technisches Lemma bewiesen werden.

Lemma 3.9 Zu jeder Matrix M aus Γ existieren Matrizen B_1, B_2 aus $B(\mathbb{F}_q)$, so daß im Produkt

$$B_1 \cdot M \cdot B_2$$

auf der Hauptdiagonalen nur von Null verschieden Einträge stehen.

Beweis: Für $1 \leq i < j \leq 3$ bezeichne $M(i, j)$ die 3×3 -Matrix mit den Einträgen

Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß in Gleichung (*) die Matrix X auf der Hauptdiagonalen nur Einträge ungleich 0 besitzt.

Indem wir die Bewertung der Determinanten in (*) betrachten, erhalten wir die Gleichung

$$j + k = j + a + k + b + 3h$$

und damit ist

$$a = -b - 3h$$

Dies setzen wir in (*) ein und multiplizieren beide Seiten aus. Dann erhalten wir folgende Beziehung

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \pi^j x_{12} & \pi^k x_{13} \\ x_{21} & \pi^j x_{22} & \pi^k x_{23} \\ x_{31} & \pi^j x_{32} & \pi^k x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^h m_{11} & \pi^h m_{12} & \pi^h m_{13} \\ \pi^{j-b-2h} m_{21} & \pi^{j-b-2h} m_{22} & \pi^{j-b-2h} m_{23} \\ \pi^{k+b+h} m_{31} & \pi^{k+b+h} m_{32} & \pi^{k+b+h} m_{33} \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich der Bewertungen der Hauptdiagonaleinträge erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} v(x_{11}) &= h + v(m_{11}) \\ v(x_{22}) &= -b - 2h + v(m_{22}) \\ v(x_{33}) &= b + h + v(m_{33}). \end{aligned}$$

Indem wir die zweite Zeile zur dritten hinzuaddieren, ergibt sich

$$\begin{aligned} v(x_{11}) &= h + v(m_{11}) \\ v(x_{22}) &= -b - 2h + v(m_{22}) \\ v(x_{33}) &= b + h + v(m_{33}) \\ v(x_{22}) + v(x_{33}) &= v(m_{22}) + v(m_{33}) - h. \end{aligned}$$

Da x_{11}, x_{22} und x_{33} nach den vorangegangenen Überlegungen Polynome ungleich dem Nullpolynom sind, ist ihre Bewertung kleiner oder gleich 0. Demgegenüber ist die Bewertung der $m_{11}, m_{22}, m_{33} \in \mathcal{O}$ immer größer oder gleich 0. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 \geq v(x_{11}) &= h + v(m_{11}) \geq h \\ 0 \geq v(x_{22}) &= -b - 2h + v(m_{22}) \geq -b - 2h \\ 0 \geq v(x_{33}) &= b + h + v(m_{33}) \geq b + h \\ 0 \geq v(x_{22}) + v(x_{33}) &= v(m_{22}) + v(m_{33}) - h \geq -h. \end{aligned}$$

Aus der ersten und vierten Zeile erhalten wir, daß h gleich 0 ist. Daraus ergibt sich aus den Zeilen zwei und drei, daß dies ebenfalls für b gilt. Aufgrund der Beziehung $a = -b - 3h$ ist auch a gleich 0. Damit ist gezeigt, daß ein Knoten aus \mathcal{W} unter Γ nur zu sich selbst äquivalent ist. \square

Korollar 3.11 *Alle Simplizes in \mathcal{W} sind inäquivalent unter Γ .*

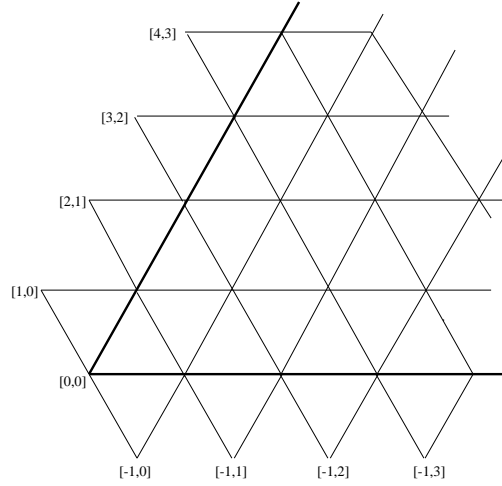
Beweis: Zwei Simplizes sind genau dann äquivalent, wenn die Mengen ihrer Knoten äquivalent sind. Da nach 3.10 keine zwei Knoten aus \mathcal{W} unter Γ äquivalent sind, folgt die Aussage. \square

Wir müssen nun zeigen, daß sich jeder Simplex aus \mathcal{B} unter Γ in einen Simplex aus \mathcal{W} transformieren läßt. Um den technischen Aufwand zu verringern, betrachten wir erst die Operation der Gruppe $B(\mathbb{F}_q[T])$ und nutzen dann aus, daß $B(\mathbb{F}_q[T])$ und S_3 die Gruppe Γ erzeugen. Dazu definieren wir den Unterkomplex

Definition 3.12

$$\widetilde{\mathcal{W}} := \bigcup_{s \in S_1(\mathcal{W})} \mathcal{L}\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(s)$$

$\widetilde{\mathcal{W}}$ ist also der Komplex, den man erhält, indem man zu \mathcal{W} jeden 2-Simplex aus \mathcal{A} hinzunimmt, der mit einer 1-Seite an \mathcal{W} angrenzt. Er hat den Vorteil, daß der Link jedes 1-Simplex aus \mathcal{W} in $\widetilde{\mathcal{W}}$ die gleiche Struktur hat.



Im Hinblick auf Satz 3.16 müssen die Fixgruppen der neu hinzugekommenen Knoten berechnet werden.

Lemma 3.13 Für $0 \leq k$ gilt:

(i)

$$\Gamma_{[-1,k]}^B == \begin{pmatrix} * & 0 & \{k\} \\ 0 & * & \{k+1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\Gamma_{[k+1,k]}^B == \begin{pmatrix} * & \{k+1\} & \{k\} \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Beweis:

(i) Die Aussage folgt aus 3.3, da

$$\begin{pmatrix} * & \{-1\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k - (-1)\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & \{k\} \\ 0 & * & \{k+1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

ist.

(ii) Analog zu (i).

□

Korollar 3.14 Sei $0 \leq k$. Dann gilt

$$|\Gamma_{[-1,k]}^B| = |\Gamma_{[k+1,k]}^B| = (q-1)^3 \cdot q^{2k+3}.$$

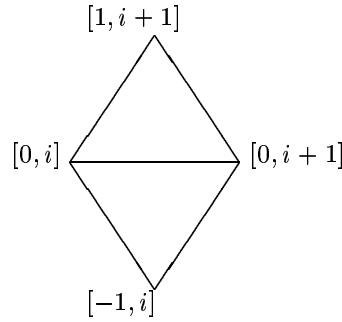
Beweis: Die Aussage folgt direkt aus 3.4. □

Es folgt ein weitere technisches Lemma.

Lemma 3.15 *Für alle 1-Simplizes s aus \mathcal{W} sind alle 2-Simplizes $t \in S_2(\mathcal{LK}_{\mathcal{A}}(s))$ inäquivalent unter $Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(s)$.*

Beweis: Der Link in \mathcal{A} eines 1-Simplex $s \in S_1\mathcal{W}$ enthält genau zwei 2-Simplizes. Die Aussage folgt aus 3.10, falls der Link vollständig in \mathcal{W} liegt. Es bleiben also die Fälle, daß s auf einem der Ränder von \mathcal{W} liegt.

- (i) Sei $s = \{[0, i], [0, i + 1]\}$ mit $i \geq 0$. Der Link von s in $\widetilde{\mathcal{W}}$ enthält die folgende Knoten: $\{[0, i], [0, i + 1], [-1, i], [1, i + 1]\}$.

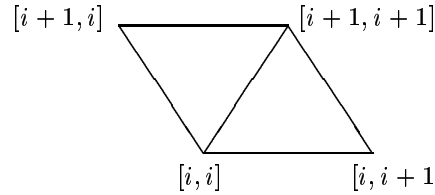


Da die Operation von $Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(s)$ den Typ der Knoten erhält, muß nur gezeigt werden daß $[-1, i]$ und $[1, i + 1]$ unter $Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(s)$ nicht äquivalent sind. Da aber

$$|\Gamma_{[-1, i]}^B| = (q - 1)^3 \cdot q^{2i+3} \neq (q - 1)^3 \cdot q^{2i+5} = |\Gamma_{[1, i+1]}^B|$$

ist, sind die beiden Fixgruppen sogar unter $B(\mathbb{F}_q[T])$ nicht konjugiert, und daher sind die beiden Knoten nicht äquivalent unter $B(\mathbb{F}_q[T])$. Dann können sie auch nicht unter $Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(s)$ äquivalent sein.

- (ii) Sei $s = \{[i, i], [i + 1, i + 1]\}$ für ein $i \geq 0$. Der Beweis verläuft analog zu (i). Die Knoten des Link von s in $\widetilde{\mathcal{W}}$ lauten: $\{[i + 1, i], [i, i], [i + 1, i + 1], [i, i + 1]\}$.



Auch hier reicht es zu zeigen, daß $[i, i + 1]$ und $[i + 1, i]$ unter $B(\mathbb{F}_q[T])$ nicht äquivalent sind. Dies folgt mit den gleichen Argumentation wie in (i), da

$$|\Gamma_{[i+1, i]}^B| = (q - 1)^3 \cdot q^{2i+3} \neq (q - 1)^3 \cdot q^{2i+5} = |\Gamma_{[i, i+1]}^B|$$

ist.

Nun sind wir bereit, den entscheidenden Satz diese Kapitels zu beweisen.

Satz 3.16 *Sei $s \in S_1(\mathcal{W})$. Dann existiert für alle 2-Simplizes t aus $\mathcal{LK}_{\mathcal{B}}(s)$ ein $g \in Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(s)$, so daß $g \cdot t$ in $\widetilde{\mathcal{W}}$ liegt.*

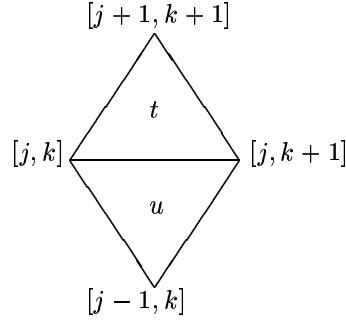
Beweis: Im Beweis bezeichnen wir $Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(s)$ kurz mit $Stab$.

Es liegt folgende Beweisidee zugrunde: Jede Kante s in \mathcal{W} ist in \mathcal{B} Seite von genau $q + 1$ unterschiedlichen 2-Simplizes. Von diesen liegen genau zwei in $\widetilde{\mathcal{W}}$. Diese seien mit t und u bezeichnet. Die endliche Gruppe $Stab$ operiert auf $S_2(\mathcal{LK}_{\mathcal{B}}(s))$, und nach den oben gezeigten Sätzen und Lemmata sind u und t inäquivalent unter dieser Operation. Es reicht also zu zeigen, daß

$$|Bahn_{Stab}(t)| + |Bahn_{Stab}(u)| = \frac{|Stab|}{|Fix_{Stab}(t)|} + \frac{|Stab|}{|Fix_{Stab}(u)|} \stackrel{!}{=} q + 1$$

gilt. Wir unterscheiden drei Arten von Kanten in \mathcal{W} .

(i) $s = \{[j, k], [j, k + 1]\}$. Dann ist $\mathcal{LK}_{\widetilde{\mathcal{W}}}(s)$



mit

$$\begin{aligned} t &:= \{[j, k], [j, k + 1], [j + 1, k + 1]\} \text{ und} \\ u &:= \{[j, k], [j, k + 1], [j - 1, k]\} \\ Stab &= \Gamma_{[j, k]}^B \cap \Gamma_{[j, k + 1]}^B = \Gamma_{[j, k]}^B. \end{aligned}$$

Die Berechnung von $Fix_{Stab}(t)$ liefert

$$\begin{aligned} Fix_{Stab}(t) &= Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(t) \cap Stab \\ &= \Gamma_{[j, k]}^B \cap \Gamma_{[j, k + 1]}^B \cap \Gamma_{[j + 1, k + 1]}^B \cap Stab \\ &= \Gamma_{[j + 1, k + 1]}^B \cap Stab \\ &= \begin{pmatrix} * & \{j + 1\} & \{k + 1\} \\ 0 & * & \{k - j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k - j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\ &= Stab. \end{aligned}$$

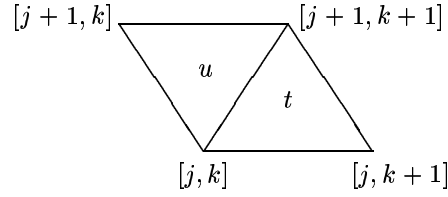
Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned} Fix_{Stab}(u) &= Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(u) \cap Stab \\ &= \Gamma_{[j - 1, k]}^B \cap Stab \\ &= \begin{pmatrix} * & \{j - 1\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k - j + 1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k - j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & \{j - 1\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k - j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{|Stab|}{|Fix_{Stab}(t)|} + \frac{|Stab|}{|Fix_{Stab}(u)|} = \frac{(q - 1)^3 \cdot q^{2k+3}}{(q - 1)^3 \cdot q^{2k+3}} + \frac{(q - 1)^3 \cdot q^{2k+3}}{(q - 1)^3 \cdot q^{2k+2}} = 1 + q.$$

(ii) $s = \{[j, k], [j + 1, k + 1]\}$. Dann ist $\mathcal{LK}_{\tilde{\mathcal{W}}}(s)$



und

$$\begin{aligned} t &:= \{[j, k], [j, k + 1], [j + 1, k + 1]\} \\ u &:= \{[j, k], [j + 1, k + 1], [j + 1, k]\} \\ Stab &= \Gamma_{[j, k]}^B \cap \Gamma_{[j+1, k+1]}^B = \Gamma_{[j, k]}^B. \end{aligned}$$

Wie oben berechnen sich

$$\begin{aligned} Fix_{Stab}(t) &= Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(t) \cap Stab \\ &= \Gamma_{[j, k+1]}^B \cap Stab \\ &= \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k+1\} \\ 0 & * & \{k+1-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\ &= Stab, \end{aligned}$$

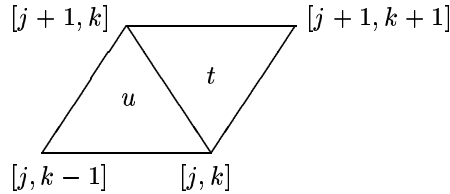
und

$$\begin{aligned} Fix_{Stab}(u) &= \Gamma_{[j+1, k]}^B \cap Stab \\ &= \begin{pmatrix} * & \{j+1\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j-1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j-1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wieder folgt

$$\frac{|Stab|}{|Fix_{Stab}(t)|} + \frac{|Stab|}{|Fix_{Stab}(u)|} = 1 + q.$$

(iii) Sei $s = \{[j, k], [j + 1, k]\}$. Da diese Kante in \mathcal{W} liegt, muß gelten: $0 \leq j < k$.
Es ist $\mathcal{LK}_{\tilde{\mathcal{W}}}(s)$



und

$$\begin{aligned} t &:= \{[j, k], [j + 1, k], [j + 1, k + 1]\} \\ u &:= \{[j, k], [j + 1, k], [j, k - 1]\}. \end{aligned}$$

Für die Fixgruppen gilt

$$\begin{aligned}
Stab &= \Gamma_{[j,k]}^B \cap \Gamma_{[j+1,k]}^B \\
&= \begin{pmatrix} * & \{j+1\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j-1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j-1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zudem ergibt sich

$$\begin{aligned}
Fix_{Stab}(t) &= Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(t) \cap Stab \\
&= \Gamma_{[j+1,k+1]}^B \cap Stab \\
&= \begin{pmatrix} * & \{j+1\} & \{k+1\} \\ 0 & * & \{k-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j-1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\
&= Stab,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
Fix_{Stab}(u) &= \Gamma_{[j,k-1]}^B \cap Stab \\
&= \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k-1\} \\ 0 & * & \{k-1-j\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k\} \\ 0 & * & \{k-j-1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} * & \{j\} & \{k-1\} \\ 0 & * & \{k-j-1\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{|Stab|}{|Fix_{Stab}(t)|} + \frac{|Stab|}{|Fix_{Stab}(u)|} = 1 + \frac{(q-1)^3 \cdot q^{2k+2}}{(q-1)^3 \cdot q^{2k+1}} = 1 + q.$$

Damit ist der Satz gezeigt. \square

Nun wird ausgenutzt, daß Γ neben $B(\mathbb{F}_q[T])$ auch die Spiegelungen σ_1 und σ_2 enthält.

Korollar 3.17 *Zu jedem 2-Simplex s aus \mathcal{B} existiert ein g aus Γ , so daß $g \cdot s$ in \mathcal{W} liegt.*

Beweis: Sei $s \in S_2(\mathcal{B})$. Dann existiert in \mathcal{B} nach Korollar 2.49 eine in \mathcal{W} startende Galerie

$$(u_n, u_{n-1}, \dots, u_2, u_1, s).$$

Diese habe die Länge n . Da u_n in \mathcal{W} liegt, gibt es nach 3.16 ein b_1 aus $B(\mathbb{F}_q[T])$ das den 2-Simplex u_{n-1} in einen Simplex aus $\widetilde{\mathcal{W}}$ transformiert. Mit einem passend gewählten $\tau_1 \in \{1, \sigma_1, \sigma_2\}$ liegt dann $\tau_1 b_1 \cdot u_{n-1}$ in \mathcal{W} , und wir erhalten eine in \mathcal{W} startende Galerie

$$(\tau_1 b_1 \cdot u_{n-1}, \tau_1 b_1 \cdot u_{n-2}, \dots, \tau_1 b_1 \cdot u_2, \tau_1 b_1 \cdot u_1, \tau_1 b_1 \cdot s)$$

der Länge $(n-1)$. Induktiv erhalten wir auf diese Weise nach n Schritten eine in \mathcal{W} startende Galerie

$$((\tau_n b_n \tau_{n-1} b_{n-1} \dots \tau_1 b_1) \cdot s)$$

der Länge 0. Also liegt $(\tau_n b_n \tau_{n-1} b_{n-1} \dots \tau_1 b_1) \cdot s$ in \mathcal{W} . Da alle τ_i Permutationsmatrizen sind und alle b_i in $B(\mathbb{F}_q[T])$ liegen, liegt das Produkt

$$g := \tau_n b_n \tau_{n-1} b_{n-1} \dots \tau_1 b_1$$

in Γ . Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Satz 3.18 \mathcal{W} ist ein Fundamentalbereich zur Operation der Gruppe Γ auf \mathcal{B} .

Beweis: In 3.10 haben wir gezeigt, daß alle Simplizes aus \mathcal{W} inäquivalent unter Γ sind. Da ein Simplex aus \mathcal{B} immer Seite eines 2-Simplex ist, folgt aus 3.17, daß sich jeder Simplex unter Γ in einen Simplex aus \mathcal{W} transformieren läßt. \square

Wir können die Aussage wie folgt gruppentheoretisch interpretieren: Die 2-Simplizes in \mathcal{B} stehen in Bijektion zu

$$GL^0(\mathcal{K})/I.$$

Die Aussage, daß sich jeder 2-Simplex in \mathcal{B} in einen 2-Simplex in \mathcal{A} transformieren läßt, besagt, daß es zu einem $g \in GL^0(\mathcal{K})$ Elemente $M \in \Gamma$, $w \in W$ gibt mit

$$g \cdot I = M \cdot w \cdot I,$$

da $g \cdot I$ ein beliebiger 2-Simplex in \mathcal{B} und $w \cdot I$ ein 2-Simplex in \mathcal{A} ist. Die speziellere Aussage, daß \mathcal{W} ein Fundamentalbereich der Operation von Γ ist, besagt, daß man w aus einem Repräsentantensystem von $S_3 \setminus W$ (hierbei ist $S_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ und daher $S_3 = \Gamma \cap W$) wählen kann, und daß dieses w dann eindeutig bestimmt ist. Anders formuliert: Sei R ein Repräsentantensystem von $S_3 \setminus W$, dann besitzt $GL^0(\mathcal{K})$ die disjunkte Zerlegung

$$GL^0(\mathcal{K}) = \dot{\bigcup}_{w \in R} \Gamma \cdot w \cdot I.$$

Aufgrund der Beschreibung von W als semidirektes Produkt (vgl. S.26) können wir R als

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} \pi^i & 0 & 0 \\ 0 & \pi^j & 0 \\ 0 & 0 & \pi^k \end{array} \right) \mid i + j + k = 0 \right\}$$

wählen.

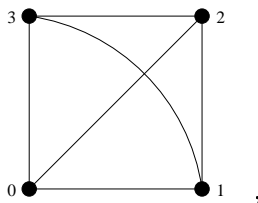
Kapitel 4

Der Quotient $\Gamma(\mathbf{n}) \setminus \mathcal{B}$

Im letzten Kapitel haben wir uns mit Operationen spezieller Gruppen auf dem Simplicialkomplex \mathcal{B} beschäftigt. Es liegt nahe, allgemein zur Operation einer Gruppe auf einem Simplicialkomplex ein Quotientenobjekt zu definieren, d.h. ein Objekt, das entsteht, indem man alle Simplizes identifiziert, die auf der gleichen Bahn liegen. Intuitiv würde man den Quotienten eines Simplicialkomplex \mathcal{D} und einer Gruppe G wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} V(G \setminus \mathcal{D}) &= \{Gv \mid v \in V(\mathcal{D})\}, \\ S(G \setminus \mathcal{D}) &= \{Gs \mid s \in S(\mathcal{D})\}. \end{aligned}$$

Leider sind in diesem Fall die Elemente aus $S(G \setminus \mathcal{D})$ keine Mengen von Elementen aus $V(G \setminus \mathcal{D})$. Also ist das so definierte Objekt kein Simplicialkomplex. Ein weiteres Problem zeigt sich an folgendem Beispiel: Sei \mathcal{D} der folgende Simplicialkomplex



und die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ operiere auf den Knoten von \mathcal{D} durch Addition. Dann liegen alle Knoten auf der gleichen Bahn, aber die Bahnen der 1-Simplizes $\{0, 1\}$ und $\{0, 2\}$ sind disjunkt, d.h. es gibt zwar Elemente $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x + 0 = 0$ und $y + 1 = 2$, es gibt aber kein *einzelnes* Element z mit $z + 0 = 0$ und $z + 1 = 2$ (bzw. $z+0=2$ und $z+1=0$) gleichzeitig. Im Abschnitt 4.2 werden wir auf dieses Problem im uns interessierenden Fall zurückkommen.

Man könnte den Quotienten auch wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} V(G \setminus \mathcal{D}) &= \{Gv \mid v \in V(\mathcal{D})\}, \\ S(G \setminus \mathcal{D}) &= \{\{Gv_0, \dots, Gv_n\} \mid \{v_0, \dots, v_n\} \in S(\mathcal{D})\}. \end{aligned}$$

Der so definierte Quotient ist ein Simplicialkomplex. Ein Nachteil dieser Definition ist jedoch, daß die Dimensionen von \mathcal{D} echt größer der Dimension von $G \setminus \mathcal{D}$ sein kann. Operiert G zum Beispiel transitiv auf den Knoten von \mathcal{D} , dann besteht der Quotient aus einem einzelnen Punkt. Daher ist nicht zu erwarten, daß man vom Quotienten auf Eigenschaften der Gruppe zurückschließen kann.

Wir lösen das obige Problem wie folgt. Erst verallgemeinern wir von Simplizialkomplexen auf Seitenkomplexe, so daß wir den Quotienten wie im ersten Fall definieren können. Dann zeigen wir, daß im Fall $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ und $G = \Gamma(\mathfrak{n})$ das so erhaltene Seitenobjekt mit dem Quotienten-Simplizialkomplex der zweiten Definition identifiziert werden kann. Also ist in diesem Fall die zweite Definition vernünftig.

4.1 Seitenkomplexe

Wir werden nun den Begriff des Simplizialkomplexes verallgemeinern, um einen vernünftigen Quotientenkomplex definieren zu können.

Definition 4.1 *Ein Seitenkomplex Υ besteht aus disjunkten Mengen $S_j(\Upsilon)$, $j = 1, \dots, n$ und einer Familie von Abbildungen*

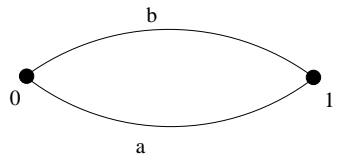
$$\phi_j^i : S_j(\Upsilon) \longrightarrow S_{j-1}(\Upsilon) ,$$

wobei i zwischen 0 und j läuft. Diese Abbildungen bezeichnen wir als Seitenabbildungen. Die Vereinigung der $S_j(\Upsilon)$ wird mit $S(\Upsilon)$ bezeichnet. Ein Element s aus $S(\Upsilon)$ hat die Dimension j , wenn es in $S_j(\Upsilon)$ liegt. Ein Element t heißt Seite von s , falls eine Seitenabbildung ϕ_j^i existiert mit $\phi_j^i(s) = t$.

Die geometrische Vorstellung eines Seitenkomplexes ist folgende: Die Elemente aus $S_j(\Upsilon)$ entsprechen j -Simplizes. Zwei j -Simplizes s_1, s_2 werden entlang einer gemeinsamen $(j-1)$ -Seite t verklebt, falls es Seitenabbildungen ϕ_j^i und ϕ_j^k gibt mit $\phi_j^i(s_1) = \phi_j^k(s_2) = t$. Wir werden anhand der folgenden Beispiele sehen, daß diese Definition allgemeiner ist als die eines Simplizialkomplexes.

Beispiel:

(i) Sei Υ der folgende Komplex:

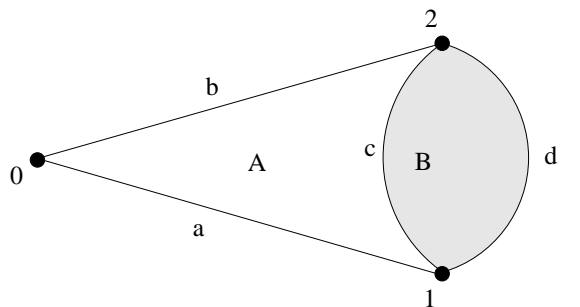


Dann ist Υ ein Seitenkomplex mit

$$S_0(\Upsilon) = \{0, 1\}, \quad S_1(\Upsilon) = \{a, b\} ,$$

$$\phi_1^0 : \begin{array}{l} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 0 \end{array} , \quad \phi_1^1 : \begin{array}{l} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 1 \end{array} ,$$

(ii) Sei Υ gegeben durch



D.h. Υ entsteht, indem man zwei 2-Simplizes entlang zweier Kanten verklebt. Dann ist Υ ein zweidimensionaler Seitenkomplex mit

$$S_0(\Upsilon) = \{0, 1, 2\}, \quad S_1(\Upsilon) = \{a, b, c, d\}, \quad S_2(\Upsilon) = \{A, B\}.$$

Als Seitenabbildungen können wir wählen

$$\phi_2^0 : \begin{array}{l} A \mapsto a \\ B \mapsto b \end{array}, \quad \phi_2^1 : \begin{array}{l} A \mapsto c \\ B \mapsto a \end{array}, \quad \phi_2^2 : \begin{array}{l} A \mapsto b \\ B \mapsto d \end{array},$$

und

$$\begin{array}{l} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 2 \\ d \mapsto 1 \end{array}, \quad \begin{array}{l} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 2 \\ c \mapsto 1 \\ d \mapsto 2 \end{array}.$$

Die obigen Beispiele sind keine Simplizialkomplexe, da die Objekte der Dimension j durch die Gesamtheit ihrer $(j - 1)$ -Seiten nicht eindeutig bestimmt sind.

Wir können jedoch zu jedem Simplizialkomplex mit abzählbar unendlich vielen Knoten einen Seitenkomplex wie folgt konstruieren.

Sei \mathcal{D} ein Simplizialkomplex und die Menge seiner Knoten $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \{v_0, v_1, \dots\}$ sei in einer festen Reihenfolge aufgezählt. Dann definiert man

$$S_k(\Upsilon) := S_k(\mathcal{D}).$$

Nimmt man weiter an, daß die Knoten eines k -Simplex $\{w_0, \dots, w_k\}$ wie in $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ aufgezählt sind, so definiert man

$$\phi_k^i(\{w_0, \dots, w_k\}) := \{w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_k\}.$$

Damit haben wir \mathcal{D} einen Seitenkomplex zugeordnet.

Man könnte der Meinung sein, daß die Begriffe Zellenkomplex [HW60] oder semi-simplizialer Komplex [Lam68] die natürlicheren Verallgemeinerung eines Simplizialkomplexes sind. Ich möchte diese Begriffe aber umgehen, um technischen Aufwand zu vermeiden. Wir werden nämlich sehen, daß der uns interessierende Komplex $\Gamma(\mathfrak{n}) \setminus \mathcal{B}$ ein Simplizialkomplex ist. Seitenkomplexe haben den Nachteil, daß sie zu allgemein sind, um eine vernünftige Homologietheorie zu entwickeln. Denn es ist nicht klar, wie man einem Seitenkomplex einen Kettenkomplex zuordnen soll. Wir werden nun definieren, wann ein Seitenkomplex ein Simplizialkomplex ist.

Definition 4.2 Ein Seitenkomplex Υ besitzt eine simpliziale Struktur, falls ein Simplizialkomplex \mathcal{D} und eine Abbildung

$$\tau : S(\Upsilon) \longrightarrow S(\mathcal{D})$$

existiert mit

- (i) $\tau(S_k(\Upsilon)) \subset S_k(\mathcal{D})$,
- (ii) τ ist Bijektion,

(iii) für alle $s \in S_k(\Upsilon)$ und alle $t \in S_{k-1}(\Upsilon)$ gilt :

$$\tau(t) \subset \tau(s) \iff \exists i \text{ mit } t = \phi_k^i(s).$$

Wir geben nun ein Kriterium an, gemäß welchem ein Seitenkomplex keine simpliziale Struktur besitzt.

Satz 4.3 Sei Υ ein Seitenkomplex, $s, t \in S_k(\Upsilon)$, so daß unterschiedliche ϕ_k^i, ϕ_k^j existieren mit

$$\begin{aligned} \phi_k^i(s) &\neq \phi_k^j(s) \\ \phi_k^i(s) &= \phi_k^i(t) \\ \phi_k^j(s) &= \phi_k^j(t). \end{aligned}$$

Dann besitzt Υ keine simpliziale Struktur.

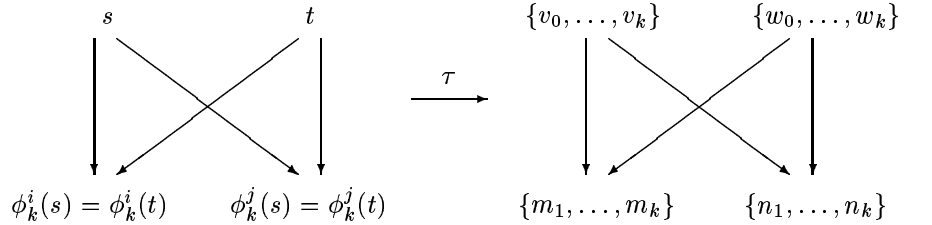
Beweis: Der Beweis wird durch Widerspruch geführt. Sei \mathcal{D} ein Simplicialkomplex und

$$\tau : S(\Upsilon) \rightarrow S(\mathcal{D})$$

eine Funktion mit den in Definition 4.2 geforderten Eigenschaften. Weiter seien $s, t \in S_k(\Upsilon)$, $s \neq t$ und

$$\begin{aligned} \{v_0, \dots, v_k\} &:= \tau(s), & \{w_0, \dots, w_k\} &:= \tau(t). \\ \{m_1, \dots, m_k\} &:= \tau(\phi_k^i(s)), & \{n_1, \dots, n_k\} &:= \tau(\phi_k^j(s)) \end{aligned}$$

Da τ mit den Randabbildungen verträglich ist, sind wir in folgender Situation:



wobei die Pfeile im linken Diagramm die Randabbildungen und die im rechten Diagramm die Inklusionsbeziehungen von Mengen bezeichnen. Da nach Voraussetzung $\phi_k^i(s)$ ungleich $\phi_k^j(s)$ ist, folgt aus der Injektivität von τ , daß die beiden Mengen $\{m_1, \dots, m_k\}$ und $\{n_1, \dots, n_k\}$ ungleich sind. Dann unterscheiden sie sich in genau zwei Elementen, da sie beide k -elementige Teilmengen der $(k+1)$ -elementigen Menge $\{v_0, \dots, v_k\}$ sind. Daraus ergibt sich

$$\{v_0, \dots, v_k\} = \{m_1, \dots, m_k\} \cup \{n_1, \dots, n_k\}.$$

Mit analogen Argumenten folgt

$$\{w_0, \dots, w_k\} = \{m_1, \dots, m_k\} \cup \{n_1, \dots, n_k\}.$$

Dann sind unter Berücksichtigung der Injektivität von τ die beiden Elemente s und t gleich. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, und damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Wir können den Satz wie folgt weniger technisch formulieren: Wenn Υ zwei k -Simplizes enthält, die an zwei ihrer $(k-1)$ -Seiten verklebt werden, dann besitzt Υ keine simpliziale Struktur.

4.2 \mathcal{B} als Seitenkomplex

Wir werden nun untersuchen, auf welche Weise \mathcal{B} als Seitenkomplex angesehen werden kann. Dabei folgen wir *nicht* der auf Seite 50 angegebenen Konstruktion eines Seitenkomplexes aus einem Simplicialkomplex.

Wir haben gezeigt, daß \mathcal{W} ein Fundamentalbereich von \mathcal{B} unter Γ ist. Daher können wir definieren

Definition 4.4 Sei $w \in S(\mathcal{W})$. Ein Simplex s aus \mathcal{B} hat Niveau w , falls s in der Bahn von w unter Γ liegt. Wir schreiben

$$\text{Niveau}(s) = w.$$

Die Menge aller Simplizes vom Niveau w in \mathcal{B} wird mit $\mathfrak{N}_w(\mathcal{B})$ bezeichnet. Die Funktion "Niveau" ist eine simpliciale Abbildung von \mathcal{B} auf \mathcal{W} . Für alle $j \in \{0, 1, 2\}$ ist

$$S_j(\mathcal{B}) = \bigcup_{w \in S_j(\mathcal{W})} \mathfrak{N}_w(\mathcal{B}).$$

Im weiteren seien die Knoten eines Simplex nach der Größe ihres Typs geordnet. Da ein Simplex nie zwei Knoten vom gleichen Typ enthält, ist diese Anordnung eindeutig, und wir können für $0 < k < 3$, $0 \leq i \leq k$ die Seitenabbildungen durch

$$\phi_k^i(\{v_0, \dots, v_k\}) = \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k\}$$

definieren. Dann ist \mathcal{B} durch die Menge seiner Simplizes und die Abbildungen ϕ_k^i eindeutig charakterisiert.

Die Operation von Γ auf \mathcal{B} ist mit den Seitenabbildungen verträglich. Indem wir \mathcal{B} als Seitenkomplex auffassen, können wir von Γ eine Untergruppe

quotienten-Seitenkomplex $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ wie folgt definieren:

Definition 4.5 Mit den Bezeichnungen von oben definiert man den Seitenkomplex $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ und seine Seitenabbildungen ψ_k^j durch

$$(i) \quad S_i(\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}) = \{\tilde{\Gamma}\{v_0, \dots, v_i\} \mid \{v_0, \dots, v_i\} \in S_i(\mathcal{B})\}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \psi_k^j : \quad S_k(\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}) &\longrightarrow S_{k-1}(\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}) \\ \tilde{\Gamma}\{v_0, \dots, v_k\} &\mapsto \tilde{\Gamma}\{v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k\}. \end{aligned}$$

Die Niveauabbildung setzt sich durch

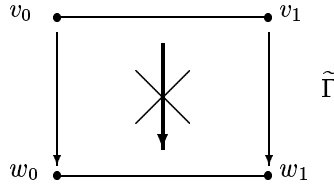
$$\text{Niveau}(\tilde{\Gamma}\{v_0, \dots, v_k\}) := \text{Niveau}(\{v_0, \dots, v_k\})$$

von $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ fort. Es kann folgendes Problem auftreten. Unter Umständen existieren Simplizes $\{v_0, v_1\}$ und $\{w_0, w_1\}$ in \mathcal{B} , so daß zwar Gruppenelemente $\gamma_0, \gamma_1 \in \tilde{\Gamma}$ existieren mit

$$\gamma_0 v_0 = w_0 \quad \text{und} \quad \gamma_1 v_1 = w_1,$$

daß aber kein *einzelnes* $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ existiert, das simultan v_0 in w_0 und v_1 in w_1 überführt (analog zum Beispiel auf Seite 48). Aus $\tilde{\Gamma}v_0 = \tilde{\Gamma}w_0$ und $\tilde{\Gamma}v_1 = \tilde{\Gamma}w_1$ folgt also nicht $\tilde{\Gamma}\{v_0, v_1\} = \tilde{\Gamma}\{w_0, w_1\}$. Da v_0 und v_1 unterschiedlichen Typ haben und gemäß 4.3, daß in diesem Fall $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ keine simpliciale Struktur

besitzt. Beispiele im zweidimensionalen Fall finden sich in der Diplomarbeit von Udo Nonnengardt [Non94]. Das analoge Problem kann auch bei höherdimensionalen Simplexes auftreten. Aus dem Verhalten seiner Seiten unter $\tilde{\Gamma}$ kann man nicht auf das Verhalten des Simplex selbst schließen. Ich veranschauliche das Gesagte durch folgendes Bild:



Nun ist auch klar, daß wir den Begriff des Seitenkomplex einführen mußten, um einen vernünftigen Quotienten definieren zu können. Für bestimmte Untergruppen von Γ besitzt der Quotient jedoch eine simpliziale Struktur. Es gilt zum Beispiel:

Satz 4.6 *Der Quotienten-Seitenkomplex $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ besitzt die simpliziale Struktur der Standard-Weylkammer \mathcal{W} .*

Beweis: Die Funktion ‘‘Niveau’’ ist die in Definition 4.2 geforderte Funktion τ . \square

Wir können $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ auch wie folgt beschreiben: Sei $w = \{v_0, \dots, v_k\} \in S(\mathcal{W})$. Da Γ transitiv auf $\mathfrak{N}_w(\mathcal{B})$ operiert, steht $\mathfrak{N}_w(\mathcal{B})$ in Bijektion zu Γ / Γ_w , wobei wie üblich Γ_w die Fixgruppe von w unter Γ bezeichnet. Auf Γ / Γ_w operiert links, so daß

$\mathfrak{N}_w(\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B})$ in Bijektion zu

$$\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma / \Gamma_w$$

steht. Sei $w_i := \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k\}$ eine Seite von w . Dann ist Γ_{w_i} Untergruppe von Γ_{w_i} , und der Seitenabbildung

$$\begin{aligned} \phi_k^i : S_k(\tilde{\Gamma} / \mathcal{B}) &\longrightarrow S_{k-1}(\tilde{\Gamma} / \mathcal{B}) \\ w &\mapsto w_i \end{aligned}$$

entspricht die Abbildung

$$\begin{aligned} \mu_k^i : \tilde{\Gamma} \backslash \Gamma / \Gamma_w &\longrightarrow \tilde{\Gamma} \backslash \Gamma / \Gamma_{w_i} \\ \tilde{\Gamma} \gamma \Gamma_w &\mapsto \tilde{\Gamma} \gamma \Gamma_{w_i} \end{aligned}$$

Die Beschreibung der Simplexes durch Doppelnebenklassen

$$\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma / \Gamma_w$$

kann auf zwei verschiedene Arten interpretiert werden.

Erstens: Die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ operiert auf Γ / Γ_w von links, d.h. $\tilde{\Gamma}$ identifiziert bestimmte Simplexes vom Niveau w in \mathcal{B} .

Zweitens: Für jedes w aus \mathcal{W} operiert die Fixgruppe Γ_w von rechts auf $\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma$. Es

operieren also alle Fixgruppen Γ_w simultan auf $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$. Mit einem Repräsentantensystem $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ von $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$ läßt sich dies geometrisch wie folgt interpretieren. Wir definieren einen Simplicialkomplex \mathcal{W}^n wie folgt: Die Knoten sind Tupel $(\tilde{\Gamma}\alpha_i, w)$ mit $w \in \mathcal{V}(\mathcal{W})$ und α_i wie oben. Knoten $(\tilde{\Gamma}\alpha_{i_1}, w_1), \dots, (\tilde{\Gamma}\alpha_{i_k}, w_k)$ liegen in einem Simplex, falls $i_1 = i_2 = \dots = i_k$ ist und $\{w_1, \dots, w_k\}$ ein Simplex in \mathcal{W} ist. Der Simplicialkomplex \mathcal{W}^n besteht also aus n disjunkten Kopien von \mathcal{W} , die durch die α_i parametrisiert werden. Wir erhalten aus \mathcal{W}^n unseren Simplicialkomplex $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{B}$, indem wir bestimmte Simplizes aus verschiedenen Kopien von \mathcal{W} wie folgt verkleben: Durch

$$(\tilde{\Gamma}\alpha_i, w) \gamma = (\tilde{\Gamma}\alpha_i\gamma, w)$$

operiert Γ_w auf diesen Simplizes. Zwei Simplizes werden identifiziert (verklebt), falls sie durch die Rechtsoperation von Γ ineinander überführt werden. Ich verdeutliche dies durch das Bild auf Seite 55.

Da wir meist die zweite Sichtweise einnehmen werden und wir Linksoperationen gegenüber Rechtsoperationen bevorzugen, vertauschen wir die Untergruppen mittels der Bijektion

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma / \Gamma_w &\longrightarrow \Gamma_w \setminus \Gamma / \tilde{\Gamma} \\ \tilde{\Gamma} \gamma \Gamma_w &\mapsto \Gamma_w \gamma^{-1} \tilde{\Gamma}. \end{aligned}$$

Dadurch wird $\mathfrak{N}_w(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{B})$ durch

$$\Gamma_w \setminus \Gamma / \tilde{\Gamma}$$

parametrisiert.

4.3 Der Quotient $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$

Im weiteren wird uns nur noch der Quotientenkomplex zur Gruppe $\Gamma(\mathfrak{n})$ interessieren. Diese ist definiert als

Definition 4.7 Die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{n})$ ist der Kern der komponentenweisen Reduktionsabbildung

$$GL(\mathbb{F}_q[T]) \rightarrow GL(\mathbb{F}_q[T]/(\mathfrak{n})).$$

Daher ist $\Gamma(\mathfrak{n})$ normal in $GL(\mathbb{F}_q[T])$ und gleich

$$\left\{ M \in GL(\mathbb{F}_q[T]) \mid M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{n}} \right\}.$$

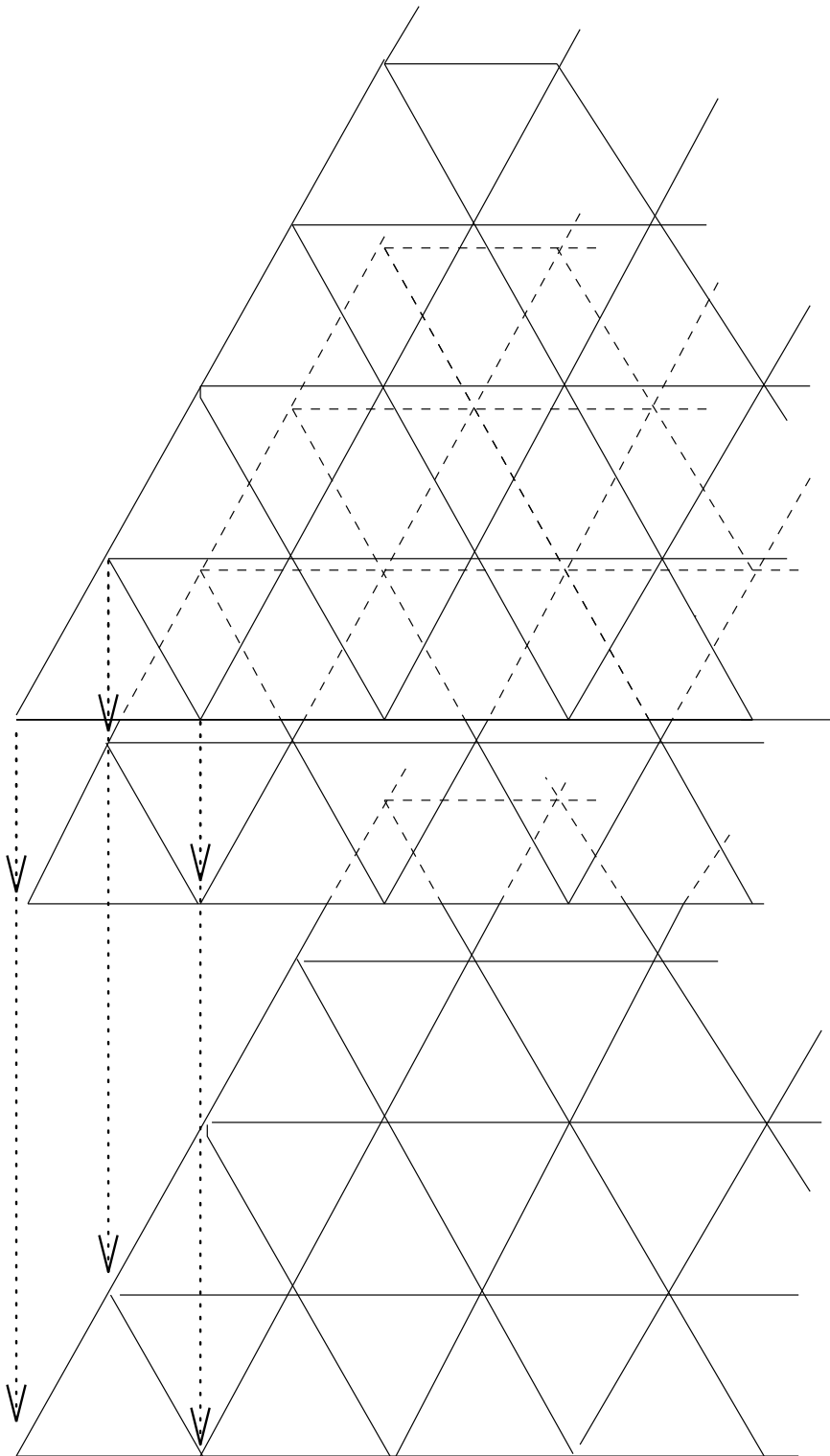
Betrachten wir die Operation von $\Gamma(\mathfrak{n})$ auf \mathcal{B} etwas genauer. Dazu benötigen wir folgende Definition.

Definition 4.8 Sei $\tilde{\Gamma}$ eine Untergruppe von Γ . $\tilde{\Gamma}$ heißt Grad-abgeschlossen, wenn zu jeder Matrix M aus $\tilde{\Gamma}$ auch alle Matrizen $N \in \Gamma$ mit

$$\deg(n_{jk}) \leq \deg(m_{jk})$$

für alle $1 \leq j, k \leq 3$ in $\tilde{\Gamma}$ liegen.

Aus der Beschreibung der Γ_w ergibt sich direkt:



Die Überlagerung von $\tilde{\Gamma}^{\mathcal{B}}$ durch \mathcal{W}^n .

Lemma 4.9 Seien w_1, \dots, w_n Simplizes aus \mathcal{W} . Dann ist

$$\Gamma_{w_1} \cap \Gamma_{w_2} \cap \dots \cap \Gamma_{w_n}$$

Grad-abgeschlossen.

Insbesondere sind die Fixgruppen selbst Grad-abgeschlossen.
Nicht alle Untergruppen von Γ haben diese Eigenschaft.

Beispiel: Die Untergruppe

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & T^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von Γ ist nicht Grad-abgeschlossen.

Sei weiter

$$Rp := \{M \in \Gamma \mid \deg(m_{jk}) < d \text{ für alle } j, k\},$$

wobei d den Grad von \mathfrak{n} bezeichnet. Dann ist Rp das kanonische Repräsentantensystem von

$$\Gamma/\Gamma(\mathfrak{n}).$$

Die Grad-abgeschlossenen Untergruppen von Γ haben die folgende Eigenschaft:

Lemma 4.10 Sei $\tilde{\Gamma}$ eine Grad-abgeschlossene Untergruppe von Γ . Dann gilt für alle $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ und alle $r \in Rp$

$$\gamma \cdot \Gamma(\mathfrak{n}) = r \cdot \Gamma(\mathfrak{n}) \iff r \in \tilde{\Gamma}.$$

Beweis: Da $\tilde{\Gamma}$ Grad-abgeschlossen ist, liegt der kanonische Vertreter r von $\alpha \cdot \Gamma(\mathfrak{n})$ bereits in $\tilde{\Gamma}$. \square

Nun können wir folgendes Lemma zeigen:

Lemma 4.11 Seien w_1, \dots, w_k Simplizes in \mathcal{W} . Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^k (\Gamma_{w_i} \cdot \Gamma(\mathfrak{n})) = \left(\bigcap_{i=1}^k \Gamma_{w_i} \right) \cdot \Gamma(\mathfrak{n}).$$

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion nach k geführt. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir beginnen mit $k = 2$, da bereits im Induktionsanfang der entscheidende Beweisschritt durchgeführt wird.

Induktionsanfang: $k = 2$.

Es gilt

$$\Gamma_{w_1} \cdot \Gamma(\mathfrak{n}) \cap \Gamma_{w_2} \cdot \Gamma(\mathfrak{n}) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_{w_1}} \alpha \Gamma(\mathfrak{n}) \cap \bigcup_{\beta \in \Gamma_{w_2}} \beta \Gamma(\mathfrak{n}).$$

Da Γ_{w_1} und Γ_{w_2} Grad-abgeschlossen sind, ist dies gleich

$$= \bigcup_{\alpha \in \Gamma_{w_1} \cap Rp} \alpha \Gamma(\mathfrak{n}) \cap \bigcup_{\beta \in \Gamma_{w_2} \cap Rp} \beta \Gamma(\mathfrak{n})$$

bzw.

$$\bigcup_{\delta \in (\Gamma_{w_1} \cap \Gamma_{w_2}) \cap Rp} \delta \Gamma(\mathfrak{n}).$$

Da auch $\Gamma_{w_1} \cap \Gamma_{w_2}$ Grad-abgeschlossen ist, ist dies gleich

$$(\Gamma_{w_1} \cap \Gamma_{w_2}) \cdot \Gamma(\mathfrak{n}).$$

Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.
 Induktionsannahme: Es gelte

$$\bigcap_{i=1}^k (\Gamma_{w_i} \cdot \Gamma(\mathfrak{n})) = \left(\bigcap_{i=1}^k \Gamma_{w_i} \right) \cdot \Gamma(\mathfrak{n}) .$$

Induktionsschluß: $k \rightarrow k + 1$.

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{k+1} (\Gamma_{w_i} \cdot \Gamma(\mathfrak{n})) &= \bigcap_{i=1}^k (\Gamma_{w_i} \cdot \Gamma(\mathfrak{n})) \cap (\Gamma_{w_{k+1}} \cdot \Gamma(\mathfrak{n})) \\ &\stackrel{I.A.}{=} \left(\left(\bigcap_{i=1}^k \Gamma_{w_i} \right) \cdot \Gamma(\mathfrak{n}) \right) \cap (\Gamma_{w_{k+1}} \cdot \Gamma(\mathfrak{n})) . \end{aligned}$$

Da der Schnitt der k Fixgruppen Grad-abgeschlossen ist, folgt wie im Induktionsanfang

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} (\Gamma_{w_i} \cdot \Gamma(\mathfrak{n})) = \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} \Gamma_{w_i} \right) \cdot \Gamma(\mathfrak{n}) .$$

□

Daraus erhalten wir

Satz 4.12 Seien $\{v_0, \dots, v_k\}$ und $\{u_0, \dots, u_k\}$ Simplices aus \mathcal{B} . Weiter seien $\gamma_0, \dots, \gamma_k \in \Gamma(\mathfrak{n})$ mit

$$\gamma_0 v_0 = u_0, \dots, \gamma_k v_k = u_k .$$

Dann existiert ein $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{n})$ mit

$$\gamma v_0 = u_0, \dots, \gamma v_k = u_k .$$

simultan.

Beweis: Die Simplices $\{v_0, \dots, v_k\}$ und $\{u_0, \dots, u_k\}$ haben das gleiche Niveau, und daher existiert ein Simplex $\{w_0, \dots, w_k\}$ aus \mathcal{W} mit

$$\text{Niveau}(v_i) = \text{Niveau}(u_i) = w_i, \quad i = 0, \dots, k .$$

Da Γ transitiv auf den Simplices vom gleichen Niveau operiert, existieren α_1 und α_2 aus Γ mit

$$\alpha_1 w_i = v_i \quad \text{und} \quad \alpha_2 w_i = u_i$$

für alle i . Wir betrachten folgende Umformungen

$$\begin{aligned} &\exists \gamma_0, \dots, \gamma_k \in \Gamma(\mathfrak{n}) \quad \text{mit} \quad \gamma_0 v_0 = u_0, \dots, \gamma_k v_k = u_k \\ \iff &\exists \gamma_0, \dots, \gamma_k \in \Gamma(\mathfrak{n}) \quad \text{mit} \quad \gamma_0 \alpha_1 w_0 = \alpha_2 w_0, \dots, \gamma_k \alpha_1 w_k = \alpha_2 w_k \\ \iff &\exists \gamma_0, \dots, \gamma_k \in \Gamma(\mathfrak{n}) \quad \text{mit} \quad \alpha_2^{-1} \gamma_0 \alpha_1 \in \text{Fix}_\Gamma(w_0), \dots, \alpha_2^{-1} \gamma_k \alpha_1 \in \text{Fix}_\Gamma(w_k) . \end{aligned}$$

Da $\Gamma(\mathfrak{n})$ normal in Γ ist, ist dies äquivalent zu

$$\exists \tilde{\gamma}_0, \dots, \tilde{\gamma}_k \in \Gamma(\mathfrak{n}) \quad \text{mit} \quad \alpha_2^{-1} \alpha_1 \tilde{\gamma}_0 \in \text{Fix}_\Gamma(w_0), \dots, \alpha_2^{-1} \alpha_1 \tilde{\gamma}_k \in \text{Fix}_\Gamma(w_k) .$$

Da nun für alle $i = 0, \dots, k$ Elemente σ_i in $\Gamma(\mathfrak{n})$ existieren mit

$$\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}_i \sigma_i ,$$

folgt für alle i

$$\alpha_2^{-1} \alpha_1 \tilde{\gamma}_0 = \alpha_2^{-1} \alpha_1 \tilde{\gamma}_i \sigma_i \in \text{Fix}_\Gamma(w_i) \Gamma(\mathfrak{n}) .$$

Dank des Lemmas 4.11 ergibt sich daraus

$$\alpha_2^{-1} \alpha_1 \tilde{\gamma}_0 \in \left(\bigcap_{i=1}^k \text{Fix}_\Gamma(w_i) \right) \cdot \Gamma(\mathbf{n}).$$

Also existieren

$$\xi \in \bigcap_{i=1}^k \text{Fix}_\Gamma(w_i)$$

und

$$\mu \in \Gamma(\mathbf{n})$$

mit

$$\alpha_2^{-1} \alpha_1 \tilde{\gamma}_0 = \alpha_2^{-1} \gamma_0 \alpha_1 = \xi \mu$$

Dann ist wegen der Normalität von $\Gamma(\mathbf{n})$

$$\xi = \alpha_2^{-1} (\gamma_0 \tilde{\mu}) \alpha_1 \in \alpha_2^{-1} \Gamma(\mathbf{n}) \alpha_1$$

und daher

$$\alpha_2 \xi \alpha_1^{-1} \in \Gamma(\mathbf{n}).$$

Da ξ zudem im Schnitt der Fixgruppen liegt, ist für alle i

$$\begin{aligned} \alpha_2 \xi \alpha_1^{-1} v_i &= \alpha_2 \xi \alpha_1^{-1} (\alpha_1 w_i) \\ &= \alpha_2 \xi w_i \\ &= \alpha_2 w_i \\ &= u_i \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, daß $\alpha_2 \xi \alpha_1^{-1}$ das gesuchte γ ist. \square

In den Beweis sind nur die Normalität von $\Gamma(\mathbf{n})$ und das Lemma 4.11 eingegangen. Daher gilt der obige Satz für jede normale Untergruppe von Γ , die die Aussage von Lemma 4.11 erfüllt.

Satz 4.12 legt nahe, daß der Quotienten-Seitenkomplex $\Gamma(\mathbf{n}) \setminus \mathcal{B}$ sogar ein Simplicialkomplex ist. Dies werden wir nun zeigen. Dazu definieren wir folgenden Simplicialkomplex $\mathcal{B}(\mathbf{n})$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{B}(\mathbf{n})) &:= \{ \Gamma(\mathbf{n}) v \mid v \in \mathcal{V}(\mathcal{B}) \} \\ S_i(\mathcal{B}(\mathbf{n})) &:= \{ \{ \Gamma(\mathbf{n}) v_0, \dots, \Gamma(\mathbf{n}) v_i \} \mid \{ v_0, \dots, v_i \} \in S_i(\mathcal{B}) \}. \end{aligned}$$

Dann gilt

Satz 4.13 *Der Seitenkomplex $\Gamma(\mathbf{n}) \setminus \mathcal{B}$ besitzt die simpliciale Struktur von $\mathcal{B}(\mathbf{n})$.*

Beweis: Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau : \quad S(\Upsilon) &\quad \rightarrow \quad S(\mathcal{B}(\mathbf{n})) \\ \Gamma(\mathbf{n}) \{ v_0, \dots, v_k \} &\quad \mapsto \quad \{ \Gamma(\mathbf{n}) v_0, \dots, \Gamma(\mathbf{n}) v_k \}. \end{aligned}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert. Da alle Knoten eines Simplex $s = \{ v_0, \dots, v_k \}$ aus \mathcal{B} paarweise verschiedenen Typ haben, sind die Klassen $\Gamma(\mathbf{n}) v_0$ bis $\Gamma(\mathbf{n}) v_k$ alle disjunkt, und daher ist $\tau(S_k(\Upsilon)) \subset S_k(\mathcal{B}(\mathbf{n}))$. Weiter ist für ein $\Gamma(\mathbf{n}) t \in S_{k-1}(\Upsilon)$

$$\begin{aligned} \tau(\Gamma(\mathbf{n}) t) \subset \tau(\Gamma(\mathbf{n}) s) &\iff \Gamma(\mathbf{n}) t = \Gamma(\mathbf{n}) \{ v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n \} \\ &\iff \Gamma(\mathbf{n}) t = \psi_k^j(\Gamma(\mathbf{n}) s), \end{aligned}$$

für ein j aus $\{0, \dots, n\}$.

Auch die Surjektivität von τ ist klar. Der entscheidende Punkt ist die Injektivität von τ . Seien $\{v_0, \dots, v_k\}$ und $\{w_0, \dots, w_k\}$ zwei Simplizes aus dem Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B} mit

$$\{\Gamma(\mathfrak{n})v_0, \dots, \Gamma(\mathfrak{n})v_k\} = \{\Gamma(\mathfrak{n})w_0, \dots, \Gamma(\mathfrak{n})w_k\}.$$

Dann gibt es Elemente $\gamma_0, \dots, \gamma_k \in \Gamma(\mathfrak{n})$ mit

$$\gamma_0 v_0 = w_0, \dots, \gamma_k v_k = w_k.$$

Der zentrale Punkt ist nun, daß nach Satz 4.12 ein $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{n})$ existiert mit

$$\gamma v_0 = w_0, \dots, \gamma v_k = w_k$$

simultan. Dann ist aber

$$\Gamma(\mathfrak{n})\{v_0, \dots, v_k\} = \Gamma(\mathfrak{n})\{w_0, \dots, w_k\}$$

und τ ist injektiv. Damit ist der Satz gezeigt. \square

Im weiteren werden wir $\Upsilon(\Gamma(\mathfrak{n}) \backslash \mathcal{B})$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ identifizieren.

Im Kapitel 6 werden wir folgendes Lemma benötigen:

Lemma 4.14 *Der Quotient $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ ist wegzusammenhängend, d.h. $H_0(\mathcal{B}(\mathfrak{n}))$ ist trivial.*

Beweis: Seien $\Gamma(\mathfrak{n})v$ und $\Gamma(\mathfrak{n})\tilde{v}$ zwei Knoten aus $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$. Da es zu zwei 2-Simplizes im Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B} immer eine verbindende Galerie gibt, gibt es in \mathcal{B} insbesondere eine Folge von 1-Simplizes

$$\{v, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_n, \tilde{v}\}.$$

Dann ist das Bild

$$\{\Gamma(\mathfrak{n})v, \Gamma(\mathfrak{n})v_1\}, \{\Gamma(\mathfrak{n})v_1, \Gamma(\mathfrak{n})v_2\}, \{\Gamma(\mathfrak{n})v_2, \Gamma(\mathfrak{n})v_3\}, \dots, \{\Gamma(\mathfrak{n})v_n, \Gamma(\mathfrak{n})\tilde{v}\}.$$

ein Weg in $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$. \square

Bemerkung: Man hätte einfach für eine beliebige Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ von Γ den Quotientenseitenkomplex $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}) &:= \{\tilde{\Gamma}v \mid v \in \mathcal{V}(\mathcal{B})\} \\ \mathcal{S}_k(\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}) &:= \{\{\tilde{\Gamma}v_0, \dots, \tilde{\Gamma}v_k\} \mid \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S}_k(\mathcal{B})\} \end{aligned}$$

eingeführen können. Dies hätte aber die besondere Stellung des Quotienten $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ gegenüber beliebigen $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ verschleiert. Denn der Quotientenkomplex entspricht mehr der intuitiven Vorstellung eines Quotienten, und es ist eine wichtige Feststellung, daß im Falle $\Gamma(\mathfrak{n})$ die beiden Definitionen zusammenfallen. Wie der Beweis des Lemmas 4.11 zeigt, ist die Normalität von $\Gamma(\mathfrak{n})$ in Γ nicht ausreichend. Ich vermute, daß man für die von mir ad hoc eingeführten Seitenkomplexe keine Homologietheorie entwickeln kann. Aber ich bin der Meinung, daß auch für beliebige Untergruppen $\tilde{\Gamma}$

von Γ der Quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$ immer noch die Struktur eines semisimplizialen Komplexes

besitzt. Daher sollte auch für $\widetilde{\Gamma} \setminus \mathcal{B}$ eine Homologietheorie existieren, auf die ich in dieser Arbeit jedoch nicht eingehen möchte.

Kommen wir zum Simplicialkomplex $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ zurück. Wie wir gezeigt haben, stehen die Simplizes vom Niveau w in $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ in Bijektion zu

$$\Gamma_w \setminus \Gamma / \Gamma(\mathfrak{n}) .$$

Da $\Gamma(\mathfrak{n})$ normal in Γ ist, ist $\Gamma / \Gamma(\mathfrak{n})$ eine Gruppe, die wir kurz mit $G(\mathfrak{n})$ bezeichnen. Also stehen die Simplizes vom Niveau w in $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ in Bijektion zu den Bahnen in $G(\mathfrak{n})$ unter der Operation von Γ_w und damit zu den Nebenklassen

$$\overline{\Gamma_w} \setminus G(\mathfrak{n}) ,$$

wobei $\overline{\Gamma_w}$ das Bild von Γ_w in $G(\mathfrak{n})$ bezeichnet. Wir werden nun die Gruppe $G(\mathfrak{n})$ beschreiben. Es gilt allgemein:

Satz 4.15 Sei $\mathfrak{n} \in \mathbb{F}_q[T]$, $k \in \mathbb{N}$ und

$$\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{n}) := \{M \in GL(k, \mathbb{F}_q[T]) \mid M \equiv I \pmod{(\mathfrak{n})}\} .$$

Dann gilt

$$GL(k, \mathbb{F}_q[T]) / \widetilde{\Gamma}(\mathfrak{n}) \cong \{M \in GL(k, \mathbb{F}_q[T]/(\mathfrak{n})) \mid \det(M) \in \mathbb{F}_q^*\} .$$

Beweis: Wir setzen

$$A(\mathbb{F}_q) := \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right) \mid a \in \mathbb{F}_q^* \right\} .$$

Dann gilt

$$\{M \in GL(k, \mathbb{F}_q[T]/(\mathfrak{n})) \mid \det(M) \in \mathbb{F}_q^*\} = A(\mathbb{F}_q) \rtimes SL(k, \mathbb{F}_q[T]/(\mathfrak{n}))$$

und

$$GL(k, \mathbb{F}_q[T]) = A(\mathbb{F}_q) \rtimes SL(k, \mathbb{F}_q[T]) .$$

Da der Schnitt von $A(\mathbb{F}_q)$ und $\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{n})$ nur aus der Einheitsmatrix besteht, und $\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{n})$ eine Untergruppe von $SL(k, \mathbb{F}_q[T])$ ist, ist die Exaktheit von

$$1 \rightarrow \widetilde{\Gamma}(\mathfrak{n}) \hookrightarrow GL(k, \mathbb{F}_q[T]) \rightarrow A(\mathbb{F}_q) \rtimes SL(k, \mathbb{F}_q[T]/(\mathfrak{n})) \rightarrow 1$$

äquivalent zur Exaktheit von

$$1 \rightarrow \widetilde{\Gamma}(\mathfrak{n}) \hookrightarrow SL(k, \mathbb{F}_q[T]) \xrightarrow{\varphi} SL(k, \mathbb{F}_q[T]/(\mathfrak{n})) \rightarrow 1 ,$$

wobei aus der Exaktheit der ersten Folge direkt der Satz folgt. In der zweiten Folge ist lediglich die Surjektivität von φ nicht trivial. Die Abbildung φ ist genau dann surjektiv, wenn zu jeder $(k \times k)$ -Matrix A mit $\det(A) \equiv 1 \pmod{(\mathfrak{n})}$ eine Matrix $B \in SL(k, \mathbb{F}_q[T])$ existiert mit $A \equiv B \pmod{(\mathfrak{n})}$. Dies zeigen wir durch vollständige Induktion nach k .

Induktionsanfang: Für $k = 1$ ist die Existenz der 1×1 -Matrix B klar.

Induktionsannahme: Zu jeder $(k-1) \times (k-1)$ -Matrix A mit $\det(A) \equiv 1 \pmod{(\mathfrak{n})}$ existiert

eine Matrix $B \in SL(k-1, \mathbb{F}_q[T])$ mit $A \equiv B \pmod{\mathfrak{n}}$.

Induktionsschluß: $(k-1) \rightarrow k$.

Sei A eine $(k \times k)$ -Matrix mit $\det(A) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$. Dann existieren nach dem Elementarteilersatz Matrizen U, V in $SL(k, \mathbb{F}_q[T])$ mit

$$UAV = \text{diag}(a_1, \dots, a_k).$$

Sei $b := a_2 \cdot a_3 \dots a_k$. Dann seien

$$W := \begin{pmatrix} b & 1 & & & \\ b-1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1-a_1 & a_1 a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_k \end{pmatrix}.$$

Aus $a_1 b = \det(A) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$ sehen wir

$$WUAVX \equiv A' \pmod{\mathfrak{n}}.$$

Nach Induktionsannahme existiert ein C in $SL(k-1, \mathbb{F}_q[T])$ mit

$$C \equiv \begin{pmatrix} a_1 a_2 & & & \\ & a_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{n}}.$$

Dann setzen wir

$$B := U^{-1}W^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-a_1 & & & \\ & C & & \\ & & & \\ & & & 0 \end{pmatrix} X^{-1}V^{-1}.$$

Da die rechten Matrizen alle in $SL(k, \mathbb{F}_q[T])$ liegen, gilt dies auch für B , und nach Konstruktion ist $B \equiv A \pmod{\mathfrak{n}}$. Damit ist die Induktion beendet und der Satz bewiesen. \square

Wir haben den Satz zwar für beliebige Dimension k bewiesen, aber in dieser Arbeit wird immer $k = 3$ gelten.

Korollar 4.16 Sei $\mathfrak{n} \in F_q[T]$ prim. Dann ist

$$|G(\mathfrak{n})| = (q-1) q^{3d} (q^d - 1)^2 (q^d + 1)(q^{2d} + q^d + 1)$$

Beweis: Da \mathfrak{n} prim ist, ist $F_q[T]/(\mathfrak{n})$ der Körper mit q^d Elementen. Mit den Bezeichnungen aus dem obigen Beweis ist

$$G(\mathfrak{n}) \cong A(\mathbb{F}_q) \rtimes SL(3, F_q[T]/(\mathfrak{n})).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} |G(\mathbf{n})| &= (q-1) \cdot |SL(3, F_q[T]/(\mathbf{n}))| \\ &= (q-1) q^{3d} (q^d-1)^2 (q^d+1)(q^{2d}+q^d+1). \end{aligned}$$

□

Kommen wir zu den Betrachtungen von Seite 53 zurück. Da $\overline{\Gamma_w}$ und $G(\mathbf{n})$ endliche Gruppen sind, existieren für jedes $w \in S(\mathcal{W})$ genau

$$\frac{|G(\mathbf{n})|}{|\overline{\Gamma_w}|}$$

Simplizes vom Niveau w in $\mathcal{B}(\mathbf{n})$. Wir verzichten vorerst darauf, diese Quotienten zu berechnen, da wir sehen werden, daß nur für bestimmte Simplizes w aus \mathcal{W} die Mächtigkeit von \mathfrak{N}_w für uns relevant ist.

Wir werden nun Aussagen über die Homologie von $\mathcal{B}(\mathbf{n})$ ermitteln. Da $\mathcal{B}(\mathbf{n})$ ein unendlicher Simplizialkomplex ist, werden wir auf Satz 1.20 zurückgreifen. Daher müssen wir eine Ausschöpfung von $\mathcal{B}(\mathbf{n})$ definieren.

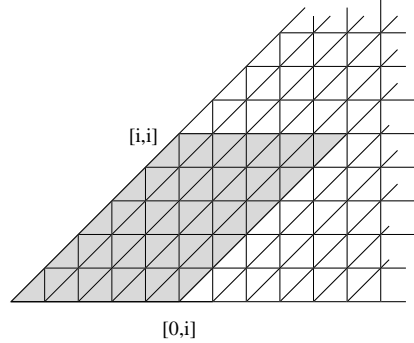
Definition 4.17 Sei $i \in \mathbb{N}$. Dann ist der Unterkomplex \mathcal{W}_i von \mathcal{W} wie folgt definiert:

$$(i) \mathcal{V}(\mathcal{W}_i) := \{[a, a+k] \mid 0 \leq a \leq i, 0 \leq k \leq i\}$$

(ii) Für alle Simplizes s aus \mathcal{W} gilt

$$s \in \mathcal{W}_i \iff \text{alle Knoten von } s \text{ liegen in } \mathcal{W}_i.$$

\mathcal{W}_i hat also folgende Gestalt:



Wir definieren den endlichen Unterkomplex $\mathcal{B}_i(\mathbf{n})$ von $\mathcal{B}(\mathbf{n})$ durch

Definition 4.18 Sei $s \in S(\mathcal{B}(\mathbf{n}))$. Dann liegt s genau dann in $\mathcal{B}_i(\mathbf{n})$, wenn $\text{Niveau}(s)$ in \mathcal{W}_i liegt.

Also ist $\mathcal{B}_i(\mathbf{n})$ das Urbild von \mathcal{W}_i unter der Abbildung Niveau. Wir haben uns bereits überlegt, daß es in $\mathcal{B}(\mathbf{n})$ nur endlich viele Simplizes von gleichem Niveau gibt. Da \mathcal{W}_i endlich ist, ist auch $\mathcal{B}_i(\mathbf{n})$ endlich. Die Folge $(\mathcal{B}_i(\mathbf{n}))_{i=1}^{\infty}$ ist eine Ausschöpfung des Simplizialkomplex $\mathcal{B}(\mathbf{n})$. Das heißt, jedes $\mathcal{B}_i(\mathbf{n})$ ist Unterkomplex von $\mathcal{B}_{i+1}(\mathbf{n})$, und jeder Simplex aus \mathcal{B} liegt in einem $\mathcal{B}_i(\mathbf{n})$. Im weiteren Verlauf werden wir zeigen, daß für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(\mathcal{B}_{d+i}(\mathbf{n})) \cong H_k(\mathcal{B}_{d-1}(\mathbf{n}))$$

gilt, so daß wir Korollar 1.21 anwenden können.

Wie wir uns bereits überlegt haben, ist die Anzahl der Simplizes vom Niveau w in $\mathcal{B}(\mathbf{n})$ gleich

$$\frac{|\mathbf{G}(\mathbf{n})|}{|\text{Fix}_\Gamma(w)|}.$$

Daher könnten wir nun die Euler-Charakteristik von $\mathcal{B}_k(\mathbf{n})$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ ermitteln. Dies stellen wir jedoch zurück, da wir die Eulercharakteristik im Kapitel 6 aus einer allgemeineren Formel folgern können.

Satz 4.19 Sei $k \geq d$. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{Z}$

$$H_j(\mathcal{B}_k(\mathbf{n})) = H_j(\mathcal{B}_{k-1}(\mathbf{n})).$$

Beweis: Wir zeigen, daß für $k \geq d$ der Simplicialkomplex $\mathcal{B}_k(\mathbf{n})$ zu $\mathcal{B}_{k-1}(\mathbf{n})$ zusammenstürzt. Das heißt, daß das Urbild von \mathcal{W}_k unter der Abbildung Niveau durch elementare Zusammenbrüche in das Urbild von \mathcal{W}_{k-1} überführt werden kann. Dies geschieht in mehreren Schritten.

1. Schritt: Für $0 \leq i \leq k-1$ sei $w = \{[k-1, k+i], [k, k+1], [k, k+i+1]\}$ ein 2-Simplex von \mathcal{W}_k . Dann ist $\tilde{w} = \{[k, k+i], [k, k+i+1]\}$ die Seite von w , die über dem "oberen" Rand von \mathcal{W}_k liegt. Die zugehörigen Fixgruppen unter Γ lauten

$$\text{Fix}_\Gamma(w) = \begin{pmatrix} * & \{k-1\} & \{k+i\} \\ 0 & * & \{i\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

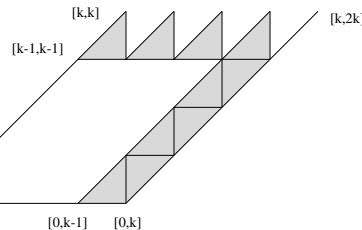
und

$$\text{Fix}_\Gamma(\tilde{w}) = \begin{pmatrix} * & \{k\} & \{k+i\} \\ 0 & * & \{i\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

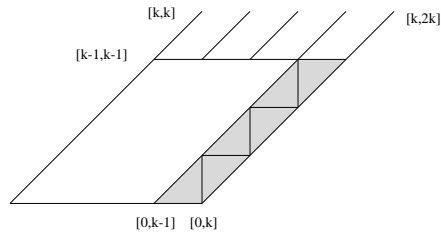
Der entscheidende Punkt ist nun, daß die Bilder der beiden Gruppen in $\mathbf{G}(\mathbf{n})$ gleich sind, da k echt größer $d-1$ ist. Daher ist die zugehörige Seitenabbildung

$$\mathbf{G}(\mathbf{n}) / \overline{\text{Fix}_\Gamma(w)} \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbf{n}) / \overline{\text{Fix}_\Gamma(\tilde{w})}$$

eine Bijektion. Sei nun s ein 2-Simplex vom Niveau w und t seine Seite vom Niveau \tilde{w} . Als 2-Simplex ist s ein Hauptsimplex in $\mathcal{B}_k(\mathbf{n})$, und da die Seitenabbildung bijektiv ist und \tilde{w} am Rand von \mathcal{W}_k liegt, ist t eine freie Seite. Daher können wir s und t aus $\mathcal{B}_k(\mathbf{n})$ entfernen, ohne die Homologie zu ändern. Da die Anzahl der Simplizes vom Niveau w in $\mathcal{B}_k(\mathbf{n})$ mit der Anzahl der Simplizes vom Niveau \tilde{w} übereinstimmt, können in endlich vielen Schritten alle Simplizes der Niveaus w und \tilde{w} aus $\mathcal{B}_k(\mathbf{n})$ entfernt werden. Indem man dies für alle w durchführt, erhält man einen Unterkomplex Z_1 von $\mathcal{B}_k(\mathbf{n})$, der genau das Urbild unter der Niveauabbildung des folgenden Bereiches ist:

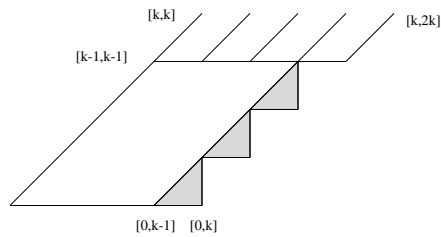


2. Schritt: Indem wir $w = \{[k, k+i], [k, k+i+1], [k+1, k+i+1]\}$ und $\tilde{w} = \{[k, k+i+1], [k+1, k+i+1]\}$ setzen und deren Fixgruppen unter Γ betrachten, erhalten wir mit den Argumenten aus dem 1. Schritt, daß Z_1 zu Z_2 kollabiert, wobei Z_2 das Urbild von



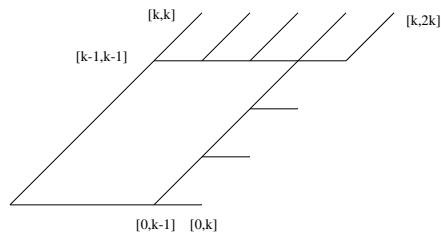
ist.

3. Schritt: Wie im ersten Schritt kollabiert Z_2 zum Urbild von



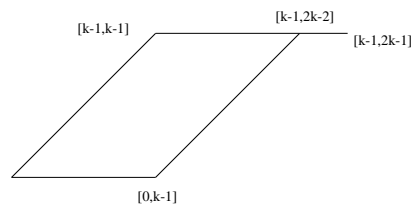
, daß wir mit Z_3 bezeichnen.

4. Schritt: Wie in Schritt zwei wird Z_3 auf Z_4 , das Urbild von



reduziert.

5. Schritt: In Z_4 sind alle Knoten vom Niveau $[k, k+i]$ bzw. $[i, k+i]$ mit $0 \leq i \leq k-2$ freie Seiten der zugehörigen 1-Simplizes, da die Bilder der entsprechenden Fixgruppen in $G(\mathfrak{n})$ gleich sind, und wir erhalten durch Kollabieren das Urbild von



6. Schritt: Analog zu Schritt fünf werden nun alle Simplizes der Niveaus $[k-1, 2k-1]$ und $\{[k-1, 2k-2], [k-1, 2k-1]\}$ entfernt.

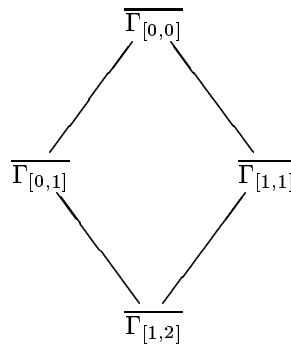
Damit haben wir durch elementare Zusammenbrüche $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ in das Urbild von \mathcal{W}_{k-1} überführt. Dies ist aber genau $\mathcal{B}_{k-1}(\mathfrak{n})$ und die Aussage ist gezeigt. \square

Überlegen wir uns nun, wie $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ im einfachsten Fall aussieht. Wir wählen \mathfrak{n} als das Polynom $T \in \mathbb{F}_q[T]$. In diesem Fall ist $G(\mathfrak{n})$ gleich $GL(\mathbb{F}_q)$, und für die Fixgruppen

der Knoten aus \mathcal{W} gilt

$$\overline{\Gamma}_{[j,k]} = \begin{cases} GL(\mathbb{F}_q) & : 0 = j = k \\ B(\mathbb{F}_q) & : 0 < j < k \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & : 0 = j < k \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} & : 0 < j = k \end{cases} .$$

Um eine Vorstellung vom Quotienten zu erhalten, verfolgen wir, wie $\mathcal{B}(T)$ aus den Kopien $\{\mathcal{W}g_1, \dots, \mathcal{W}g_{|G(n)|}\}$ von \mathcal{W} durch Verkleben entsteht. Wir stellen fest, daß für die Fixgruppen folgende Inklusionen gelten:



Es ist zu beachten, daß diese Inklusionen nur im Fall $d = 1$ gelten.

Wie wir bereits wissen, ist $\mathcal{B}(T)$ ein Simplicialkomplex. Daher werden zwei k -Simplizes genau dann verklebt, wenn sie an ihren $(k + 1)$ Knoten verklebt werden. Da $\overline{\Gamma}_{[1,2]}$ Untergruppe aller Fixgruppen ist, werden zwei Kopien von \mathcal{W} , die in einem inneren Knoten verklebt werden, bereits vollständig identifiziert. Diese Klassen von identischen Ebenen werden durch die Restklassen aus

$$B(\mathbb{F}_q) \setminus G(n)$$

parametrisiert. Betrachten wir nun das Verkleben auf den Rändern. Da alle 0- und 1-Simplizes der Kante

$$[0, 1] - [0, 2] - [0, 3] - \dots$$

die gleiche Fixgruppe besitzen, werden zwei Kopien über dieser Kante genau dann identifiziert, wenn sie über dem Knoten $[0, 1]$ identifiziert werden. In den Seitenabbildungen drückt sich dies wie folgt aus: Zwei Exemplare von \mathcal{W} werden über dem obigen Randstück genau dann identifiziert, wenn sie unter der natürlichen Abbildung

$$B(\mathbb{F}_q) \setminus G(n) \rightarrow \overline{\Gamma}_{[0,1]} \setminus G(n)$$

die gleichen Bilder haben. Analog werden zwei Kopien von \mathcal{W} über dem Randstück

$$[1, 1] - [2, 2] - [3, 3] - \dots$$

verklebt, wenn sie unter der Abbildung

$$B(\mathbb{F}_q) \setminus G(\mathfrak{n}) \rightarrow \overline{\Gamma_{[1,1]}} \setminus G(\mathfrak{n})$$

die gleichen Bilder besitzen. Da $[\overline{\Gamma_{[0,1]}} : B(\mathbb{F}_q)] = [\overline{\Gamma_{[1,1]}} : B(\mathbb{F}_q)] = q + 1$ ist, werden über jeder Kante $q + 1$ der Klassen $B(\mathbb{F}_q) \cdot g$ von \mathcal{W} -Kopien verklebt. Dabei ist folgendes zu beachten: Seien g, h aus $G(\mathfrak{n})$. Dann repräsentieren diese Elemente Kopien $\mathcal{W} \cdot g$ und $\mathcal{W} \cdot h$ von \mathcal{W} . Nehmen wir an, diese beiden Kopien werden über beiden Rändern identifiziert, d.h.

$$\overline{\Gamma_{[0,1]}} \cdot g = \overline{\Gamma_{[0,1]}} \cdot h$$

und

$$\overline{\Gamma_{[1,1]}} \cdot g = \overline{\Gamma_{[1,1]}} \cdot h .$$

Dann ist

$$g h^{-1} \in \overline{\Gamma_{[0,1]}} \cap \overline{\Gamma_{[1,1]}} = \overline{\Gamma_{[1,2]}} .$$

Dies können wir schreiben als

$$\overline{\Gamma_{[1,2]}} \cdot g = \overline{\Gamma_{[1,2]}} \cdot h .$$

Also werden zwei Kopien genau dann über beiden Rändern identifiziert, wenn sie vollständig identifiziert werden.

Über den oben beschriebenen Randstücken existieren also $[G(\mathfrak{n}) : \overline{\Gamma_{[0,1]}}] = q^2 + q + 1$ Klassen von nicht verklebten Kopien von \mathcal{W} . Da $[G(\mathfrak{n}) : \overline{\Gamma_{[0,0]}}] = 1$ ist, fallen diese alle im Punkt $[0, 0]$ zusammen. Dies können wir wie folgt interpretieren: Über dem Rand $[0, 0] - [0, 1] - [0, 2] - \dots$ wird das Verkleben von der Gruppe $\overline{\Gamma_{[0,1]}}$ bestimmt. Über dem Rand $[0, 0] - [1, 1] - [2, 2] - \dots$ wird das Verkleben von der Gruppe $\overline{\Gamma_{[1,1]}}$ bestimmt. Daher wird das Verkleben über dem Schnittpunkt $[0, 0]$ der beiden Ränder durch das Erzeugnis dieser beiden Gruppen festgelegt. Das ist aber in diesem Fall bereits die gesamte $G(\mathfrak{n}) = GL(\mathbb{F}_q)$, so daß alle Kopien über dem Knoten $[0, 0]$ verklebt werden.

Nach unseren obigen Überlegungen stimmt die Homologie von $\mathcal{B}(T)$ mit der Homologie von $\mathcal{B}_0(T)$ überein. Da $\mathcal{B}_0(T)$ nur aus dem einen Punkt vom Niveau $[0, 0]$ besteht, ist $H_i(\mathcal{B}(T))$ trivial für i ungleich 0, und $H_0(\mathcal{B}(T))$ ist isomorph zu \mathbb{Z} .

Kapitel 5

Grundlagen aus der Darstellungstheorie

Einführungen in dieses Thema sind in [Lan93] zu finden.

Es sei k ein Körper und G eine endliche Gruppe. Für ein $g \in G$ bezeichnet

$$g^G := \{h^{-1}g \cdot h \mid h \in G\}$$

die Konjugationsklasse von g in G . $k[G]$ bezeichne die Gruppenalgebra, d.h.

$$k[G] = \left\{ \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma : a_{\sigma} \in k, \sigma \in G \right\},$$

mit dem Produkt

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in G} b_{\tau} \tau \right) = \sum_{\sigma, \tau \in G} a_{\sigma} b_{\tau} \sigma \tau.$$

Definition 5.1 Sei G eine endliche Gruppe, V ein k -Vektorraum. Eine Darstellung von G (auf V) ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V).$$

V heißt dann G -Modul oder Darstellungsraum von ρ , und die Dimension von V über k bezeichnet man als Dimension der Darstellung ρ .

Jeder Homomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$ entspricht bei linearer Fortsetzung eindeutig einem (ebenfalls mit ρ bezeichneten) Algebrhomomorphismus

$$\rho : k[G] \longrightarrow \text{End}_k(V).$$

Die triviale Darstellung oder Einsdarstellung 1 sei gegeben durch die Vorschrift

$$1(\sigma) = id_k \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

Definition 5.2 Sei V ein G -Modul vermöge der Darstellung ρ und \tilde{V} ein G -Modul vermöge der Darstellung $\tilde{\rho}$. Dann heißt ein Vektorraumhomomorphismus

$$\tau : V \rightarrow \tilde{V}$$

G -Homomorphismus, falls er mit der Operation von G verträglich ist, d.h. falls für jedes $\sigma \in G$ und $v \in V$ gilt

$$\tau(\rho(\sigma)(v)) = \tilde{\rho}(\sigma)(\tau(v)).$$

Definition 5.3 Sind ρ und ρ' Darstellungen von G auf V mit den Darstellungsräumen V und V' , so heißen ρ und ρ' äquivalent, falls ein Isomorphismus $\tau : V \rightarrow V'$ existiert, so daß für $\sigma \in G$ gilt:

$$\tau \circ (\rho(\sigma)) = (\rho'(\sigma)) \circ \tau.$$

Sind die Darstellungen ρ und ρ' in Matrixform gegeben, d.h. in Bezug auf ausgewählte Basen von V und V' , so besagt die obige Bedingung, daß eine Matrix T existiert, die für alle $\sigma \in G$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$T^{-1}\rho'(\sigma)T = \rho(\sigma).$$

Definition 5.4 Ein Untervektorraum U von V heißt G -stabil, falls für alle $\sigma \in G$ die Inklusion $\rho(\sigma)(U) \subseteq U$ gilt. Der Untervektorraum U wird dann als G -Untermodul bezeichnet.

Definition 5.5 Eine Darstellung ρ von G auf V heißt irreduzibel, falls V außer (0) und V keine G -Untermodule besitzt, andernfalls heißt sie reduzibel.

Definition 5.6 Seien V_1 und V_2 Untervektorräume von V , und $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$, $\rho_1 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_1)$ und $\rho_2 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_2)$ seien Darstellungen von G . Dann ist ρ die direkte Summe von ρ_1 und ρ_2 , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $V = V_1 \oplus V_2$ als k -Vektorraum,
- (ii) V_1 und V_2 sind G -stabil,
- (iii) $\forall \sigma \in G : \rho(\sigma)|_{V_1} = \rho_1(\sigma)$ und $\rho(\sigma)|_{V_2} = \rho_2(\sigma)$.

Dann bezeichnen wir ρ_1 und ρ_2 als Unterdarstellungen von ρ und schreiben $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$.

Wählt man als Basis von $V_1 \oplus V_2$ die Vereinigung der Basen von V_1 und V_2 , so ergibt sich für Darstellungen ρ_1 und ρ_2 in Matrixform für $\sigma \in G$:

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(\sigma) = \begin{pmatrix} \rho_1(\sigma) & 0 \\ 0 & \rho_2(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Die oben angegebene Definition von Irreduzibilität gilt bei Darstellungen über beliebigen Körpern. Im speziellen Fall der Darstellungen über den komplexen Zahlen \mathbb{C} ist aber der folgende Satz von Maschke anwendbar, der den Zusammenhang von Irreduzibilität und der Zerlegbarkeit einer Darstellung in eine direkte Summe klärt:

Satz 5.7 (Maschke) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und k ein Körper, dessen Charakteristik n nicht teilt. Dann ist die Gruppenalgebra $k[G]$ halbeinfach, d.h. es gibt eine Zerlegung von $k[G]$ in ein endliches direktes Produkt einfacher Ringe:

$$k[G] = \prod_{i=1}^s R_i.$$

Beweis: [Lan93, Theorem 1.2]

Sind die Voraussetzungen für den Satz von Maschke erfüllt, so gibt es zu jedem echten G -Untermodule U eines G -Moduls V einen G -Untermodule U' mit

$$V = U \oplus U'.$$

Dies gilt jedoch i.a. nicht. Wir werden im weiteren nur komplexwertige Darstellungen betrachten, d.h. es ist immer $k = \mathbb{C}$, der Körper der komplexen Zahlen.

Definition 5.8 Der Charakter χ_ρ einer Darstellung $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$ ist definiert als die Abbildung

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\rightarrow k \\ \sigma &\mapsto \text{Tr}(\rho(\sigma)) \end{aligned}$$

wobei $\text{Tr}(\rho(\sigma))$ die Spur des Endomorphismus $\rho(\sigma)$ bezeichnet. Für einen G -invarianten Unterraum U von V bezeichnet $\chi_{\rho,U}$ die Einschränkung

$$\begin{aligned} \chi_{\rho,U} : G &\rightarrow k \\ \sigma &\mapsto \text{Tr}(\rho(\sigma)|_U). \end{aligned}$$

Ist die Darstellung aus dem Zusammenhang klar, schreiben wir kurz χ_U .

Da die Spur eine unter Konjugation invariante Abbildung und ρ ein Homomorphismus ist, gilt für $\sigma, \tau \in G$:

$$\chi_\rho(\tau^{-1}\sigma\tau) = \text{Tr}(\rho(\tau^{-1})\rho(\sigma)\rho(\tau)) = \text{Tr}(\rho(\sigma)) = \chi_\rho(\sigma).$$

Es gilt

Satz 5.9 Seien ρ und ρ' Darstellungen von G . Dann sind äquivalent:

- (i) ρ und ρ' sind äquivalent,
- (ii) $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

Beweis: [Lan93, Theorem 2.3]

Offensichtlich gilt für die Summe zweier Darstellungen ρ_1 und ρ_2

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}.$$

Weiter erhält man

Satz 5.10 Jede Darstellung ist eine endliche direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Diese Zerlegung ist bis auf Äquivalenz eindeutig.

Beweis: [Lan93, Theorem 2.3]

Satz 5.11 Die Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von G über \mathbb{C} ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G .

Beweis: [Lan93, Proposition 4.2] Es geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, alle Äquivalenzklassen von irreduziblen Darstellungen über \mathbb{C} der Gruppen $GL(3, \mathbb{F}_n)$ und $G(n)$ zu ermitteln. Aber zumindest werden wir in den Kapiteln 7 und 8 die Anzahl der Konjugationsklassen der Gruppen $GL(3, \mathbb{F}_n)$ und $G(n)$ und damit die Anzahl ihrer irreduziblen Darstellungen bestimmen.

Kapitel 6

Die Charaktere der Darstellungen auf $\mathcal{B}_{(d-1)}(\mathfrak{n})$

6.1 Simplizialkomplexe und Darstellungen

Sei \mathcal{D} ein endlicher orientierter n -dimensionaler Simplizialkomplex und G eine endliche Gruppe, die auf \mathcal{D} orientierungstreu von links operiert. Dann operiert G auf der Menge der orientierten i -Simplizes und damit auf $C_i(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ durch Permutation der Basis. D.h. die Operation von G auf den orientierten i -Simplizes induziert eine Permutationsdarstellung ρ_i von G auf dem Darstellungsraum $C_i(\mathcal{D}, \mathbb{C})$. Den Charakter dieser Darstellung bezeichnen wir mit $\chi(C_i)$.

Satz 6.1 *Die Randabbildungen sind G -Homomorphismen.*

Beweis: Sei $\tau \in G$. Dann sind die Darstellungen

$$\rho_i : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(C_i(\mathcal{D}))$$

$$\rho_{i-1} : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(C_{i-1}(\mathcal{D}))$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho_i(\tau) \left(\sum_{j=0}^m c_j \sigma_j \right) &= \sum_{j=0}^m c_j (\tau \sigma_j) \\ \rho_{i-1}(\tau) \left(\sum_{j=0}^m c_j \xi_j \right) &= \sum_{j=0}^m c_j (\tau \xi_j), \end{aligned}$$

wobei die σ_j orientierte i -Simplizes, die ξ_j orientierte $(i-1)$ -Simplizes und die c_j aus \mathbb{C} sind. Sei nun δ_i die zugehörige Randabbildung. Dann ist δ_i für i kleiner eins oder größer n die Nullabbildung und ist daher trivialerweise ein G -Homomorphismus. Sei also $0 < i < (n+1)$ und

$$\sigma = (a_0, \dots, a_i)$$

ein orientierter i -Simplex. Dann ist für ein $\tau \in G$

$$\begin{aligned} \delta_i(\tau \sigma) &= \delta_i(\tau a_0, \dots, \tau a_i) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j (\tau a_0, \dots, \widehat{\tau a_j}, \dots, \tau a_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j (a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_i) \right) \\
&= \tau \delta_i(\sigma) .
\end{aligned}$$

Die Randabbildung kommutiert also auf den Basiselementen mit der Gruppenoperation. Wegen der Linearität folgt für ein beliebiges w aus $C_i(\mathcal{D})$

$$\delta_i(\rho_i(\tau)(w)) = \rho_{i-1}(\tau)(\delta_i(w)) .$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Da δ_i für alle i ein G -Homomorphismus ist, sind $\ker(\delta_i)$ und $\text{Im}(\delta_{i+1})$ G -invariant, und die Operation von G auf dem Kettenkomplex $(C_i(\mathcal{D}), \delta_i)$ setzt sich auf die \mathbb{C} -wertigen Homologiegruppen $H_i(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ fort. Diese Operationen definieren Darstellungen

$$G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(H_i(\mathcal{D}, \mathbb{C}))$$

mit Charakteren

$$\chi(H_i(\mathcal{D}, \mathbb{C})) .$$

Lemma 6.2 Seien V_1, V_2 \mathbb{C} -Vektorräume,

$$\rho_1 : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V_1), \quad \rho_2 : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V_2)$$

Darstellungen und $\Psi : V_1 \rightarrow V_2$ ein G -Homomorphismus. Dann gilt

$$\chi_{V_1} = \chi_{\ker(\Psi)} + \chi_{\text{Im}(\Psi)} ,$$

wobei die χ_U die Charaktere auf den entsprechenden G -invarianten Unterräumen sind.

Beweis: Der Kern von Ψ ist ein G -invarianter Unterraum von V_1 . Nach dem Satz von Maschke existiert ein G -invarianter Unterraum U von V_1 mit $V_1 = \ker(\Psi) \oplus U$. Dann ist U aber G -isomorph zu $\text{Im}(\Psi)$ und daher ist

$$\begin{aligned}
\chi_{V_1} &= \chi_{\ker(\Psi)} + \chi_U \\
&= \chi_{\ker(\Psi)} + \chi_{\text{Im}(\Psi)} .
\end{aligned}$$

\square

Weiter gilt: Für eine beliebige Darstellung

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$$

und einen beliebigen G -invarianten Unterraum U von V , existiert nach dem Satz von Maschke ein G -invarianter Unterraum U' mit $V = U \oplus U'$. Daher ist dann $\chi_V = \chi_U + \chi_{U'}$. Weiter induziert ρ eine Darstellung

$$\tilde{\rho} : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V/U) .$$

Die Einschränkung des kanonischen Homomorphismus auf U' ist ein G -Isomorphismus, so daß gilt

$$\chi_V = \chi_U + \chi_{(V/U)} .$$

Also ist

$$\chi_{(V/U)} = \chi_V - \chi_U .$$

Daraus folgern wir

Satz 6.3

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \chi(C_i(\mathcal{D})) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi(H_i(\mathcal{D}, \mathbb{C})) .$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Umsortieren von endlichen Summen.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi(C_i(\mathcal{D})) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\chi_{\ker(\delta_i)} + \chi_{\text{Im}(\delta_i)}) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi_{\ker(\delta_i)} + \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi_{\text{Im}(\delta_i)} \end{aligned}$$

Durch einen Indexwechsel erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi(C_i(\mathcal{D})) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \chi_{\ker(\delta_{i-1})} + \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi_{\text{Im}(\delta_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \chi_{\ker(\delta_{i-1})} - \sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} \chi_{\text{Im}(\delta_i)} \\ &= (-1)^n \chi_{\ker(\delta_n)} - \chi_{\text{Im}(\delta_0)} + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\chi_{\ker(\delta_{i-1})} - \chi_{\text{Im}(\delta_i)}) . \end{aligned}$$

Nun ist nach Lemma 6.2 und der darauffolgenden Bemerkung

$$\chi_{\ker(\delta_{i-1})} - \chi_{\text{Im}(\delta_i)} = \chi(H_{i-1}(\mathcal{D}, \mathbb{C})) .$$

Weiter ist $\text{Im}(\delta_0)$ der Nullraum und daher

$$\chi_{\text{Im}(\delta_0)} = 0 .$$

Da \mathcal{D} die Dimension n hat, ist auch $\text{Im}(\delta_{n+1})$ der Nullraum, und es ergibt sich

$$\chi_{\ker(\delta_n)} = \chi_{\ker(\delta_n)} - \chi_{\text{Im}(\delta_{n+1})} = \chi(H_n(\mathcal{D}, \mathbb{C})) .$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi_{C_i(\mathcal{D})} &= (-1)^n \chi(H_n(\mathcal{D}, \mathbb{C})) - 0 + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \chi(H_{i-1}(\mathcal{D}, \mathbb{C})) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi(H_i(\mathcal{D}, \mathbb{C})) . \end{aligned}$$

□

Ich weise darauf hin, daß in diesem Kapitel Summen bzw. Differenzen von Charakteren als Summen bzw. Differenzen von \mathbb{C} -wertigen Funktionen zu verstehen sind. Es gilt i.a. nicht, daß Differenzen von Charakteren wieder Charaktere einer Darstellung sind.

6.2 Die Charaktere auf $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$.

Wir werden das oben beschriebene auf den endlichen Simplicialkomplex $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ anwenden. Besonders interessiert der Fall $k = d - 1$, da wir gezeigt haben, daß die Homologien von $\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n})$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ übereinstimmen. Zuerst müssen wir eine Orientierung auf $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ definieren. Dazu definieren wir allgemeiner eine Orientierung auf den Simplexes des Bruhat-Tits-Gebäudes \mathcal{B} . Auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sei eine Ordnung durch

$$\bar{0} < \bar{1} < \bar{2}$$

gegeben.

Definition 6.4 Sei $s = \{v_0, \dots, v_i\} \in S_i(\mathcal{B})$. Dann heißt (v_0, \dots, v_i) positiv orientiert, falls eine gerade Permutation P auf $(i+1)$ Elementen existiert mit

$$\text{Typ}(v_{P(0)}) < \text{Typ}(v_{P(1)}) \dots < \text{Typ}(v_{P(i)}) .$$

Es bezeichnen

$$S_i^+(\mathcal{B}) = \text{Menge der positiv orientierten } i\text{-Simplizes in } \mathcal{B},$$

$$S_i^-(\mathcal{B}) = \text{Menge der negativ orientierten } i\text{-Simplizes in } \mathcal{B},$$

$$S_i^{\text{or}}(\mathcal{B}) = S_i^+ \cup S_i^- .$$

Da die Operation von Γ den Typ erhält, läßt sich die Orientierung von \mathcal{B} auf $\mathcal{B}(\mathbf{n})$ und \mathcal{W} übertragen. Die Bezeichnungen $S_i^+(\mathcal{B}(\mathbf{n}))$, $S_i^+(\mathcal{W})$ etc. haben die analogen Bedeutungen.

Wir erhalten eine Operation der Gruppe $G(\mathbf{n})$ auf den i -Simplizes von $\mathcal{S}^+(\mathcal{B}(\mathbf{n}))$ wie folgt:

Für einen orientierten Simplex w^+ aus $\mathcal{S}^+(\mathcal{W})$ sei

$$\mathfrak{N}_{w^+(\mathbf{n})} := \{s^+ \in \mathcal{S}^+(\mathcal{B}_{d-1}(\mathbf{n})) \mid \text{Niveau}(s) = w\} .$$

Da Γ den Typ erhält, ist

$$\text{Fix}_{\Gamma}(w^+) = \text{Fix}_{\Gamma}(w) ,$$

so daß analog zum nichtorientierten Fall die Korrespondenz

$$\mathfrak{N}_{w^+(\mathbf{n})} \longleftrightarrow \overline{\Gamma}_w \backslash G(\mathbf{n})$$

gilt. Daher kann man eine Linksoperation von $G(\mathbf{n})$ auf $\mathfrak{N}_{w^+(\mathbf{n})}$ wie folgt definieren

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbf{n}) \times \overline{\Gamma}_w \backslash G(\mathbf{n}) & \rightarrow & \overline{\Gamma}_w \backslash G(\mathbf{n}) \\ (\tau \quad , \quad \overline{\Gamma}_w a) & \mapsto & \overline{\Gamma}_w (a \tau^{-1}) \end{array} .$$

Bemerkung: Aufgrund der Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathbf{n}) \backslash \Gamma / \Gamma_w & \rightarrow & \Gamma_w \backslash \Gamma / \Gamma(\mathbf{n}) \\ \bar{\gamma} & \mapsto & \overline{\gamma^{-1}} \end{array}$$

von Seite 54 operiert $G(\mathbf{n})$ von links durch Multiplikation des Inversen von rechts. Die oben angegebene Operation induziert eine Operation auf

$$S_i^+(\mathcal{B}_k(\mathbf{n})) = \dot{\bigcup}_{w^+ \in S_i^+(\mathcal{W}_k)} \mathfrak{N}_{w^+(\mathbf{n})} .$$

So erhalten wir für jedes $i \in \{0, 1, 2\}$ eine Permutationsdarstellung

$$\rho_{(i,k)} : G(\mathbf{n}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(C_i(\mathcal{B}_k(\mathbf{n}), \mathbb{C})) .$$

Die von Elementen aus $\mathfrak{N}_{w^+(\mathbf{n})}$ erzeugten Unterräume von $C_i(\mathcal{B}_k(\mathbf{n}), \mathbb{C})$ sind $G(\mathbf{n})$ -invariant. Weiter bezeichnen wir mit $\chi_{(i,k)}$ den Charakter zur Darstellung $\rho_{(i,k)}$, und mit $\chi_i(w^+)$ bezeichnen wir den Charakter der Unterdarstellung von $\rho_{(i,k)}$ auf

dem Unterraum mit Basis $\mathfrak{N}_{w^+(n)}$. Die Charaktere $\chi_i(w^+)$ sind unabhängig von k . Wir sagen, $\chi_i(w^+)$ ist der Charakter des Simplex w aus \mathcal{W} . Dann gilt

$$\chi_{(i,k)} = \sum_{w^+ \in \mathcal{S}^+(\mathcal{W}_k)} \chi_i(w^+).$$

Um die Werte der Charaktere $\chi_i(w^+)$ explizit angeben zu können, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 6.5 *Sei G eine endliche Gruppe, U eine Untergruppe von G und σ ein festes Element aus G . Dann gilt*

$$|\{Ur_i \mid r_i \in G, Ur_i\sigma = Ur_i\}| = [G : U] \cdot \frac{|\sigma^G \cap U|}{|\sigma^G|}.$$

Beweis: Es sei $R := \{r_1, \dots, r_{[G:U]}\}$ ein Vertretersystem von $U \backslash G$. Für ein Element $z \in G$ kürzen wir

$$n(z) := |\{Ur_i \mid Ur_i z = Ur_i\}|$$

ab. Wir führen den Beweis, indem wir die Menge

$$\mathcal{M} := \{(x, Ur_i) \mid x \in \sigma^{G(n)}, Ur_i x = Ur_i\}$$

auf zwei verschiedene Arten aufzählen.

Einerseits definieren wir für alle $y \in \sigma^G$ die Mengen

$$M(y) := \{(y, Ur_i) \mid Ur_i y = Ur_i\}.$$

Dann ist $|M(y)| = n(y)$. Weiter ist \mathcal{M} die disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{M} = \dot{\bigcup}_{y \in \sigma^G} M(y),$$

und daher ist

$$|\mathcal{M}| = \sum_{y \in \sigma^G} |M(y)|.$$

Da für zwei Matrizen y, y' aus σ^G gilt $|M(y)| = |M(y')|$, ergibt sich

$$|\mathcal{M}| = |\sigma^G| \cdot |M(\sigma)| = |\sigma^G| \cdot n(\sigma).$$

Wir können \mathcal{M} auch anders zerlegen. Dazu definieren wir zu einem $r_i \in R$

$$N(r_i) := \{(y, Ur_i) \mid y \in \sigma^G, Ur_i y = Ur_i\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{M} = \dot{\bigcup}_{r_i \in R} N(r_i)$$

und

$$|\mathcal{M}| = \sum_{i=1}^{[G:U]} |N(r_i)|.$$

Die Mengen $N(r_i)$ lassen sich auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} N(r_i) &= \{(y, Ur_i) \mid Ur_i y = Ur_i, y \in \sigma^G\} \\ &= \{(y, Ur_i) \mid r_i y r_i^{-1} \in U, y \in \sigma^G\} \\ &= r_i \sigma^G r_i^{-1} \cap U. \end{aligned}$$

Für jedes i ist dann

$$\begin{aligned} |N(r_i)| &= |r_i \sigma^G r_i^{-1} \cap U| \\ &= |\sigma^G \cap U|. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$|\mathcal{M}| = \sum_{i=1}^{[G:U]} |N(r_i)| = [G:U] \cdot |\sigma^G \cap U|.$$

Insgesamt folgt

$$|\sigma^G| \cdot n(\sigma) = |\mathcal{M}| = [G:U] \cdot |\sigma^G \cap U|.$$

Unter Berücksichtigung der Definition von $n(\sigma)$ folgt die Behauptung. \square

Aus dem Lemma können wir direkt folgern:

Satz 6.6 Sei $w^+ \in S_i(\mathcal{W})$ und M eine beliebige Matrix aus $G(\mathfrak{n})$. Dann gilt

$$\chi_i(w^+)(M) = [G(\mathfrak{n}) : \overline{\Gamma_w}] \frac{|(M^{-1})^{G(\mathfrak{n})} \cap \overline{\Gamma_w}|}{|(M^{-1})^{G(\mathfrak{n})}|}.$$

Beweis: Da $G(\mathfrak{n})$ auf dem von Elementen aus $\mathfrak{N}_{w^+(\mathfrak{n})}$ erzeugten \mathbb{C} -Vektorraum operiert, indem es die Basisvektoren permutiert, induziert die Operation eine Permutationsdarstellung. Daher ist für ein M aus G der Wert $\chi_i(w^+)(M)$ gleich der Anzahl der Simplizes in $\mathfrak{N}_{w^+(\mathfrak{n})}$, die von M fest gelassen werden. Beachtet man die Korrespondenz

$$\mathfrak{N}_{w^+(\mathfrak{n})} \longleftrightarrow \overline{\Gamma_w} \backslash G(\mathfrak{n}),$$

so folgt

$$\chi_i(w^+)(M) = |\{\overline{\Gamma_w} B \mid B \in G(\mathfrak{n}), \overline{\Gamma_w} B M^{-1} = \overline{\Gamma_w} B\}|.$$

Daher folgt aus dem gerade gezeigten Lemma die Aussage. \square

Korollar 6.7 Seien $w_1^+ \in S_i(\mathcal{W})$ und $w_2^+ \in S_j(\mathcal{W})$ zwei Simplizes von nicht notwendig gleicher Dimension. Weiter sei

$$\overline{\Gamma_{w_1}} = \overline{\Gamma_{w_2}}.$$

Dann gilt

$$\chi_i(w_1) = \chi_j(w_2).$$

Im letzten Abschnitt haben wir bereits gesehen, daß die Operation der $G(\mathfrak{n})$ auf den i -Simplizes von $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ eine Operation auf den \mathbb{C} -wertigen Homologiegruppen bewirkt. Daher erhalten wir Darstellungen

$$\rho_{(i,k)}^H : G(\mathfrak{n}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(H_i(\mathcal{B}_k(\mathfrak{n}), \mathbb{C}))$$

mit zugehörigen Charakteren

$$\chi_{(i,k)}^H.$$

Um diese Charaktere für den 2-dimensionalen Simplicialkomplex $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ zu berechnen, nutzen wir die Beziehung

$$\chi_{(2,k)} - \chi_{(1,k)} + \chi_{(0,k)} = \chi_{(2,k)}^H - \chi_{(1,k)}^H + \chi_{(0,k)}^H$$

aus, die wir auf Seite 72 gezeigt haben. Die Charaktere auf der linken Seite können wir noch weiter in

$$\sum_{w^+ \in S_2^+(\mathcal{W}_k)} \chi_2(w^+) - \sum_{w^+ \in S_1^+(\mathcal{W}_k)} \chi_1(w^+) + \sum_{w^+ \in S_0^+(\mathcal{W}_k)} \chi_0(w^+)$$

zerlegen. Da viele Knoten, Kanten und 2-Simplizes aus \mathcal{W} gleiche Fixgruppen haben, haben sie auch gleiche Charaktere. Daher heben sich viele Charaktere der endlichen Summen gegenseitig auf. Wir werden nun die linke Summe weitestgehend vereinfachen. Dazu führen wir zur besseren Übersichtlichkeit folgende neuen Bezeichnungen ein:

Definition 6.8 Sei $\{[i, j], [k, l], [m, n]\}$ ein nichtorientierter Simplex in \mathcal{W} . Dann bezeichnen

$$\chi_0(i, j), \quad \chi_1\left(\begin{array}{c} i, j \\ k, l \end{array}\right), \quad \chi_2\left(\begin{array}{c} i, j \\ k, l \\ m, n \end{array}\right)$$

die den entsprechenden positiv orientierten Simplizes zugeordneten Charaktere.

Beispiel:

$$\chi_1\left(\begin{array}{c} 0, 0 \\ 1, 1 \end{array}\right) = \chi_1\left(\begin{array}{c} 1, 1 \\ 0, 0 \end{array}\right) = \chi_1([0, 0], [1, 1]).$$

Weiter weisen wir auf die Gleichheit der folgenden Charaktere hin:

Lemma 6.9

(i) Sei $[i, j]$ im Inneren von \mathcal{W} , d.h. $0 < i < j$. Dann ist

$$\chi_0(i, j) = \chi_1\left(\begin{array}{c} i, j \\ i, j+1 \end{array}\right) = \chi_1\left(\begin{array}{c} i, j \\ i+1, j+1 \end{array}\right) = \chi_2\left(\begin{array}{c} i, j \\ i, j+1 \\ i+1, j+1 \end{array}\right).$$

(ii) Sei $0 < j$. Dann ist

$$\chi_0(0, j) = \chi_1\left(\begin{array}{c} 0, j \\ 0, j+1 \end{array}\right), \quad \chi_0(j, j) = \chi_1\left(\begin{array}{c} j, j \\ j+1, j+1 \end{array}\right).$$

(iii) Für alle $0 < i \leq j$ gilt

$$\chi_1\left(\begin{array}{c} i, j \\ i, j+1 \end{array}\right) = \chi_2\left(\begin{array}{c} i, j \\ i, j+1 \\ i+1, j+1 \end{array}\right).$$

(iv) Für alle $0 \leq i < j$ gilt

$$\chi_1\left(\begin{array}{c} i, j \\ i+1, j \end{array}\right) = \chi_2\left(\begin{array}{c} i, j \\ i+1, j \\ i+1, j+1 \end{array}\right).$$

(v) Für alle $0 < i$ gilt

$$\chi_1\left(\begin{array}{c} 0, i \\ 1, i+1 \end{array}\right) = \chi_2\left(\begin{array}{c} 0, i \\ 0, i+1 \\ 1, i+1 \end{array}\right).$$

Beweis: Die entsprechenden Simplizes besitzen die gleichen Fixgruppen unter Γ , und daher stimmen auch die Bilder ihrer Fixgruppen in $G(\mathfrak{n})$ überein. Da die Charaktere nur von den Bildern der Fixgruppen in $G(\mathfrak{n})$ abhängen, folgt die Aussage. \square

Betrachtet man das Bild von Seite 143, so vermutet man, daß sich in der alternierenden Summe der Charaktere viele Summanden wegheben. Wir können die Summe wie folgt zusammenfassen:

Satz 6.10 Für $k > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \chi_{(2,k)} - \chi_{(1,k)} + \chi_{(0,k)} \\ &= \chi_0(k, 2k) + \chi_0(0, k) + \chi_0(k, k) + \chi_0(0, 0) \\ & \quad - \chi_1 \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} - \chi_1 \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,1 \end{pmatrix} - \chi_1 \begin{pmatrix} 0, k \\ 1, k+1 \end{pmatrix} - \chi_1 \begin{pmatrix} k, k \\ k, k+1 \end{pmatrix} \\ & \quad + \chi_2 \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \\ 1,1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach k . Wir kürzen die Summe $\chi_{(0,k)} - \chi_{(1,k)} + \chi_{(2,k)}$ durch $\widehat{\chi}_k$ ab.
Induktionsanfang: $k = 1$ Es ist

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_1 &= \chi_0(0, 0) + \chi_0(0, 1) + \chi_0(1, 1) + \chi_0(1, 2) \\ & \quad + \chi_2 \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \\ 1,1 \end{pmatrix} + \chi_2 \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,1 \\ 1,2 \end{pmatrix} - \chi_1 \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} \\ & \quad - \chi_1 \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,1 \end{pmatrix} - \chi_1 \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,1 \end{pmatrix} - \chi_1 \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,2 \end{pmatrix} - \chi_1 \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1,2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das obige Lemma liefert die folgenden Gleichheiten:

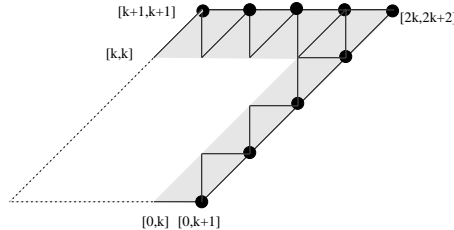
$$\chi_1 \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,1 \end{pmatrix} = \chi_2 \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,1 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Daher heben sich zwei Summanden weg, und der Induktionsanfang ist gezeigt.

Induktionsannahme: Für k größer Null gelte die im Satz angegebene Formel.

Induktionsschluß: $k \rightarrow k + 1$.

Beim Übergang von $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ nach $\mathcal{B}_{k+1}(\mathfrak{n})$ werden die Charaktere $\chi_i(w^+)$ von i -Simplizes w aus \mathcal{W} , die in folgendem Bereich liegen, hinzugenommen:

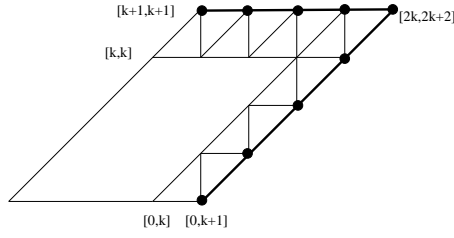


Dadurch können wir schreiben

$$\widehat{\chi}_{k+1} = \widehat{\chi}_k + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

mit den unten angegebenen Summen Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 . In den Teilsommen werden die Charaktere der 0-,1- und 2-Simplizes so aufsummiert, daß sich die meisten Summanden wegheben.

1.Fall: Berechnung von Σ_1 . In Σ_1 summieren wir über die Charaktere der Simplizes, die in folgendem Bereich liegen:



Also ist

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left(\sum_{i=0}^{k+1} \chi_0(k+1, k+1+i) + \sum_{i=0}^k \chi_0(i, k+1+i) \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=0}^k \chi_1 \binom{k+1, k+1+i}{k+1, k+2+i} + \sum_{i=0}^k \chi_1 \binom{i, k+1+i}{i+1, k+i+2} \right) \end{aligned}$$

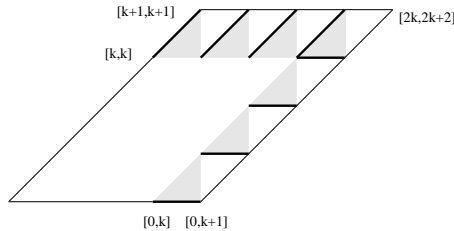
Durch Umordnen erhalten wir

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{i=0}^{k+1} \chi_0(k+1, k+1+i) - \sum_{i=0}^k \chi_1 \binom{k+1, k+1+i}{k+1, k+2+i} + \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \chi_0(i, k+1+i) - \sum_{i=0}^k \chi_1 \binom{i, k+1+i}{i+1, k+i+2} \\ &= \chi_0(k+1, k+1) - \chi_1 \binom{k+1, k+1}{k+1, k+2} + \chi_0(k+1, 2k+2) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \left(\chi_0(k+1, k+1+i) - \chi_1 \binom{k+1, k+1+i}{k+1, k+2+i} \right) + \\ &\quad + \chi_0(0, k+1) - \chi_1 \binom{0, k+1}{1, k+2} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \left(\chi_0(i, k+i+1) - \chi_1 \binom{i, k+i+1}{i+1, k+i+2} \right). \end{aligned}$$

Nach den obigen Lemmata sind die Summen gleich Null, und es gilt

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \chi_0(k+1, k+1) + \chi_0(k+1, 2k+2) + \chi_0(0, k+1) + \\ &\quad - \chi_1 \binom{k+1, k+1}{k+1, k+2} - \chi_1 \binom{0, k+1}{1, k+2}. \end{aligned}$$

2.Fall: Nun wird über die Charaktere der folgenden Simplizes summiert:



d.h. es ist

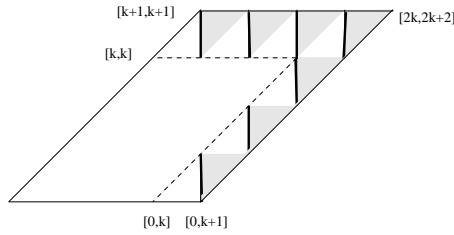
$$\Sigma_2 := \sum_{i=0}^k \chi_2 \binom{k, k+i}{k, k+i+1} - \sum_{i=0}^k \chi_1 \binom{k, k+i}{k+1, k+i+1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \chi_2 \left(\begin{array}{c} i, k+i \\ i, k+i+1 \\ i+1, k+i+1 \end{array} \right) - \sum_{i=0}^k \chi_1 \left(\begin{array}{c} i, k+i \\ i, k+i+1 \end{array} \right) .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \chi_2 \left(\begin{array}{c} k, k \\ k, k+1 \\ k+1, k+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} k, k \\ k+1, k+1 \end{array} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^k \left(\chi_2 \left(\begin{array}{c} k, k+i \\ k, k+i+1 \\ k+1, k+i+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} k, k+i \\ k+1, k+i+1 \end{array} \right) \right) + \\ &+ \chi_2 \left(\begin{array}{c} 0, k \\ 0, k+1 \\ 1, k+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} 0, k \\ 0, k+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} k, 2k \\ k, 2k+1 \end{array} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \left(\chi_2 \left(\begin{array}{c} i, k+i \\ i, k+i+1 \\ i+1, k+i+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} i, k+i \\ i, k+i+1 \end{array} \right) \right) \\ \stackrel{Lemma}{=} & \chi_2 \left(\begin{array}{c} k, k \\ k, k+1 \\ k+1, k+1 \end{array} \right) + \chi_2 \left(\begin{array}{c} 0, k \\ 0, k+1 \\ 1, k+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} k, k \\ k+1, k+1 \end{array} \right) + \\ &- \chi_1 \left(\begin{array}{c} 0, k \\ 0, k+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} k, 2k \\ k, 2k+1 \end{array} \right) . \end{aligned}$$

3.Fall: Es bleiben noch die folgenden Simplizes



Dann ist

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &:= \sum_{i=1}^{k+1} \chi_2 \left(\begin{array}{c} k, k+i \\ k+1, k+i \\ k+1, k+i+1 \end{array} \right) - \sum_{i=1}^{k+1} \chi_1 \left(\begin{array}{c} k, k+i \\ k+1, k+i \end{array} \right) + \\ &\sum_{i=0}^{k-1} \chi_2 \left(\begin{array}{c} i, k+i+1 \\ i+1, k+i+1 \\ i+1, k+i+2 \end{array} \right) - \sum_{i=0}^{k-1} \chi_1 \left(\begin{array}{c} i, k+i+1 \\ i+1, k+i+1 \end{array} \right) . \end{aligned}$$

Dank des Lemmas 6.9 heben sich die Summen auf, und es ist

$$\Sigma_3 = 0 .$$

Indem wir die Teilsummen zusammensetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_{k+1} &= \widehat{\chi}_k + \chi_0(k+1, 2k+2) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} k, 2k \\ k, 2k+1 \end{array} \right) + \\ \chi_0(k+1, k+1) &- \chi_1 \left(\begin{array}{c} k, k \\ k+1, k+1 \end{array} \right) + \chi_2 \left(\begin{array}{c} k, k \\ k, k+1 \\ k+1, k+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} k+1, k+1 \\ k+1, k+2 \end{array} \right) + \\ + \chi_0(0, k+1) &- \chi_1 \left(\begin{array}{c} 0, k \\ 0, k+1 \end{array} \right) + \chi_2 \left(\begin{array}{c} 0, k \\ 0, k+1 \\ 1, k+1 \end{array} \right) - \chi_1 \left(\begin{array}{c} 0, k+1 \\ 1, k+2 \end{array} \right) . \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Induktionsannahme und beachten, daß folgende Gleichheiten gelten:

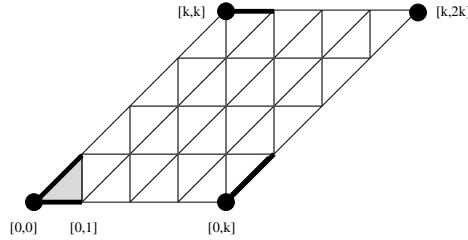
$$\begin{aligned}\chi_0(k, 2k) &= \chi_1\left(\begin{matrix} k, & 2k \\ k, & 2k+1 \end{matrix}\right), \\ \chi_0(0, k) &= \chi_1\left(\begin{matrix} 0, & k \\ 0, & k+1 \end{matrix}\right), \\ \chi_1\left(\begin{matrix} 0, & k \\ 1, & k+1 \end{matrix}\right) &= \chi_2\left(\begin{matrix} 0, & k \\ 0, & k+1 \\ 1, & k+1 \end{matrix}\right).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die gewünschte Formel

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_{k+1}} &= \chi_0(0, 0) + \chi_0(0, k+1) + \chi_0(k+1, k+1) + \chi_0(k+1, 2k+2) + \\ &\quad - \chi_1\left(\begin{matrix} 0, 0 \\ 0, 1 \end{matrix}\right) - \chi_1\left(\begin{matrix} 0, 0 \\ 1, 1 \end{matrix}\right) - \chi_1\left(\begin{matrix} 0, k+1 \\ 1, k+2 \end{matrix}\right) - \chi_1\left(\begin{matrix} k+1, k+1 \\ k+1, k+2 \end{matrix}\right) \\ &\quad + \chi_2\left(\begin{matrix} 0, 0 \\ 0, 1 \\ 1, 1 \end{matrix}\right)\end{aligned}$$

für $k+1$, und die Induktion ist beendet. \square

Um die Summe $\chi_{(0,k)} - \chi_{(1,k)} + \chi_{(2,k)}$ zu berechnen, müssen wir also nur die Charaktere zu den folgenden Simplexes ermitteln:



Der Satz liefert uns eine Möglichkeit, die Eulercharakteristik des Simplicialkomplexes $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ zu ermitteln.

Korollar 6.11 Die Eulercharakteristik von $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ ist gleich

$$\begin{aligned}&\frac{|\mathbf{G}(\mathfrak{n})|}{|\overline{\Gamma}_{[0,0]}} + 2 \frac{|\mathbf{G}(\mathfrak{n})|}{|\overline{\Gamma}_{[0,k]}} + \frac{|\mathbf{G}(\mathfrak{n})|}{|\overline{\Gamma}_{[k,2k]}} + \\ &- 2 \frac{|\mathbf{G}(\mathfrak{n})|}{|\overline{\Gamma}_{[0,0][0,1]}} - 2 \frac{|\mathbf{G}(\mathfrak{n})|}{|\overline{\Gamma}_{[0,k][1,k+1]}} + \frac{|\mathbf{G}(\mathfrak{n})|}{|\overline{\Gamma}_{[0,0][0,1][1,1]}}\end{aligned}$$

Beweis: Sei $1_{\mathbf{G}(\mathfrak{n})}$ das Einselement in $\mathbf{G}(\mathfrak{n})$. Da das Bild des Einselements $1_{\mathbf{G}(\mathfrak{n})}$ unter der Darstellung ρ_i der triviale Automorphismus ist, ist

$$|S_i(\mathcal{B}_k(\mathfrak{n}))| = \chi_i(1_{\mathbf{G}(\mathfrak{n})}).$$

Also ist die Eulercharakteristik von $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ gleich dem Wert der alternierenden Summe

$$\chi_{(0,k)}(1_{\mathbf{G}(\mathfrak{n})}) - \chi_{(1,k)}(1_{\mathbf{G}(\mathfrak{n})}) + \chi_{(2,k)}(1_{\mathbf{G}(\mathfrak{n})}),$$

die mit den Sätzen 6.10 und 6.6 berechnet werden kann. Da die Konjugationsklasse der $1_{\mathbf{G}(\mathfrak{n})}$ die Länge eins hat und $1_{\mathbf{G}(\mathfrak{n})}$ in jeder Untergruppe von $\mathbf{G}(\mathfrak{n})$ liegt, gilt für alle w aus \mathcal{W}

$$\chi_i(w^+) = [\mathbf{G}(\mathfrak{n}) : \overline{\Gamma}_w] = \frac{|\mathbf{G}(\mathfrak{n})|}{|\overline{\Gamma}_w|}.$$

Indem wir beachten, daß folgende Gleichheiten gelten

$$\begin{aligned} |\overline{\Gamma_{[0,k]}}| &= |\overline{\Gamma_{[k,k]}}| \\ |\overline{\Gamma_{[0,k][1,k+1]}}| &= |\overline{\Gamma_{[k,k][k,k+1]}}| \\ |\overline{\Gamma_{[0,0][0,1]}}| &= |\overline{\Gamma_{[0,0][1,1]}}|, \end{aligned}$$

erhalten wir die geforderte Formel. \square

Bemerkung: Die obige Formel gilt auch für k gleich 0. In diesem Fall wissen wir, daß $\mathcal{B}_0(\mathbf{n})$ aus $\mathcal{B}_1(\mathbf{n})$ durch elementare Zusammenbrüche hervorgeht. Da elementare Zusammenbrüche die Homologie nicht verändern, verändern sie auch nicht die Eulercharakteristik. Daher sind $\text{Eu}(\mathcal{B}_0(\mathbf{n}))$ und $\text{Eu}(\mathcal{B}_1(\mathbf{n}))$ gleich. Letztere können wir nach der oben angegebenen Formel ermitteln.

Wir spezialisieren das obige Korollar weiter durch

Korollar 6.12 *Sei n prim vom Grad d . Dann ist*

$$\text{Eu}(\mathbf{n}) = \left(\frac{q^{3d}-1}{q^3-1}\right) \cdot \left(\frac{q^{2d}-1}{q^2-1}\right) \cdot (q^{3d} - 2q^{d+2} - 2q^{d+1} - 2q^d + q^3 + 2q^2 + 2q + 1)$$

ein Polynom in $\mathbb{Z}[q]$.

Beweis: Folgende Gruppen haben die folgenden Mächtigkeiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{n}) &: (q^{2d} + q^d + 1)(q^{3d} - q^d)(q^{3d} - q^{2d})(q - 1) \\ \overline{\Gamma_{[0,0]}} &: (q^3 - q^2)(q^3 - q)(q^3 - 1) \\ \overline{\Gamma_{[0,d-1]}} &: (q - 1)^3(q + 1)q^{2d+1} \\ \overline{\Gamma_{[k,2d-2]}} &: (q - 1)^3q^{3d} \\ \overline{\Gamma_{[0,0][0,1][1,1]}} &: (q - 1)^3q^3 \\ \overline{\Gamma_{[0,0][0,1]}} &: (q - 1)^3(q + 1)q^3 \\ \overline{\Gamma_{[0,d][1,d+1]}} &: (q - 1)^3q^{2d+1} \end{aligned}$$

Indem wir mit Korollar 6.11 die Euler-Charakteristik berechnen (z.B. mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems) erhalten wir die gewünschte Formel. Da für Polynome immer gilt

$$(q^n - 1)|(q^m - 1) \iff n|m,$$

ist der Ausdruck ein Polynom in q . \square

Bemerkung: Für $d = 1$ ergibt sich $\text{Eu}(\mathbf{n}) = 1$, in Übereinstimmung mit unseren Überlegungen von Seite 65.

Im Satz 9.32 werden wir sehen, daß für eine beliebige Matrix M aus $\mathbf{G}(\mathbf{n})$ folgende Mächtigkeiten gleich sind:

$$\begin{aligned} |M^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \overline{\text{Fix}_{(0,0)(0,1)}}| &= |M^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \overline{\text{Fix}_{(0,0)(1,1)}}|, \\ |M^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \overline{\text{Fix}_{(0,d-1)}}| &= |M^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \overline{\text{Fix}_{(d-1,d-1)}}|, \\ |M^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \overline{\text{Fix}_{(0,d-1)(1,d)}}| &= |M^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \overline{\text{Fix}_{(d-1,d-1)(d-1,d)}}|. \end{aligned}$$

Es ergibt sich, daß folgende Charaktere gleich sind:

$$\begin{aligned}\chi_1\begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} &= \chi_1\begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,1 \end{pmatrix}, \\ \chi_1\begin{pmatrix} 0,d-1 \\ 1, d \end{pmatrix} &= \chi_1\begin{pmatrix} d-1,d-1 \\ d-1, d \end{pmatrix}, \\ \chi_0(0, d-1) &= \chi_0(d-1, d-1).\end{aligned}$$

Daher können wir die Summe aus Satz 6.10 noch weiter zusammenfassen.

Satz 6.13 *Es gilt*

$$\begin{aligned}&\chi_{(2,d-1)} - \chi_{(1,d-1)} + \chi_{(0,d-1)} \\ &= \chi_0(d-1, 2d-2) + 2\chi_0(0, d-1) + \chi_0(0, 0) \\ &\quad - 2\chi_1\begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} - 2\chi_1\begin{pmatrix} 0,d-1 \\ 1, d \end{pmatrix} \\ &\quad + \chi_2\begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \\ 1,1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Unser Hauptinteresse ist, die Charaktere auf den Homologiegruppen auszurechnen. Da für jedes $k \in \mathbb{N}$ der Simplizialkomplex $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$ zusammenhängend ist, ist die nullte Homologiegruppe ein eindimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum. Daher ist für alle M aus $G(\mathfrak{n})$

$$\chi_{(0,k)}^H(M) = 1,$$

und wir erhalten

$$\chi_{(2,k)}^H - \chi_{(1,k)}^H = \chi_{(2,k)} - \chi_{(1,k)} + \chi_{(0,k)} - 1.$$

Bemerkung: Falls wir zeigen könnten, daß die erste Homologie von $\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n})$ trivial ist, wüßten wir, daß $\chi_{(1,d-1)}^H$ die Nullabbildung ist. Dann könnten wir eine geschlossene Formel für $\chi_{(2,d-1)}^H$ angeben. Ich habe einige Zeit versucht, zu zeigen, daß \mathcal{B}_{d-1} einfach zusammenhängend ist. Leider ist es mir nicht gelungen, so daß ich dieses Problem offen lassen muß. Wir können lediglich folgenden Test angeben. Zu einem $k \in \mathbb{N}_0$ und einer Matrix M aus $G(\mathfrak{n})$ definieren wir

$$E_k(M) := \chi_{(2,k)}(M) - \chi_{(1,k)}(M) + \chi_{(0,k)}(M).$$

Da alle hier betrachteten Darstellungen Permutationsdarstellungen sind, müssen alle Charaktere Werte in \mathbb{N}_0 annehmen. Da $\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n})$ wegzusammenhängend ist, gilt, falls die erste Homologie von $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ verschwindet:

$$E_{d-1}(M) = \chi_{(2,d-1)}^H(M) + 1.$$

Insbesondere ist

$$Eu(\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n})) = E_{d-1}(1_{G(\mathfrak{n})}) \geq E_{d-1}(M) \geq 1.$$

Sollten wir also eine Matrix M finden, so daß $E_{d-1}(M)$ nicht in diesem Bereich liegt, so hätten wir gezeigt, daß die erste Homologie von $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$ nicht trivial ist.

In den folgenden Kapiteln werden wir die Formeln herleiten, um die Charaktere $\chi_i(w^+)$ nach Satz 6.6 im Fall des Simplizialkomplexes $\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n})$ für \mathfrak{n} prim auszuwerten. Dazu müssen wir die Konjugationsklassen von $G(\mathfrak{n})$ und die Mächtigkeit der Schnitte mit den nach Satz 6.10 relevanten Fixgruppen ermitteln.

Kapitel 7

Die Konjugationsklassen der $GL(3, \mathbb{F}_n)$

Im letzten Kapitel ist klar geworden, daß es interessant ist, die Konjugationsklassen der Gruppe $G(n)$ und insbesondere deren Mächtigkeit zu kennen. Hierzu werden wir in diesem Kapitel die Konjugationsklassen der $GL(3, \mathbb{F}_n)$ zu einem beliebigen endlichen Körper \mathbb{F}_n ermitteln. Im nächsten Kapitel werden wir dies benutzen, um die Konjugationsklassen der Gruppe $G(n)$ zu bestimmen. Folgende Bezeichnungen seien ab diesem Kapitel verbindlich:

- \mathbb{F}_n = endlicher Körper der Mächtigkeit n ,
- $GL(\mathbb{F}_n)$ = $GL(3, \mathbb{F}_n)$,
- I = Die $k \times k$ -Einheitsmatrix, wobei das k aus dem jeweiligen Zusammenhang klar ist,
- $Z_G(H)$ = der Zentralisator der Teilmenge H einer Gruppe G ,
- $\phi(M)$ = $\det(xI - M)$
das charakteristische Polynom der Matrix M
in der Variablen x ,
- $m(M)$ = das Minimalpolynom der Matrix M
in der Variablen x .

In den folgenden Kapiteln werden wir die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome vom Grad zwei und drei über einem endlichen Körper benötigen. Daher erinnere ich an den folgenden Satz:

Satz 7.1 Sei I_d die Anzahl der irreduziblen, normierten Polynome vom Grad d über einem endlichen Körper \mathbb{F}_n . Dann gilt

$$I_d = \frac{1}{d} \sum_{t|d} \mu(t) n^{\frac{d}{t}},$$

wobei die Möbiusfunktion μ definiert ist durch

$$\mu(t) = \begin{cases} (-1)^k & : \quad t = p_1 \cdot \dots \cdot p_k, \quad k \geq 0, \text{ alle } p_i \\ & \quad \text{paarweise unterschiedliche Primzahlen} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Beweis: [Mig91, S. 238]

□

Nach [Lan93, S. 557f] liegen zwei Matrizen M und N aus $GL(\mathbb{F}_n)$ genau dann in der gleichen Konjugationsklasse von $GL(\mathbb{F}_n)$, wenn sie über dem algebraischen Abschluß von \mathbb{F}_n die gleiche Jordansche Normalform besitzen. Für eine 3×3 -Matrix ist die Jordansche Normalform eindeutig durch das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom bestimmt.

Definition 7.2 Wir definieren folgende Mengen:

(i) $W_1(GL)$ sei eine fest gewählte maximale Teilmenge von

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_n^*, a \neq b \neq c \neq a \right\},$$

so daß keine zwei Matrizen aus $W_1(GL)$ das gleiche charakteristische Polynom besitzen.

(ii)

$$W_2(GL) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_n^*, a \neq b \right\},$$

(iii)

$$W_3(GL) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_n^*, a \neq b \right\},$$

(iv)

$$W_4(GL) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_n^* \right\},$$

(v)

$$W_5(GL) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_n^* \right\},$$

(vi)

$$W_6(GL) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_n^* \right\},$$

(vii)

$$W_7(GL) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_n^*, x^2 - \beta x - \alpha \in \mathbb{F}_n[x] \text{ prim} \right\},$$

(viii)

$$W_8(GL) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \mid x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \in \mathbb{F}_n[x] \text{ prim} \right\}.$$

Weiter definieren wir

Definition 7.3

$$W(GL) := \bigcup_{i=1}^8 W_i(GL).$$

Da die Konjugationsklassen durch das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom eindeutig bestimmt sind, folgt

Satz 7.4 Die Menge $W(GL)$ ist ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der $GL(\mathbb{F}_n)$.

Definition 7.5 Sei M aus $GL(\mathbb{F}_n)$. Dann hat M den Typ i , wenn M zu einer Matrix aus $W_i(GL)$ konjugiert ist.

Bemerkung: Aus Mangel an guten Bezeichnungen habe ich hier wieder den Begriff "Typ" verwendet. Dies sollte zu keinen Problemen mit der Definition 2.11 führen, da im weiteren "Typ" nur im gerade definierten Sinne benutzt werden wird. Um die Mächtigkeit von $W(GL)$ zu ermitteln, werden nun die Mächtigkeiten der $W_i(GL)$ berechnet.

Satz 7.6 Die Mächtigkeiten der Mengen $W_i(GL)$ betragen:

- (i) $|W_1(GL)| = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$,
- (ii) $|W_2(GL)| = (n-1)(n-2)$,
- (iii) $|W_3(GL)| = (n-1)(n-2)$,
- (iv) $|W_4(GL)| = (n-1)$,
- (v) $|W_5(GL)| = (n-1)$,
- (vi) $|W_6(GL)| = (n-1)$,
- (vii) $|W_7(GL)| = \frac{1}{2}n(n-1)^2$,
- (viii) $|W_8(GL)| = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$.

Beweis: (i) Da $W_1(GL)$ keine zwei Matrizen mit gleichem charakteristischem Polynom enthält, folgt

$$\begin{aligned} |W_1(GL)| &= \{ \{a, b, c\} \mid a \neq b \neq c \neq a, a, b, c \in \mathbb{F}_n^* \} \\ &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

(ii), (iii), (iv), (v), (vi) Klar.

(vii) Die Mächtigkeit von $W_7(GL)$ ist gleich der Anzahl der normierten, irreduziblen Polynome vom Grad 2 in $\mathbb{F}_n[x]$ multipliziert mit der Mächtigkeit von \mathbb{F}_n^* . Nach der Formel in Satz 7.1 gibt es $\frac{1}{2}n(n-1)$ der gesuchten Polynome. Da $|\mathbb{F}_n^*|$ gleich $(n-1)$ ist, folgt die Aussage.

(viii) Die Mächtigkeit von $W_8(GL)$ stimmt mit der Anzahl der normierten, irreduziblen Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{F}_n[x]$ überein. Damit folgt aus Satz 7.1

$$|W_8(GL)| = \frac{1}{3}(n^3 - n).$$

□

Korollar 7.7 Sei \mathbb{F}_n ein endlicher Körper der Mächtigkeit n . Dann besitzt die $GL(\mathbb{F}_n)$

$$(n-1)n(n+1)$$

inäquivalente, irreduzible Darstellungen.

Beweis: Nach [Lan93, Proposition 4.2., S.674] stimmt die Anzahl der inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe mit der Anzahl ihrer Konjugationsklassen überein. Da

$$|W(GL)| = \sum_{i=1}^8 |W_i(GL)|$$

ist, folgt die Aussage durch Berechnung der rechten Summe. \square

Wir werden nun zu jeder Matrix V aus W die Länge der Bahn unter $GL(\mathbb{F}_n)$ berechnen. Da die Gruppe $GL(\mathbb{F}_n)$ durch Konjugation auf sich selbst operiert, ist

$$\text{Fix}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) = \mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V),$$

und damit gilt für die Länge der Bahn

$$|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = \frac{|GL(\mathbb{F}_n)|}{|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)|}.$$

Wir werden nun zu jedem V aus $W(GL)$ den Zentralisator berechnen. Dazu benötigen wir den Begriff der nichtzerfallenden Cartan-Untergruppe. Wir führen ihn für ein beliebiges $r \in \mathbb{N}$ ein, obwohl wir ihn nur in den Fällen $r = 2$ und $r = 3$ verwenden werden.

Sei $L|\mathbb{F}_n$ die Körpererweiterung vom Grad r des endlichen Körpers \mathbb{F}_n . Dann ist L insbesondere ein \mathbb{F}_n -Vektorraum. Für jedes ξ aus L ist die Abbildung

$$\begin{aligned} m_\xi : L &\rightarrow L \\ \alpha &\mapsto \xi\alpha \end{aligned}$$

\mathbb{F}_n -linear, und

$$\begin{aligned} \eta : L &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_n}(L) \\ \xi &\mapsto m_\xi \end{aligned}$$

ist ein injektiver \mathbb{F}_n -Algebren-Homomorphismus. Durch Auswahl einer geordneten \mathbb{F}_n -Basis B von L erhält man so einen injektiven \mathbb{F}_n -Algebren-Homomorphismus

$$\eta_B : L \rightarrow \text{Mat}(r, \mathbb{F}_n).$$

Das Bild der multiplikativen Gruppe L^* unter einer solchen Einbettung heißt nichtzerfallende Cartan-Untergruppe von $GL(r, \mathbb{F}_n)$.

Lemma 7.8 Eine nichtzerfallende Cartan-Untergruppe ist ihr eigener Zentralisator.

Beweis: Da alle Cartan-Untergruppen konjugiert sind, genügt es, für eine spezielle Cartan-Untergruppen H von $GL(r, \mathbb{F}_n)$ zu zeigen, daß sie ihr eigener Zentralisator ist. Daher können wir o.B.d.A. ein ξ aus L mit

$$L = \langle 1, \xi, \dots, \xi^{r-1} \rangle_{\mathbb{F}_n}$$

fest wählen. Dieses ξ habe über \mathbb{F}_n das Minimalpolynom $x^r - \alpha_{r-1} x^{r-1} + \dots - \alpha_0$. Dann hat bzgl. der geordneten Basis $B = (1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{r-1})$ die Matrix $M := \eta_B(\xi)$ folgende Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} & & & \alpha_0 \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Für die Cartan-Untergruppe H zur obigen Basis ist dann $H \cup \{0\}$ eine \mathbb{F}_n -Unteralgebra von $\text{Mat}(r, \mathbb{F}_n)$, und

$$H \cup \{0\} = \langle 1, M, M^2, \dots, M^{r-1} \rangle_{\mathbb{F}_n}.$$

Daher gilt:

$$\mathbf{Z}_{\text{Gl}(r, \mathbb{F}_n)}(H) = \mathbf{Z}_{\text{Gl}(r, \mathbb{F}_n)}(M).$$

Da M aus H und H isomorph zu L^* ist, ist

$$\mathbf{Z}_{\text{Gl}(r, \mathbb{F}_n)}(M) \supset H.$$

Es bleibt noch die Umkehrung zu zeigen. Bezeichnen wir mit e_1 den Vektor $(1, 0, \dots, 0)^T$, so ist die Menge $\{M^i e_1 \mid 0 \leq i \leq r-1\}$ die Standardbasis von \mathbb{F}_n^r . Sei $N \in \mathbf{Z}_{\text{Gl}(r, \mathbb{F}_n)}(M)$, und $v \in L$ sei beliebig. Dann besitzt v eine Darstellung

$$v = \sum_{i=0}^{r-1} a_i M^i e_1,$$

wobei die a_i aus \mathbb{F}_q abhängig von v sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} N \cdot v &= N \cdot \left(\sum_{i=0}^{r-1} a_i M^i e_1 \right) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} N(a_i M^i e_1). \end{aligned}$$

Aus der \mathbb{F}_n -Linearität von N ergibt sich

$$N \cdot v = \sum_{i=0}^{r-1} a_i (N M^i e_1),$$

und da N im Zentralisator von M liegt, folgt

$$\begin{aligned} N \cdot v &= \sum_{i=0}^{r-1} (a_i M^i N e_1) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{r-1} a_i M^i \right) N e_1. \end{aligned}$$

Da $N e_1$ in \mathbb{F}_n^r liegt, gibt es eine Darstellung

$$N e_1 = \sum_{i=0}^{r-1} b_i M^i e_1,$$

wobei die b_i natürlich nicht von v abhängen. Also gilt

$$N \cdot v = \left(\sum_{i=0}^{r-1} a_i M^i \right) \left(\sum_{i=0}^{r-1} b_i M^i \right) e_1 .$$

Die beiden Summen kommutieren, und es ergibt sich

$$N \cdot v = \left(\sum_{i=0}^{r-1} b_i M^i \right) \left(\sum_{i=0}^{r-1} a_i M^i \right) e_1 = \left(\sum_{i=0}^{r-1} b_i M^i \right) v .$$

Da die b_i unabhängig von v sind, folgt

$$N = \left(\sum_{i=0}^{r-1} b_i M^i \right) \in H .$$

Da N beliebig aus $Z_{GL(r, \mathbb{F}_n)}(H)$ gewählt war, folgt

$$Z_{GL(r, H)} \subset H ,$$

und mit der Überlegung von oben gilt die Gleichheit. □

Nun können wir alle Zentralisatoren angeben.

Satz 7.9 *Zu einer Matrix V aus $W(GL)$ gilt:*

(i) *Ist $V \in W_1(GL)$, so folgt $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}_n) \right\}$.*

(ii) *Ist $V \in W_2(GL)$, so folgt $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}_n) \right\}$.*

(iii) *Ist $V \in W_3(GL)$, so folgt $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}_n) \right\}$.*

(iv) *Ist $V \in W_4(GL)$, so folgt $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) = GL(\mathbb{F}_n)$*

(v) *Ist $V \in W_5(GL)$, so folgt $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}_n) \right\}$.*

(vi) *Ist $V \in W_6(GL)$, so folgt $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}_n) \right\}$.*

(vii) *Ist $V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in W_7(GL)$, so folgt*

$$\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}_n) \mid A \in \mathbf{Z}_{GL(2, \mathbb{F}_n)} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \right\} .$$

(viii) *Ist $V \in W_8(GL)$, so folgt $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V) =$ \mathbb{V} *enthaltende, nichtzerfallende Cartan – Untergruppe**

Beweis: Die Aussagen (i) bis (vi) erhalten wir, indem wir mit beliebigen Matrizen $V \in W_i(GL)$, $i = 1, \dots, 6$ und $M = (m_{jk})_{1 \leq j, k \leq 3} \in GL(\mathcal{K})$ die Gleichung

$$V \cdot M = M \cdot V$$

allgemein ansetzen und die Einträge der Produkte vergleichen.
zu (vii): Sei

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim}$$

Mit einer beliebigen Matrix $M = (m_{jk})_{1 \leq j, k \leq 3} \in GL(\mathcal{K})$ erhalten wir einerseits

$$M \cdot V = \begin{pmatrix} m_{12} & m_{11}\alpha + m_{12}\beta & m_{13}c \\ m_{22} & m_{21}\alpha + m_{22}\beta & m_{23}c \\ m_{32} & m_{31}\alpha + m_{32}\beta & m_{33}c \end{pmatrix}$$

und andererseits

$$V \cdot M = \begin{pmatrix} m_{21}\alpha & m_{22}\alpha & m_{23}\alpha \\ m_{11} + m_{21}\beta & m_{12} + m_{22}\beta & m_{13} + m_{23}\beta \\ m_{31}c & m_{32}c & m_{33}c \end{pmatrix}.$$

Indem wir die Einträge vergleichen erhalten wir unter anderem folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_{23}c &= m_{13} + m_{23}\beta \\ m_{13}c &= m_{23}\alpha \\ m_{32} &= m_{31}c \\ m_{31}\alpha + m_{32}\beta &= m_{32}c. \end{aligned}$$

Nun lösen wir die erste Gleichung nach m_{13} auf und setzen sie in die zweite Gleichung ein. Ebenso setzen wir die dritte Gleichung in die vierte ein und erhalten

$$\begin{aligned} m_{13} &= m_{23}c - m_{23}\beta \\ c(m_{23}c - m_{23}\beta) &= m_{23}\alpha \\ m_{32} &= m_{31}c \\ m_{31}\alpha + m_{31}c\beta &= m_{31}c^2. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} m_{13} &= m_{23}c - m_{23}\beta \\ (c^2 - \beta c - \alpha)m_{23} &= 0 \\ m_{32} &= m_{31}c \\ (c^2 - \beta c - \alpha)m_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Da $x^2 - \beta x - \alpha \in \mathbb{F}_n[x]$ prim und c aus \mathbb{F}_n ist, folgt, daß m_{31} und m_{23} gleich Null sind. Dann ergibt sich, daß auch m_{13} und m_{32} mit Null übereinstimmen. Also hat $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)$ eine Blockstruktur

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

und es folgt die Aussage.

zu (viii): Sei V aus $W_8(GL)$. Dann ist $\phi(V) = m(V) \in \mathbb{F}_n[x]$ prim vom Grad drei.

Daher sind $1, V, V^2$ linear unabhängig über \mathbb{F}_n und liegen in einer nichtzerfallenden Cartan-Untergruppe C . Der Zentralisator von V stimmt mit dem Zentralisator von C überein und nach 7.8 gilt $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(C) = C$. Damit ist die Aussage gezeigt. \square

Nun können wir auch die Mächtigkeiten der Zentralisatoren angeben.

Satz 7.10 *Sei V eine Matrix aus $W(GL)$. Dann gilt*

- (i) Für $V \in W_1(GL)$ ist $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = (n-1)^3$,
- (ii) Für $V \in W_2(GL)$ ist $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = (n-1)^3 n(n+1)$,
- (iii) Für $V \in W_3(GL)$ ist $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = (n-1)^2 n$,
- (iv) Für $V \in W_4(GL)$ ist $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = (n-1)^3 n^3 (n+1)(n^2+n+1)$,
- (v) Für $V \in W_5(GL)$ ist $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = (n-1)^2 n^3$,
- (vi) Für $V \in W_6(GL)$ ist $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = (n-1)n^2$,
- (vii) Für $V \in W_7(GL)$ ist $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = (n-1)^2(n+1)$,
- (viii) Für $V \in W_8(GL)$ ist $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = (n-1)(n^2+n+1)$.

Beweis: Für $V \in W_i(GL)$ mit $i \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$ liest man die Aussage direkt an den Zentralisatoren ab.

Sei $V \in W_2(GL)$. Dann ist $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)$ isomorph zu $GL(2, \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n^*$. Daher ist die Mächtigkeit von $W_2(GL)$ gleich $(n^2-1)(n^2-n)(n-1)$ bzw. $(n-1)^3 n(n+1)$.

Mit $V \in W_7(GL)$ ist der Zentralisator von V isomorph zu

$$\mathbf{Z}_{GL(2, \mathbb{F}_n)}\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\right) \times \mathbb{F}_n^* .$$

Da das Minimalpolynom $x^2 - \beta x - \alpha$ irreduzibel vom Grad zwei ist, ist

$$\mathbf{Z}_{GL(2, \mathbb{F}_n)}\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\right)$$

eine nichtzerfallende Cartan-Untergruppe von $GL(2, \mathbb{F}_n)$ zur quadratischen Körpererweiterung von \mathbb{F}_n . Es ergibt sich, daß $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)|$ gleich $(n^2-1)(n-1)$ gleich $(n-1)^2(n+1)$ ist.

Für ein $V \in W_8(GL)$ folgt mit den gleichen Argumenten wie oben, daß $\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)$ eine nichtzerfallende Cartan-Untergruppe der $GL(\mathbb{F}_n)$ zur kubischen Erweiterung von \mathbb{F}_n ist. Daraus erhalten wir, daß $|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)| = n^3 - 1$ gleich $(n-1)(n^2+n+1)$ ist. \square

Da

$$|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = \frac{|GL(\mathbb{F}_n)|}{|\mathbf{Z}_{GL(\mathbb{F}_n)}(V)|}$$

gilt, sind wir nun in der Lage, die Längen der Konjugationsklassen anzugeben.

Satz 7.11 *Sei V eine Matrix aus $W(GL)$. Dann gilt für die Länge der Konjugationsklasse:*

- (i) Ist $V \in W_1(GL)$, so folgt $|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = n^3(n+1)(n^2+n+1)$.
- (ii) Ist $V \in W_2(GL)$, so folgt $|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = n^2(n^2+n+1)$.
- (iii) Ist $V \in W_3(GL)$, so folgt $|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = (n-1)n^2(n+1)(n^2+n+1)$.
- (iv) Ist $V \in W_4(GL)$, so folgt $|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = 1$.

- (v) Ist $V \in W_5(GL)$, so folgt $|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = (n-1)(n+1)(n^2+n+1)$.
- (vi) Ist $V \in W_6(GL)$, so folgt $|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = (n-1)^2 n(n+1)(n^2+n+1)$.
- (vii) Ist $V \in W_7(GL)$, so folgt $|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = (n-1)n^3(n^2+n+1)$.
- (viii) Ist $V \in W_8(GL)$, so folgt $|V^{GL(\mathbb{F}_n)}| = (n-1)^2 n^3(n+1)$.

Zur Probe rechnet man "leicht" nach, daß mit Vertretern V_i aus $W_i(GL)$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^8 |W_i(GL)| |V_i^{GL(\mathbb{F}_n)}| = |GL(\mathbb{F}_n)|$$

gilt.

Die Ergebnisse diese Kapitels werden in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Typ	Vertreter	Anzahl der Vertreter	Zentralisator	Mächtigkeit des Zentralisators	Elemente je Klasse
1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c \neq a$	$\frac{1}{6}(n-1) \cdot (n-2)(n-3)$	$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$	$(n-1)^3$	$\frac{n^3(n+1)}{(n^2+n+1)}$
2	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b$	$(n-1)(n-2)$	$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$	$(n-1)^3 n(n+1)$	$n^2(n^2+n+1)$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b$	$(n-1)(n-2)$	$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ 0 & m_{11} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix}$	$(n-1)^2 n$	$\frac{(n-1)n^2(n+1)}{(n^2+n+1)}$
4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$(n-1)$	$GL(3, \mathbb{F}_n)$	$\frac{(n-1)^3 n^3(n+1)}{(n^2+n+1)}$	1
5	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$(n-1)$	$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{11} & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$	$(n-1)^2 n^3$	$\frac{(n-1)(n+1)}{(n^2+n+1)}$
6	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$(n-1)$	$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{11} \end{pmatrix}$	$(n-1)n^2$	$\frac{(n-1)^2 n(n+1)}{(n^2+n+1)}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $x^2 - \beta x - \alpha$ $\text{prim}, c \in \mathbb{F}_n^*$	$\frac{1}{2}n(n-1)^2$	$\mathbf{Z}_{GL(2, \mathbb{F}_n)} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \times \mathbb{F}_n^*$	$(n-1)^2(n+1)$	$\frac{(n-1)n^3}{(n^2+n+1)}$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ $x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha$ prim	$\frac{1}{3}(n-1) \cdot n(n+1)$	<i>nichtzerfallende Cartan-Gruppe</i>	$\frac{(n-1)}{(n^2+n+1)}$	$(n-1)^2 n^3(n+1)$

Kapitel 8

Die Konjugationsklassen der Gruppe $G(\mathfrak{n})$

In diesem Kapitel bezeichnet \mathfrak{n} ein *irreduzibles* Polynom vom Grad d aus $\mathbb{F}_q[T]$. Zum Körper $L := \mathbb{F}_q[T]/(\mathfrak{n})$ werden aus den Konjugationsklassen der $GL(L)$ ($= GL(3, L)$) die Konjugationsklassen von $G(\mathfrak{n}) = \{M \in GL(L) \mid \det(M) \in \mathbb{F}_q^*\}$ ermittelt.

Vorab benötigen wir noch einige Lemmata.

Lemma 8.1 *Seien $q, d \in \mathbb{N}$, $q > 1$. Dann gilt*

$$\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3} \iff \begin{cases} (q \equiv 1 \pmod{3} \wedge d \equiv 0 \pmod{3}) \\ \vee (q \equiv 2 \pmod{3} \wedge d \equiv 0 \pmod{2}) \end{cases}.$$

Beweis: Aus der Gleichheit

$$\frac{q^d - 1}{q - 1} = \sum_{i=0}^{d-1} q^i$$

folgt direkt die Aussage. □

Lemma 8.2 *Sei $L = \mathbb{F}_{q^d}$ ein endlicher Körper. Dann gilt:*

$$|\{a \in L^* \mid a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| = \begin{cases} q - 1 & : \frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 3(q - 1) & : \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}.$$

Beweis: Da L^* zyklisch ist, existiert ein Isomorphismus von L^* nach $\mathbb{Z}/(q^d - 1)\mathbb{Z}$, und folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q^* & \hookrightarrow & L^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\frac{q^d - 1}{q - 1}\right)\mathbb{Z} / (q^d - 1)\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} / (q^d - 1)\mathbb{Z} \end{array}.$$

Also gilt

$$|\{a \in L^* \mid a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| = \left| \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n < q^d - 1, 3n \equiv 0 \pmod{\frac{q^d - 1}{q - 1}} \right\} \right|.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

- (i) Sei $\frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3}$.
Dann folgt

$$\begin{aligned} |\{a \in L^* \mid a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| &= \left| \left\{ 0 \leq n < q^d - 1 \mid n \equiv 0 \pmod{\frac{q^d - 1}{q - 1}} \right\} \right| \\ &= (q - 1) \end{aligned}$$

- (ii) Sei $\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$, d.h. es existiert ein $i > 0$ und ein $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ mit $\frac{q^d - 1}{q - 1} = 3^i k$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} |\{a \in L^* \mid a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| &= |\{0 \leq n < q^d - 1 \mid 3n \equiv 0 \pmod{3^i k}\}| \\ &= \left| \left\{ 0 \leq n < q^d - 1 \mid n \equiv 0 \pmod{\frac{1}{3} \cdot \frac{q^d - 1}{q - 1}} \right\} \right| \\ &= 3(q - 1) \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. \square

Mit Hilfe der obigen Lemmata werden folgende beiden Sätze gezeigt, auf die im folgenden häufig verwiesen wird.

Satz 8.3 Sei $L = \mathbb{F}_{q^d}$ ein endlicher Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$.
- (ii) $\mathbb{F}_q^* \cdot (L^*)^3 = (L^*)^3$ und $[L^* : (L^*)^3] = 3$.
- (iii) $|\{a \in L^* \mid a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| = 3(q - 1)$.
- (iv) $\begin{cases} (q \equiv 1 \pmod{3} \wedge d \equiv 0 \pmod{3}) \\ \vee (q \equiv 2 \pmod{3} \wedge d \equiv 0 \pmod{2}) \end{cases}$.

Beweis: Die Äquivalenz der Aussagen (i) und (iv) folgt aus 8.1, und die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt aus 8.2. Es genügt also, die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen.

(i) \Rightarrow (ii): Aus $\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ folgt insbesondere $q^d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Dann enthält der Kern der Abbildung $x \mapsto x^3$ in L^* drei Elemente, und somit ist $[L^* : (L^*)^3] = 3$. Sei weiter $L^* = \langle \varepsilon \rangle$. Dann gilt

$$\alpha \in \mathbb{F}_q \iff \alpha = \varepsilon^i \text{ mit } i \equiv 0 \pmod{\frac{q^d - 1}{q - 1}}.$$

Aus $\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ ergibt sich, daß für $a = \varepsilon^i$ die Wurzel $\sqrt[3]{a} = \varepsilon^{\frac{i}{3}}$ in L^* liegt. Also ist \mathbb{F}_q^* eine Teilmenge von $(L^*)^3$ und somit ist $\mathbb{F}_q^* \cdot (L^*)^3 = (L^*)^3$.

(ii) \Rightarrow (i): Der Beweis wird durch Widerspruch geführt. Sei

$$\mathbb{F}_q^* \cdot (L^*)^3 = (L^*)^3 \text{ und } [L^* : (L^*)^3] = 3.$$

Weiter sei

$$\frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Dann liegt $\varepsilon^{\frac{q^d-1}{q-1}}$ in \mathbb{F}_q^* und ist keine dritte Potenz in L^* . Da der Index von $(L^*)^3$ in L^* prim ist, gibt es keine nichttrivialen Zwischengruppen, und es ist $\mathbb{F}_q^* \cdot (L^*)^3 = L^*$. Aus $L^* \neq (L^*)^3$ folgt der Widerspruch zur Annahme. Also muß immer $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ gelten. \square

Analog gilt

Satz 8.4 Sei $L = \mathbb{F}_{q^d}$ ein endlicher Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$.

(ii) $\mathbb{F}_q \not\subset (L^*)^3$ oder $(L^*)^3 = L^*$.

(iii) Es existiert ein $a \in \mathbb{F}_q$ mit $L^* = (L^*)^3 \cup a(L^*)^3 \cup a^2(L^*)^3$.

(iv) $\mathbb{F}_q \cdot (L^*)^3 = L^*$.

(v) $|\{a \in L^* \mid a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| = (q-1)$.

$$(vi) \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{3} \\ \vee (q \equiv 1 \pmod{3} \wedge d \equiv 0 \pmod{3}) \\ \vee (q \equiv 2 \pmod{3} \wedge d \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases} .$$

Beweis :

- (i) \iff (vi): Dies ist die Negation von 8.1.
- (i) \iff (v): Dies folgt aus 8.2.

Die Äquivalenz der Aussagen (i), (ii), (iii), (iv) wird durch einen Ringschluß gezeigt.

- (i) \implies (ii): Sei $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$. Dann unterscheiden wir zwei Fälle:
 1.Fall: $q^d - 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$. Dann ist $L^* = (L^*)^3$ und es folgt die Aussage.
 2.Fall: $q^d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, d.h. $[L^* : (L^*)^3] = 3$. Sei $L^* = \langle \varepsilon \rangle$ und $n := \frac{q^d-1}{q-1}$. Dann liegt ε^n in \mathbb{F}_q . Da $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ und $q^d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, hat die Gleichung $3m \equiv n \pmod{q^d - 1}$ keine Lösung. Daraus ergibt sich, daß ε^n keine dritte Potenz in L^* ist. Damit ist $\mathbb{F}_q \not\subset (L^*)^3$.
- (ii) \implies (iii): Für $(L^*)^3 = L^*$ ist die Aussage trivial. Sei also $[L^* : (L^*)^3] = 3$. Dann ist insbesondere $L^*/(L^*)^3$ zyklisch von Primzahlordnung. Nach Voraussetzung existiert ein Element a aus $\mathbb{F}_q - (L^*)^3$. Die Nebenklasse dieses Elements muß also $L^*/(L^*)^3$ erzeugen.
- (iii) \implies (vi): Wieder ist die Aussage trivial, falls $(L^*)^3 = L^*$ gilt. Sonst existiert ein a aus $\mathbb{F}_q - (L^*)^3$. Da es zwischen L^* und $(L^*)^3$ keine weiteren Untergruppen gibt, folgt

$$L^* \supset \mathbb{F}_q \cdot (L^*)^3 \supset \langle a, (L^*)^3 \rangle = L^*.$$

Also ist $\mathbb{F}_q \cdot (L^*)^3$ gleich L^* .

- (iv) \Rightarrow (i): Sei $\mathbb{F}_q \cdot (L^*)^3 = L^*$ und $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$. Dann ist \mathbb{F}_q^* eine Teilmenge von $(L^*)^3$, und daher ist $(L^*)^3 = L^*$. Dies bedeutet, daß $q^d - 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$ im Widerspruch zu $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$. Also folgt die Aussage.

Damit ist der Ringschluß beendet und der Satz bewiesen. \square

Wir benötigen noch eine Hilfsaussage, bevor wir zur Berechnung der Länge der Konjugationsklassen kommen.

Lemma 8.5 *Seien M, N zwei Matrizen aus $G(\mathfrak{n})$, die in $GL(L)$ konjugiert sind. Dann gilt*

$$|\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(M)| = |\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(N)| .$$

Beweis: Sei $T \in GL(L)$ mit $T^{-1} N T = M$. Dann ist

$$\mathbf{Z}_{GL(L)}(M) = T^{-1} \mathbf{Z}_{GL(L)}(N) T .$$

Da die Konjugation die Determinante nicht verändert, gilt

$$\begin{aligned} |\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(M)| &= |\mathbf{Z}_{GL(L)}(M) \cap G(\mathfrak{n})| \\ &= |T^{-1} \mathbf{Z}_{GL(L)}(N) T \cap G(\mathfrak{n})| \\ &= |\mathbf{Z}_{GL(L)}(N) \cap G(\mathfrak{n})| \\ &= |\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(N)| . \end{aligned}$$

\square

Korollar 8.6 *Seien M, N aus $G(\mathfrak{n})$ vom gleichen Konjugationstyp, dann ist*

$$|M^{G(\mathfrak{n})}| = |N^{G(\mathfrak{n})}| .$$

Beweis: Seien V_1 und V_2 die Vertreter von $M^{GL(L)}$ bzw. $N^{GL(L)}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(M)| &= |\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(V_1)| \\ &= |\mathbf{Z}_{GL(L)}(V_1) \cap G(\mathfrak{n})| \\ &= |\mathbf{Z}_{GL(L)}(V_2) \cap G(\mathfrak{n})| \\ &= |\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(V_2)| \\ &= |\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(N)| . \end{aligned}$$

Daher ist

$$|M^{G(\mathfrak{n})}| = \frac{|G(\mathfrak{n})|}{|\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(M)|} = \frac{|G(\mathfrak{n})|}{|\mathbf{Z}_{G(\mathfrak{n})}(N)|} = |N^{G(\mathfrak{n})}| .$$

\square

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun die Länge der Konjugationsklassen unter $G(\mathfrak{n})$ und die Anzahl der Vertreter je Typ ermitteln.

Sei $W_i(G(\mathfrak{n}))$ für $i = 1, \dots, 8$ ein Vertretersystem der Konjugationsklassen in $G(\mathfrak{n})$ und

$$W(G(\mathfrak{n})) := \bigcup_{i=1}^8 (W_i(G(\mathfrak{n}))) .$$

Zwei Matrizen, die in $GL(L)$ nicht konjugiert sind, sind auch nicht in $G(\mathfrak{n})$ konjugiert. Daher dürfen wir $W_i(G(\mathfrak{n}))$ so wählen, daß $W_i(GL) \cap G(\mathfrak{n})$ eine Teilmenge von $W_i(G(\mathfrak{n}))$ ist. Wir werden nun untersuchen, in welchen Fällen $W_i(GL) \cap G(\mathfrak{n})$ eine echte Teilmenge von $W_i(G(\mathfrak{n}))$ ist, und welche Matrizen in diesen Fällen noch hinzukommen. Folgendes ist hierzu von großer Bedeutung. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\widetilde{\det} : GL(L) &\rightarrow L^*/\mathbb{F}_q^* \\ M &\mapsto \det(M) \cdot \mathbb{F}_q^*\end{aligned}$$

ist ein Homomorphismus endlicher Gruppen. Für ein V aus $W_i(GL)$ gilt

$$\ker(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)}) = \mathbf{Z}_{G(n)}(V)$$

und damit

$$|\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)| = |\mathbf{Z}_{G(n)}(V)| \cdot |\operatorname{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)})|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}|V^{GL(L)}| &= \frac{|GL(L)|}{|\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)|} \\ &= \frac{|G(n)| \cdot |L^*|}{|\mathbb{F}_q^*|} \cdot \frac{1}{|\mathbf{Z}_{G(n)}(V)| \cdot |\operatorname{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)})|} \\ &= \frac{|L^*|}{|\mathbb{F}_q^*|} \cdot \frac{1}{|\operatorname{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)})|} \cdot \frac{|G(n)|}{|\mathbf{Z}_{G(n)}(V)|} \\ &= \frac{|L^*|}{|\mathbb{F}_q^*| \cdot |\operatorname{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)})|} \cdot |V^{G(n)}|\end{aligned}$$

Da Konjugation die Determinante nicht verändert, gilt für alle V aus $GL(L)$

$$V^{GL(L)} \cap G(n) = \begin{cases} V^{GL(L)} & : V \in G(n) \\ \emptyset & : V \notin G(n) \end{cases}.$$

Einerseits folgt aus

$$\{M \in G(n) \mid \operatorname{Typ}(M) = i\} = \dot{\bigcup}_{V \in W_i(GL) \cap G(n)} V^{GL(L)}$$

für die Mächtigkeiten

$$|\{M \in G(n) \mid \operatorname{Typ}(M) = i\}| = |W_i(GL) \cap G(n)| \cdot |V^{GL(L)}|.$$

Andererseits gilt

$$\{M \in G(n) \mid \operatorname{Typ}(M) = i\} = \dot{\bigcup}_{V \in W_i(G(n))} V^{G(n)},$$

und daher ergibt sich mit Korollar 8.6

$$|\{M \in G(n) \mid \operatorname{Typ}(M) = i\}| = |W_i(G(n))| \cdot |V^{G(n)}|.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt, daß

$$|W_i(GL) \cap G(n)| \cdot |V^{GL(L)}| = |W_i(G(n))| \cdot |V^{G(n)}|$$

ist. Daraus erhalten wir

$$|W_i(G(n))| = \frac{|L^*|}{|\mathbb{F}_q^*| \cdot |\operatorname{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)})|} \cdot |W_i(GL) \cap G(n)|.$$

Indem wir für die V aus $W_i(GL)$ die Zentralisatoren $\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)$ betrachten, erhalten wir folgenden Satz:

Satz 8.7 Sei $V \in W_i(GL)$, $i \neq 6$ oder $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$. Dann gilt:

$$|V^{GL(L)}| = |V^{G(n)}| \text{ und } |W_i(G(n))| = |W_i(GL) \cap G(n)|.$$

Beweis: Wir werden zeigen, daß in den im Satz zugelassenen Fällen die Einschränkung von $\widetilde{\det}$ auf $\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)$ surjektiv ist. Wir unterscheiden drei Fälle.

- Sei $V \in W_i(GL)$, $i \neq 6, 8$. Dann sehen wir direkt anhand der im vorigen Kapitel berechneten Zentralisatoren, daß die Abbildung

$$\widetilde{\det} : \mathbf{Z}_{GL(L)}(V) \rightarrow L^* / \mathbb{F}_q^*$$

surjektiv ist. Es ist also

$$|\text{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)})| = \frac{|L^*|}{|\mathbb{F}_q^*|},$$

und die Aussage folgt aus den oben angegebenen Formeln.

- Im Fall $i = 8$ sieht man nicht direkt, daß

$$\widetilde{\det} : \mathbf{Z}_{GL(L)}(V) \rightarrow L^* / \mathbb{F}_q^*$$

surjektiv ist. Sei also

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \in GL(L)$$

mit

$$\phi(V) = x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \in L[x] \text{ prim.}$$

Aus dem vorigen Kapitel ist bekannt, daß $\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)$ eine nichtzerfallende Cartan-Untergruppe ist, d.h. $\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)$ ist das Bild einer Einbettung

$$i : L[x]/(p(x)) \rightarrow GL(L).$$

Da $M = L[x]/(p(x))$ eine endliche Körpererweiterung von L ist, gilt für alle Matrizen $A \in \mathbf{Z}_{GL(L)}(V)$, daß

$$\det(A) = \text{Norm}_L^M(i^{-1}(A))$$

ist. Da die Normabbildung

$$\text{Norm}_L^M : M^* \rightarrow L^*$$

für endliche Erweiterungen von endlichen Körpern surjektiv ist, gilt dies auch für

$$\widetilde{\det} : \mathbf{Z}_{GL(L)}(V) \rightarrow L^* / \mathbb{F}_q^*.$$

Damit folgt die Aussage für $W_8(GL)$.

- Sei nun $i = 6$ und $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$. Es ist

$$\mathbf{Z}_{GL(L)}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in L^*, b, c \in L \right\}.$$

Daher ist

$$\text{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)}) = \{a^3 \mathbb{F}_q^* \mid a \in L^*\} = (L^*)^3 \mathbb{F}_q^* / \mathbb{F}_q^*.$$

Nach 8.4 stimmt $(L^*)^3 \mathbb{F}_q^* / \mathbb{F}_q^*$ mit L^* / \mathbb{F}_q^* überein. Daher ist auch in diesem Fall $\text{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)})$ surjektiv, und es folgt die Aussage. \square

Der Satz 8.7 besagt, daß die Klassenzugehörigkeit einer Matrix M mit $\text{Typ}(M) \neq 6$ oder $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ durch ihre Jordansche Normalform in $GL(L)$ festgelegt ist. Entsprechend zeigen wir:

Satz 8.8 Sei $V \in W_6(GL)$ und $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$. Dann gilt:

$$|V^{GL(L)}| = 3 \cdot |V^{G(\mathfrak{n})}| \text{ und } |W_i(G(\mathfrak{n}))| = 3 \cdot |W_i(GL) \cap G(\mathfrak{n})|$$

Beweis: Wir betrachten wieder die Abbildung

$$\widetilde{\det} : \mathbf{Z}_{GL(L)}(V) \rightarrow L^* / \mathbb{F}_q^*.$$

Dann ist

$$\text{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)}) = (L^*)^3 \mathbb{F}_q^* / \mathbb{F}_q^*.$$

Nach 8.3 ist $(L^*)^3 \mathbb{F}_q^* = (L^*)^3$ und $[L^* : (L^*)^3] = 3$. Also ist

$$\frac{|L^*|}{|\mathbb{F}_q^*| \cdot |\text{Im}(\widetilde{\det}|_{\mathbf{Z}_{GL(L)}(V)})|} = \frac{|L^*| |\mathbb{F}_q^*|}{|\mathbb{F}_q^*| |(L^*)^3|} = 3.$$

Mit den obigen Formeln folgt die Aussage. \square

Also ist im Fall $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ die Klassenzugehörigkeit einer Matrix M aus $G(\mathfrak{n})$ vom Typ sechs durch ihre Jordansche Normalform nicht eindeutig bestimmt. Nach Satz 8.7 können wir für $i \neq 6$ oder $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ die Menge $W_i(G(\mathfrak{n}))$ ermitteln, indem wir alle M aus $W_i(GL)$ bestimmen, die in $G(\mathfrak{n})$ liegen. Nach Satz 8.8 gilt dies für $i = 6$ und $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ nicht. In diesem Fall gibt es Matrizen in $G(\mathfrak{n})$, die zwar in $GL(L)$ nicht aber in $G(\mathfrak{n})$ konjugiert sind.

Daher werden wir nun $W_6(G(\mathfrak{n}))$ im Fall $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ ermitteln. Wir benötigen folgende Hilfsaussage, die uns ein Kriterium liefert, wann zwei unter $GL(L)$ konjugierte Matrizen vom Typ sechs auch in G konjugiert sind.

Satz 8.9 Sei $\tau \in L^*$, $M \in G(\mathfrak{n})$ beliebig. Weiter sei

$$V := \begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in G(\mathfrak{n}).$$

Dann sind äquivalent:

- (i) $M \in V^{G(\mathfrak{n})}$
- (ii) Es existiert ein $T \in GL(L)$ mit

$$T^{-1} M T = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

und $\det(T) \tau^2 \in \mathbb{F}_q^* (L^*)^3$.

(iii) Für alle $T \in GL(L)$ mit

$$T^{-1} M T = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

gilt: $\det(T) \tau^2 \in \mathbb{F}_q^* (L^*)^3$.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch einen Ringschluß.

- (i) \Rightarrow (ii): Wir berechnen die Jordansche Normalform von V über L und erhalten

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

Weiter sei g aus $G(\mathfrak{n})$ mit $g^{-1} M g = V$. Indem wir die beiden Gleichungen zusammensetzen erhalten wir

$$\text{diag}(1, \tau, \tau) g^{-1} M g \text{diag}(1, \tau^{-1}, \tau^{-1}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $T := g \cdot \text{diag}(1, \tau^{-1}, \tau^{-1})$ und erhalten $\det(T) \tau^2 = \det(g) \in \mathbb{F}_q^* \subset \mathbb{F}_q^* (L^*)^3$.

- (ii) \Rightarrow (iii): Sei T wie in (ii) und $S \in GL(L)$ mit

$$S^{-1} M S = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

beliebig. Dann ist

$$S \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} S^{-1} = T \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Also gilt

$$T^{-1} S \in \mathbf{Z}_{GL(L)} \left(\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{11} \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} m_{11} \in L^*, \\ m_{12}, m_{13} \in L \end{array} \right\}.$$

Daher existiert ein $\alpha \in L^*$ mit $\det(S) = \det(T) \cdot \alpha^3$, und es gilt

$$\det(S) \tau^2 = \det(T) \tau^2 \alpha^3 \in \mathbb{F}_q^* (L^*)^3.$$

- (iii) \Rightarrow (i): Sei T wie in (iii). Dann ist $\det(T) = \tau^{-2} b \alpha^3$ mit $\alpha \in L^*$ und $b \in \mathbb{F}_q^*$. Wir wählen dann g als

$$g := T \cdot \text{diag}(1, \tau, \tau) \cdot \text{diag}(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}, \alpha^{-1})$$

Dann ist $g^{-1} M g = V$ und $\det(g) = b \in \mathbb{F}_q^*$. Also liegt M in $V^{G(\mathfrak{n})}$.

□

Korollar 8.10 Sei $a \in L^*$, $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$, $L^* = \langle \varepsilon \rangle$, $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{GL(L)} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(n)} \dot{\cup} \begin{pmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(n)} \dot{\cup} \begin{pmatrix} a & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(n)}$$

Beweis: Aus $q^d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ folgt, daß $[L^* : (L^*)^3] = 3$ ist. Daher ist L^* die disjunkte Vereinigung

$$L^* = (L^*)^3 \dot{\cup} \varepsilon(L^*)^3 \dot{\cup} \varepsilon^{-1}(L^*)^3.$$

Nach Satz 8.3 ist $\mathbb{F}_q^* (L^*)^3 = (L^*)^3$. Da

$$\text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon) \begin{pmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{diag}(1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\text{diag}(1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}) \begin{pmatrix} a & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

gilt, folgt aus Satz 8.9, daß die drei Konjugationsklassen disjunkt sind. Da $\{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ ein Repräsentantensystem von $L^*/(L^*)^3$ bildet, ist wieder nach Satz 8.9 jedes

$$M \in \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{GL(L)}$$

zu einer der drei rechten Matrizen konjugiert. Damit ist die Aussage gezeigt. \square

Folgendes Korollar ergibt sich direkt.

Korollar 8.11 Sei $L^* = \langle \varepsilon \rangle$ und $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$. Dann gilt:

$$W_6(G(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in L^*, a^3 \in \mathbb{F}_q^*, \tau \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\} \right\}$$

Bemerkung: Wie man sieht, ist $|W_6(G(n))| = 3|\{W_6(GL) \cap G\}|$.

Nun sind wir in der Lage, die Mächtigkeiten der $W_i(G(n))$ auszurechnen. Aus beweistechnischen Gründen beginnen wir nicht mit $W_1(G(n))$.

Satz 8.12 Es gilt:

$$|W_6(G(n))| = \begin{cases} (q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 9(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Beweis: Aus den Sätzen 8.7 und 8.8 ergibt sich, daß

$$|W_6(G(n))| = \begin{cases} |W_6(GL) \cap G(n)| & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 3|W_6(GL) \cap G(n)| & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

ist. Aus Lemma 8.2 folgt

$$\begin{aligned} |W_6(GL) \cap G(\mathfrak{n})| &= \left| \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in GL(L) \mid a^3 \in \mathbb{F}_q^* \right\} \right| \\ &= \begin{cases} (q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 3(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Indem wir beides zusammensetzen erhalten wir die Aussage. \square

Satz 8.13 Sei $i \in \{4, 5\}$. Dann gilt

$$|W_i(G(\mathfrak{n}))| = \begin{cases} (q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 3(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}.$$

Beweis: Es gilt $|W_i(G(\mathfrak{n}))| = |W_i(GL) \cap G(\mathfrak{n})|$. Betrachtet man die entsprechenden Vertreter, so ergibt sich wie im Beweis zu 8.12, daß

$$|W_i(GL) \cap G(\mathfrak{n})| = |\{a \in L^* \mid a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| = \begin{cases} (q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 3(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

ist. \square

Satz 8.14 Sei $i \in \{2, 3\}$. Dann gilt

$$|W_i(G(\mathfrak{n}))| = \begin{cases} (q^d-2)(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (q^d-4)(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}.$$

Beweis: Mit Satz 8.7 gilt:

$$\begin{aligned} |W_i(G(\mathfrak{n}))| &= |W_i(GL) \cap G(\mathfrak{n})| \\ &= |\{(a, b) \mid a \neq b, a, b \in L^*, a^2b \in \mathbb{F}_q^*\}| \\ &= |\{(a, b) \mid a, b \in L^*, a^2b \in \mathbb{F}_q^*\}| - |\{(a, a) \mid a \in L^*, a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}|. \end{aligned}$$

Wieder folgt aus Lemma 8.2

$$\begin{aligned} |W_i(G(\mathfrak{n}))| &= (q^d-1)(q-1) - \begin{cases} (q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 3(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (q^d-2)(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (q^d-4)(q-1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

\square

Satz 8.15 *Es gilt*

$$|W_1(G(\mathfrak{n}))| = \begin{cases} \frac{1}{6}(q-1)(q^d-2)(q^d-3) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{6}(q-1)(q^{2d}-5q^d+10) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}.$$

Beweis: Mit Satz 8.7 gilt:

$$\begin{aligned} |W_1(G(\mathfrak{n}))| &= |W_1(GL) \cap G(\mathfrak{n})| \\ &= \frac{1}{6} |\{(a, b, c) \mid a, b, c \in L^*, a \neq b \neq c \neq a, abc \in \mathbb{F}_q^*\}| \\ &= \frac{1}{6} \left[|\{(a, b, c) \mid a, b, c \in L^*, a \cdot b \cdot c \in \mathbb{F}_q^*\}| + \right. \\ &\quad - |\{(a, a, c) \mid a, c \in L^*, a \neq c, a^2c \in \mathbb{F}_q^*\}| + \\ &\quad - |\{(a, b, a) \mid a, b \in L^*, a \neq b, a^2b \in \mathbb{F}_q^*\}| + \\ &\quad - |\{(a, b, b) \mid a, b \in L^*, a \neq b, ab^2 \in \mathbb{F}_q^*\}| + \\ &\quad \left. - |\{(a, a, a) \mid a \in L^*, a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[|\{(a, b, c) \mid a, b, c \in L^*, a \cdot b \cdot c \in \mathbb{F}_q^*\}| + \right. \\ &\quad - 3 |\{(a, a, c) \mid a, c \in L^*, a \neq c, a^2c \in \mathbb{F}_q^*\}| + \\ &\quad \left. - |\{(a, a, a) \mid a \in L^*, a^3 \in \mathbb{F}_q^*\}| \right]. \end{aligned}$$

Der zweite Summand wurde bereits im Beweis von Satz 8.14 berechnet, und Lemma 8.2 liefert den dritten Summanden. So ergibt sich

$$\begin{aligned} |W_1(G(\mathfrak{n}))| &= \begin{cases} \frac{1}{6}[(q^d-1)^2(q-1) - 3(q^d-2)(q-1) - (q-1)] & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{6}[(q^d-1)^2(q-1) - 3(q^d-4)(q-1) - 3(q-1)] & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6}(q-1)(q^d-2)(q^d-3) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{6}(q-1)(q^{2d}-5q^d+10) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Satz 8.16 *Es gilt :*

$$|W_7(G(\mathfrak{n}))| = \frac{1}{2} q^d (q^d - 1) (q - 1).$$

Beweis: Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir

$$\begin{aligned} |W_7(G(\mathfrak{n}))| &= |W_7(GL) \cap G(\mathfrak{n})| \\ &= \left| \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in GL(L) \mid \begin{array}{l} x^2 - \beta x - \alpha \in L[x] \text{ prim,} \\ -\alpha c \in \mathbb{F}_q^* \end{array} \right\} \right| \\ &= |\{x^2 - \beta x - \alpha \in L[x] \text{ prim}\}| \cdot (q-1) \\ &= \frac{q^d(q^d-1)}{2} (q-1) \end{aligned}$$

□

Um den Beweis des nächsten Satzes zu vereinfachen, wird nun ein Hilfslemma bewiesen.

Lemma 8.17 Sei \mathbb{F}_q ein endlicher Körper, $c \in \mathbb{F}_q^*$, $n, d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$(x^{\frac{q^{3d}-1}{q-1}} - c) \text{ teilt } (x^{q^{3d}} - x).$$

Beweis: Offensichtlich ist die obige Aussage äquivalent zu

$$x^{\frac{q^{3d}-1}{q-1}} - c \text{ teilt } x^{q^{3d}-1} - 1.$$

Indem wir die neue Variable $z := x^{\frac{q^{3d}-1}{q-1}}$ einführen, müssen wir lediglich zeigen, daß

$$(z-c) \text{ das Polynom } (z^{q-1} - 1)$$

teilt. Dies gilt genau dann, wenn für alle $c \in \mathbb{F}_q^*$

$$c^{q-1} - 1 = 0$$

ist. Die letzte Gleichung wird von allen $c \in \mathbb{F}_q^*$ erfüllt, da \mathbb{F}_q^* eine zyklische Gruppe ist. Damit ist die Aussage gezeigt. \square

Satz 8.18 Es gilt :

$$|W_8(G(n))| = \begin{cases} \frac{1}{3} (q-1) q^d (q^d + 1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{3} (q-1) (q^d + 2) (q^d - 1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Beweis: Wie üblich ergibt sich

$$\begin{aligned} |W_8(G(n))| &= |W_8(GL) \cap G(n)| \\ &= \left| \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in GL(L) \mid \begin{array}{l} x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \in L[x] \text{ prim,} \\ \alpha \in \mathbb{F}_q^* \end{array} \right\} \right| \\ &= |\{q(x) \in L[x] \mid q(x) \text{ prim, normiert, } \deg(q) = 3, q(0) \in \mathbb{F}_q^*\}|. \end{aligned}$$

Die Bedingung $q(0) \in \mathbb{F}_q^*$ verhindert, daß wir die Formel aus Satz 7.1 anwenden können. Daher ermitteln wir die Anzahl wie folgt: Sei M der kubische Erweiterungskörper von L , d.h. M sei der Zerfällungskörper des Polynoms $x^{|L|^3} - x \in L[x]$. Dann liegt für alle $\alpha \in M$ das Polynom

$$p_\alpha(x) := (x - \alpha) (x - \alpha^q) (x - \alpha^{q^2})$$

in $L[x]$. Da der Index $[M : L] = 3$ prim ist, existieren keine nichttriviale Zwischen-erweiterungen. Daher ist $p_\alpha(x)$ genau dann prim, wenn α in $M - L$ liegt. Weil M bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, gilt sogar

$$q(x) \in L[x] \text{ prim, normiert, } \deg(q) = 3 \iff \exists \alpha \in M - L \text{ mit } q(x) = p_\alpha(x).$$

Folglich ist

$$\{q(x) \in L[x] \mid \deg(q) = 3, q \text{ prim und normiert}\} = \{p_\alpha(x) \mid \alpha \in M - L\}.$$

Daraus erhalten wir die Gleichheit

$$\left\{ q(x) \in L[x] \mid \begin{array}{l} \deg(q) = 3, q(0) \in \mathbb{F}_q^* \\ q \text{ prim und normiert} \end{array} \right\} = \left\{ p_\alpha(x) \mid \begin{array}{l} \alpha \in M - L, \\ \text{Norm}_L^M(\alpha) \in \mathbb{F}_q^* \end{array} \right\}.$$

Da die drei Polynome $p_\alpha(x)$, $p_{\alpha^q}(x)$, $p_{\alpha^{q^2}}(x)$ gleich sind, folgt

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ q(x) \in L[x] \mid \begin{array}{l} \deg(q) = 3, q(0) \in \mathbb{F}_q^* \\ q \text{ prim und normiert} \end{array} \right\} \right| = \frac{1}{3} \left| \{ \alpha \in M - L \mid \text{Norm}_L^M(\alpha) \in \mathbb{F}_q^* \} \right| \\ & = \frac{1}{3} \left| \{ \alpha \in M \mid \text{Norm}_L^M(\alpha) \in \mathbb{F}_q^* \} \right| - \frac{1}{3} \left| \{ \alpha \in L \mid \text{Norm}_L^M(\alpha) \in \mathbb{F}_q^* \} \right| \end{aligned}$$

Wir werden nun die beiden Summanden einzeln berechnen.

1. Nebenrechnung: Für jedes α aus M ist

$$\text{Norm}_L^M(\alpha) = \alpha^{1+|L|+|L|^2} = \alpha^{1+q^d+q^{2d}}.$$

Daher gilt für alle $c \in \mathbb{F}_q^*$

$$\{ \alpha \in M \mid \text{Norm}_L^M(\alpha) = c \} = \{ \alpha \in M \mid \alpha \text{ ist Nullstelle von } x^{1+q^d+q^{2d}} - c \in \mathbb{F}_q^* \}.$$

Wir betrachten nun M als Erweiterungskörper von \mathbb{F}_q . M ist der Zerfällungskörper zum Polynom $x^{q^{3d}} - x$ aus $\mathbb{F}_q[x]$. Da $1 + q^d - q^{2d} = \frac{q^{3d}-1}{q^d-1}$ Teiler von $q^{3d} - 1$ ist, teilt $x^{1+q^d+q^{2d}} - c$ nach Lemma 8.17 das Polynom

$$x^{q^{3d}} - x = (x^{q^{3d}-1} - 1) x.$$

Daher zerfällt es in M vollständig in Linearfaktoren. Da das Polynom

$$x^{1+q^d+q^{2d}} - c$$

und seine Ableitung

$$(1 + q^d + q^{d^2}) x^{(q^d+q^{d^2})} = x^{(q^d+q^{d^2})}$$

teilerfremd sind, ist es separabel über \mathbb{F}_q und besitzt daher $1 + q^d + q^{2d}$ verschiedene Nullstellen in M . Somit folgt

$$\left| \{ \alpha \in M \mid \text{Norm}_L^M(\alpha) \in \mathbb{F}_q^* \} \right| = (q^{2d} + q^d + 1)(q - 1).$$

2.Nebenrechnung: Nun müssen wir ermitteln, für wieviele α aus L die Norm von α in \mathbb{F}_q^* liegt. Mit Lemma 8.2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \{ \alpha \in L \mid \text{Norm}_L^M \in \mathbb{F}_q^* \} \right| &= \left| \{ \alpha \in L \mid \alpha^3 \in \mathbb{F}_q^* \} \right| \\ &= \begin{cases} q - 1 & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 3(q - 1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} W_8(G(\mathfrak{n})) &= \frac{1}{3}(q^{2d} + q^d + 1)(q - 1) - \begin{cases} \frac{1}{3}(q - 1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (q - 1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3}(q - 1) q^d (q^d + 1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(q - 1) (q^d + 2) (q^d - 1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. \square

Nachdem wir die Mächtigkeiten aller Mengen $W_i(G(\mathfrak{n}))$ mit $i \in 1, \dots, 8$ berechnet haben, können wir mit Hilfe der Sätze 8.7 und 8.8, den Ergebnissen des Kapitels 7 und der am Anfang dieses Kapitels ermittelten Formel

$$|W_i(GL) \cap G(\mathfrak{n})| \cdot |V^{GL(L)}| = |W_i(G(\mathfrak{n}))| \cdot |V^{G(\mathfrak{n})}|$$

die Längen der Konjugationsklassen $V^{G(\mathfrak{n})}$ angeben. Die dazu nötigen elementaren Divisionen spare ich aus. Die Ergebnisse sind in der Tabelle am Ende des Kapitels zu finden. Mit ebenso elementaren, aber langwierigen Umformungen ergibt sich die Probe

$$\sum_{i=1}^8 |W_i(G(\mathfrak{n}))| |V^{G(\mathfrak{n})}| = |G(\mathfrak{n})|,$$

wobei V jeweils ein Vertreter aus $W_i(G(\mathfrak{n}))$ ist. Wie in Kapitel 7 erhalten wir aus einem bekannten Satz aus der Darstellungstheorie ([Lan93, Proposition 4.2., S.674]) folgenden Satz:

Satz 8.19 *Die Gruppe $G(\mathfrak{n})$ besitzt*

$$\begin{cases} (q-1)q^d(q^d+1) & : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (q-1)(q^{2d}+q^d+8) & : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

inäquivalente, irreduzible Darstellungen.

Beweis: Der Satz folgt durch einfaches Aufsummieren, da die Anzahl der inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen von $G(\mathfrak{n})$ mit

$$\sum_{i=1}^8 |W_i(G(\mathfrak{n}))|$$

übereinstimmt. \square

Bei diesen Berechnungen fällt auf, daß in den beiden Fällen

$$\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{und} \quad \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$$

die Summe

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 6}}^8 |W_i(G(\mathfrak{n}))| = (q-1)(q^{2d}+q^d-1)$$

den gleichen Wert liefert. Die Differenz in der Anzahl der inäquivalenten, irreduziblen Darstellung hängt also nur vom Typ 6 ab.

Die Ergebnisse dieses Kapitels werden in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Es bezeichnen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ Elemente aus L , und ε sei ein fest gewählter Erzeuger der Gruppe L^* .

<i>Typ</i>	$W_i(G(n))$	<i>Anzahl der Klassen vom Typ i in $G(n)$</i>	<i>Elemente je Klasse</i>
1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c \neq a$ $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{F}_q^*$	$\frac{1}{6}(q-1)(q^d-2)(q^d-3) : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $\frac{1}{6}(q-1)(q^{2d}-5q^d+10) : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$	$q^{3d}(q^d+1) \cdot (q^{2d}+q^d+1)$
2	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)(q^d-2) : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $(q-1)(q^d-4) : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$	$q^{2d}(q^{2d}+q^d+1)$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)(q^d-2) : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $(q-1)(q^d-4) : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$	$q^{2d}(q^d-1)(q^d+1) \cdot (q^{2d}+q^d+1)$
4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1) : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $3(q-1) : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$	1
5	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1) : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $3(q-1) : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$	$(q^d-1)(q^d+1) \cdot (q^{2d}+q^d+1)$
6	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1) : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$	$q^d(q^d-1)^2(q^d+1) \cdot (q^{2d}+q^d+1)$
	$\begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\tau \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$9(q-1) : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$	$\frac{1}{3}q^d(q^d-1)^2(q^d+1) \cdot (q^{2d}+q^d+1)$
7	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $x^2 - \beta x - \alpha$ <i>prim</i> $-\alpha \cdot c \in \mathbb{F}_q^*$	$\frac{1}{2}(q-1)q^d(q^d-1)$	$q^{3d}(q^d-1) \cdot (q^{2d}+q^d+1)$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ $x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha$ <i>prim</i> $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$	$\frac{1}{3}(q-1)q^d(q^d+1) : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $\frac{1}{3}(q-1)(q^d+2)(q^d-1) : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$	$q^{3d}(q^d-1)^2 \cdot (q^d+1)$

Kapitel 9

Der Schnitt der $V^{G(\mathfrak{n})}$ mit Untergruppen von $G(\mathfrak{n})$.

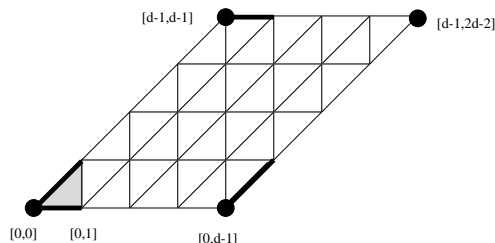
Nachdem wir die Konjugationsklassen von $G(\mathfrak{n}) = \{M \in GL(3, L) \mid \det M \in \mathbb{F}_q^*\}$ berechnet haben, müssen wir diese noch mit den in den Formeln 6.6 und 6.10 relevanten Fixgruppen schneiden. Dabei werden wir sehen, daß man Formel 6.10 zu Formel 6.13 vereinfachen kann. Da wir meist 3×3 Matrizen betrachten, werden wir in den Bezeichnungen der Gruppen die Dimension der Matrizen vernachlässigen. Falls auftretende Matrizen eine andere Dimension besitzen, wird dies explizit erwähnt. Das Symbol I bezeichnet die $n \times n$ -Einheitsmatrix, wobei das n aus dem Zusammenhang immer hervorgeht.

In den Sätzen dieses Kapitels tritt oft die Formulierung “Sei $V = \dots \in W_i(G(\mathfrak{n}))$ ” auf. Dadurch werden implizit Bedingungen an die Einträge von V gestellt (z.B. a invertierbar, $a \neq b$ oder $x^2 - \alpha x - \beta$ prim), die in der Formulierung des Satzes nicht explizit genannt werden.

Wir müssen nun für alle $i \in \{1, \dots, 8\}$ und alle $V \in W_i(G(\mathfrak{n}))$ die Mächtigkeit des Schnitts der Konjugationsklassen mit den Gruppen

$$\begin{aligned}
 &GL(\mathbb{F}_q), \\
 &\overline{\Gamma_{[0,0][0,1][1,1]}}, \overline{\Gamma_{[0,d-1][1,d]}}, \\
 &\overline{\Gamma_{[d-1,2d-2]}}, \overline{\Gamma_{[0,d-1]}}, \overline{\Gamma_{[0,0][0,1]}} \\
 &\overline{\Gamma_{[d-1,d-1]}}, \overline{\Gamma_{[d-1,d-1][d-1,d]}}, \overline{\Gamma_{[0,0][1,1]}}
 \end{aligned}$$

angeben. Wir werden sehen, daß wir Gruppen in der gleichen Zeile jeweils simultan betrachten können. Ich erinnere daran, daß die obigen Gruppen die Fixgruppen der folgenden Simplexes aus \mathcal{W}_{d-1} sind:



Es wird immer wieder von den gleichen Argumenten Gebrauch gemacht, die ich hier kurz erwähne.

- Zwei unter $G(\mathfrak{n})$ konjugierte Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom und das gleiche Minimalpolynom.
- Der Körper L ist der Zerfällungskörper des separablen Polynoms $x^{q^d} - x$ aus $\mathbb{F}_q[x]$. Daher ist L normal und separabel über \mathbb{F}_q . Die Normalität besagt, daß jedes Primpolynom aus $\mathbb{F}_q[x]$, das in L eine Nullstelle hat, bereits vollständig in $L[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Aus der Separabilität folgt, daß kein Primpolynom aus $\mathbb{F}_q[x]$ mehrfache Nullstellen in L besitzt.

Damit sind wir nun bereit, die einzelnen Schnittmengen und ihre Mächtigkeit zu berechnen.

9.1 Der Schnitt $V^{G(\mathfrak{n})} \cap GL(\mathbb{F}_q)$

Wir beginnen mit einem Satz, der es uns gestattet, Aussagen über die Mächtigkeit des Schnitts auf Aussagen über Längen von Konjugationsklassen der $GL(\mathbb{F}_q)$ zurückzuführen. Daher wird häufig auf Satz 7.11 verwiesen, in dem diese Längen ermittelt wurden.

Satz 9.1 Seien $A, B \in GL(\mathbb{F}_q)$ vom gleichen Typ in $GL(L)$. Weiter sei ihr Typ ungleich 6. Dann gilt

$$A \in B^{G(\mathfrak{n})} \iff A \in B^{GL(\mathbb{F}_q)}.$$

Beweis: Da wir nur 3×3 Matrizen betrachten und der Typ ungleich sechs ist, ist die Konjugationsklasse in $G(\mathfrak{n})$ einer Matrix eindeutig durch ihr charakteristisches Polynom und ihr Minimalpolynom festgelegt. Andererseits sind zwei Matrizen aus $GL(\mathbb{F}_q)$ genau dann unter $GL(\mathbb{F}_q)$ konjugiert, wenn sie die gleiche Jordansche Normalform besitzen. Und diese ist für 3×3 Matrizen ebenfalls durch charakteristisches Polynom und Minimalpolynom festgelegt. Also folgt die Aussage aus folgender Äquivalenz:

$$\begin{aligned} A \in B^{G(\mathfrak{n})} &\iff \phi(A) = \phi(B) \text{ und } m(A) = m(B) \\ &\iff A \in B^{GL(\mathbb{F}_q)}. \end{aligned}$$

□

Satz 9.2 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in W_1(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} (q-1)^2 q^3 (q+1) & : \quad \phi(V) \in \mathbb{F}_q[x] \text{ prim} \\ (q-1)q^3(q^2+q+1) & : \quad \begin{array}{l} \phi(V) \in \mathbb{F}_q[x] \\ \text{hat Primteiler vom Grad 2} \end{array} \\ q^3(q+1)(q^2+q+1) & : \quad \{a, b, c\} \subset \mathbb{F}_q \\ 0 & : \quad \phi(V) \notin \mathbb{F}_q[x] \end{cases}.$$

Beweis: Wir nutzen aus, daß alle Matrizen aus $V^{G(\mathfrak{n})}$ das gleiche charakteristische Polynom und das gleiche Minimalpolynom besitzen. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, daß der Schnitt leer ist, falls $\phi(V)$ nicht in $\mathbb{F}_q[x]$ liegt. Ansonsten müssen wir

das Zerfallen von $\phi(V)=(x-a)(x-b)(x-c)$ in $\mathbb{F}_q[x]$ betrachten.

1.Fall: $\phi(V) = \det(xI - V) = x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0$ ist prim in $\mathbb{F}_q[x]$. Dann ist

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -d_0 \\ 1 & 0 & -d_1 \\ 0 & 1 & -d_2 \end{array} \right)^{GL(\mathbb{F}_q)}.$$

Die Länge dieser Klasse haben wir bereits in Kapitel 7 berechnet, und mit Satz 7.11 folgt

$$|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = (q-1)^2 q^3 (q+1).$$

2.Fall: $\phi(V) = (x^2 + d_1x + d_0)(x+c)$, $c, d_1, d_0 \in \mathbb{F}_q$, hat genau eine Nullstelle in \mathbb{F}_q . Dann ist

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -d_0 & 0 \\ 1 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{array} \right)^{GL(\mathbb{F}_q)},$$

und mit Satz 7.11 folgt

$$|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = (q-1)q^3(q^2 + q + 1).$$

3.Fall: $\phi(V)$ zerfällt in $\mathbb{F}_q[x]$ in Linearfaktoren. Dann liegen bereits $a, b, c \in \mathbb{F}_q^*$ und sind alle verschieden. Daher ist

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array} \right)^{GL(\mathbb{F}_q)}$$

und

$$|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = q^3(q+1)(q^2 + q + 1).$$

Damit ist alles gezeigt. □

Satz 9.3 Sei

$$V = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array} \right) \in W_2(G(n)).$$

Dann gilt:

$$|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} q^2(q^2 + q + 1) & : a, b \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Es ist $\phi(V) = (x-a)^2(x-b)$. Da $L | \mathbb{F}_q$ eine separable Körpererweiterung ist, liegt $\phi(V)$ genau dann in $\mathbb{F}_q[x]$, falls a, b in \mathbb{F}_q liegen. Daraus folgt für $\{a, b\} \not\subset \mathbb{F}_q$, daß $V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)$ gleich \emptyset ist. Für $\{a, b\} \subset \mathbb{F}_q$ ist dann

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array} \right)^{GL(\mathbb{F}_q)},$$

und damit

$$|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = q^2(q^2 + q + 1).$$

□

Satz 9.4 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in W_3(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} (q-1)q^2(q+1)(q^2+q+1) & : a, b \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Mit den gleichen Argumenten wie oben folgt

$$\{a, b\} \not\subset \mathbb{F}_q \Rightarrow V^{G(\mathfrak{n})} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \emptyset$$

und

$$\{a, b\} \subset \mathbb{F}_q \Rightarrow V^{G(\mathfrak{n})} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^{GL(\mathbb{F}_q)}.$$

Mit Satz 7.11 folgt die Aussage. □

Ebenso ergibt sich

Satz 9.5 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_4(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt:

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} 1 & : a \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Mit dem Standardargument, daß $L | \mathbb{F}_q$ separabel ist, folgt

$$(x-a)^3 \in \mathbb{F}_q[x] \iff a \in \mathbb{F}_q.$$

Damit ist für ein beliebiges a aus L^*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(\mathfrak{n})} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{GL(\mathbb{F}_q)} \cap GL(\mathbb{F}_q),$$

und es folgt die Aussage. □

Satz 9.6 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_5(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt:

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} (q-1)(q+1)(q^2+q+1) & : a \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Wie im letzten Beweis ergibt sich für alle a

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = V^{GL(\mathbb{F}_q)} \cap GL(\mathbb{F}_q).$$

Mit Satz 7.11 erhalten wir die Behauptung. \square

Es ist überraschend, daß im nächsten Satz die Mächtigkeit des Schnitts nicht von der Kongruenzbedingung an $\frac{q^d-1}{q-1}$ abhängt. Es gilt nämlich:

Satz 9.7 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_6(G(n)).$$

Dann gilt:

$$|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} (q-1)^2 q(q+1)(q^2+q+1) & : a \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: In Abhängigkeit von $\frac{q^d-1}{q-1}$ unterscheiden wir zwei Fälle.

1.Fall: $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$. Da im Übergang von $GL(3, L)$ zu $G(n)$ der Typ 6 nicht zerfällt (d.h. $W_6(G(n)) = W_6(GL) \cap G(n)$), wird die Zugehörigkeit einer Matrix zu $V^{G(n)}$ durch ihr Minimalpolynom bestimmt. Daher ist

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \{A \in GL(\mathbb{F}_q) \mid m(A) = (x-a)^3\} = V^{GL(\mathbb{F}_q)} \cap GL(\mathbb{F}_q).$$

Mit den Standardargumenten ergibt sich die Behauptung.

2.Fall: $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$. Dann ist insbesondere $q^d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ und $\mathbb{F}_q^* \subset (L^*)^3$. In diesem Fall ist die Konjugationsklasse einer Matrix in $G(n)$ nicht durch das Minimalpolynom der Matrix festgelegt. Satz 8.9 gibt an, wann eine Matrix in $G(n)$ zu V konjugiert ist. Daher erhalten wir

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \left\{ A \in GL(\mathbb{F}_q) \mid \begin{array}{l} m(A) = (x-a)^3, \text{ und } \exists T \in GL(L), c \in \mathbb{F}_q^* \\ \text{mit } (T^{-1}AT = V \text{ und } \det(T) \in c(L^*)^3 = (L^*)^3) \end{array} \right\}.$$

Da V die Jordansche-Normalform in $GL(\mathbb{F}_q)$ aller Matrizen aus $V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)$ ist, kann T aus $GL(\mathbb{F}_q)$ gewählt werden. Dann liegt $\det(T)$ in $\mathbb{F}_q^* \subset (L^*)^3$, und damit gilt wie im ersten Fall

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \{A \in GL(\mathbb{F}_q) \mid m(A) = (x-a)^3\}.$$

Wieder folgt mit den üblichen Argumenten die Aussage. \square

Im obigen Beweis haben wir also gezeigt, daß unabhängig von $\frac{q^d-1}{q-1}$ alle Matrizen $A \in GL(\mathbb{F}_q)$ mit Minimalpolynom $(x-a)^3$ unter $G(n)$ zu

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

konjugiert sind. Damit folgt

Satz 9.8 Sei $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ und $L^* = \langle \varepsilon \rangle$. Dann gilt:

$$\left| \begin{pmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) \right| = \left| \begin{pmatrix} a & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) \right| = 0$$

Beweis: Im Fall $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ sind die beiden obigen Matrizen unter $G(n)$ nicht konjugiert zu

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

□

Satz 9.9 Sei

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in W_7(G(n)).$$

Dann gilt:

$$|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} (q-1)q^3(q^2+q+1) & : \alpha, c \in \mathbb{F}_q^*, \beta \in \mathbb{F}_q \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Da alle Matrizen aus $GL(\mathbb{F}_q)$ ein charakteristisches Polynom aus $\mathbb{F}_q[x]$ besitzen, folgt für $\phi(V) \notin \mathbb{F}_q[x]$, daß $|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)|$ gleich Null ist.

Sei also $\phi(V) = (x^2 - \beta x - \alpha)(x - c) \in \mathbb{F}_q[x]$. Da $x^2 - \beta x - \alpha$ in $L[x]$ prim ist, c in L liegt und $L \mid \mathbb{F}_q$ normal ist, kann $\phi(V)$ in $\mathbb{F}_q[x]$ nicht prim sein. Weiter hat $\phi(V)$ den Grad drei, und V ist invertierbar. Daher liegt c in \mathbb{F}_q^* . Dann liegt aber auch $(x^2 - \beta x - \alpha) = \frac{\phi(V)}{x-c}$ in $\mathbb{F}_q[x]$ und ist dort prim. Folglich ist in diesem Fall

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{GL(\mathbb{F}_q)}$$

und mit Satz 7.11 folgt die Formel. □

Wir kommen nun zum letzten Typ.

Satz 9.10 Sei

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \in W_8(G(n)).$$

Dann gilt:

$$|V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} (q-1)^2 q^3 (q+1) & : \alpha \in \mathbb{F}_q^*, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_q \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Es ist klar, daß für $\phi(V) \notin \mathbb{F}_q[x]$ der Schnitt $V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)$ leer ist und daß sich für $\phi(V) \in \mathbb{F}_q[x]$ als Schnitt

$$V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q) = V^{GL(\mathbb{F}_q)}$$

ergibt. Die Aussage folgt daher wiederum aus Satz 7.11. □

Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden in der Tabelle auf Seite 132 zusammengefaßt.

9.2 Der Schnitt $V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}$

Um drei Fälle gleichzeitig zu behandeln, führen wir die Gruppe \tilde{U} ein. Sei $\mathbb{F}_q \subset K_1 \subset K_2 \subset L$ ein Körperturm. Wir definieren

$$\tilde{U} := \left\{ \left(\begin{array}{ccc} m_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & m_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{array} \right) \in G(\mathfrak{n}) \mid \begin{array}{l} m_{11}, m_{22}, m_{33} \in \mathbb{F}_q^* \\ \alpha_{12} \in K_1, \alpha_{13}, \alpha_{23} \in K_2 \end{array} \right\}.$$

Dann ist die endliche Menge \tilde{U} abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation und ist daher eine Untergruppe von $GL(L)$. Je nach Wahl der Körper K_1 und K_2 entspricht \tilde{U} den folgenden Gruppen

K_1	K_2	\tilde{U}
\mathbb{F}_q	\mathbb{F}_q	$\overline{\Gamma_{[0,0],[0,1],[1,1]}}$
\mathbb{F}_q	L	$\overline{\Gamma_{[0,d-1],[1,d]}}$
L	L	$\overline{\Gamma_{[d-1,2d-2]}}$

Es ist zu beachten daß für alle M aus \tilde{U} das charakteristische Polynom $\phi(M)$ in $\mathbb{F}_q[x]$ liegt. Aufgrund der Diagonalgestalt von \tilde{U} zerfällt $\phi(M)$ in $\mathbb{F}_q[x]$ vollständig in Linearfaktoren.

Satz 9.11 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in W_1(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| = \begin{cases} 6 |K_1| |K_2|^2 & : a, b, c \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Sei M eine Matrix aus $V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}$. Dann ist $\phi(M) = (x-a)(x-b)(x-c) \in \mathbb{F}_q[x]$ mit paarweise verschiedenen $a, b, c \in L$. Da $\phi(M)$ nach den obigen Überlegungen in $\mathbb{F}_q[x]$ vollständig zerfällt, liegen a, b, c schon in \mathbb{F}_q^* . Daher ist der Schnitt leer für $\{a, b, c\} \not\subset \mathbb{F}_q^*$. Da die Elemente a, b, c beliebig auf der Hauptdiagonalen angeordnet sein können, folgt für $\{a, b, c\} \subset \mathbb{F}_q^*$

$$\begin{aligned} |V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| &= 6 \left| \left\{ \begin{pmatrix} a & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & b & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid \alpha_{12} \in K_1, \alpha_{13}, \alpha_{23} \in K_2 \right\} \right| \\ &= 6 |K_1| |K_2|^2. \end{aligned}$$

□

Satz 9.12 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in W_2(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{\text{G}(n)} \cap \tilde{U}| = \begin{cases} |K_2|^2 + 2 |K_1| |K_2| & : a, b \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Mit den Argumenten aus dem Beweis zu 9.11 ist klar, daß im Fall $\{a, b\} \not\subseteq \mathbb{F}_q^*$ der Schnitt leer ist. Für $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ ist

$$V^{\text{G}(n)} \cap \tilde{U} = \mathcal{M}_1 \dot{\cup} \mathcal{M}_2 \dot{\cup} \mathcal{M}_3$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &:= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid c_{12} \in K_1, c_{13}, c_{23} \in K_2, \right. \\ &\quad \left. \mathfrak{m}(M) = (x-a)(x-b) \right\} \\ \mathcal{M}_2 &:= \left\{ M = \begin{pmatrix} b & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid c_{12} \in K_1, c_{13}, c_{23} \in K_2, \right. \\ &\quad \left. \mathfrak{m}(M) = (x-a)(x-b) \right\} \\ \mathcal{M}_3 &:= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & b & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid c_{12} \in K_1, c_{13}, c_{23} \in K_2, \right. \\ &\quad \left. \mathfrak{m}(M) = (x-a)(x-b) \right\}. \end{aligned}$$

Wir werden nun die Mächtigkeit dieser drei Mengen berechnen.

1.Fall: Es gilt

$$M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1 \iff (M - aI)(M - bI) = 0.$$

Es ist

$$(M - aI)(M - bI) = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}(a-b) & c_{12}c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da a ungleich b ist, ist das Produkt genau dann die Nullmatrix, wenn c_{12} gleich Null ist. Daher ist

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid c_{13}, c_{23} \in K_2 \right\}$$

und

$$|\mathcal{M}_1| = |K_2|^2.$$

2.Fall: Es gilt

$$M = \begin{pmatrix} b & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \iff (M - aI)(M - bI) = 0.$$

Hier ergibt sich

$$(M - aI)(M - bI) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{12}c_{23} \\ 0 & 0 & c_{23}(a-b) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist das Produkt genau dann gleich Null, wenn c_{23} gleich Null ist. Folglich ist

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ M = \begin{pmatrix} b & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid c_{12} \in K_1, c_{13} \in K_2 \right\}$$

und

$$|\mathcal{M}_2| = |K_1| |K_2|.$$

3.Fall: Es gilt

$$M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & b & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3 \iff (M - aI)(M - bI) = 0.$$

Da

$$(M - aI)(M - bI) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (a-b)c_{13} + c_{12}c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, folgt

$$\mathcal{M}_3 = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & \frac{c_{12}c_{23}}{b-a} \\ 0 & b & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid c_{12} \in K_1, c_{23} \in K_2 \right\}$$

und

$$|\mathcal{M}_3| = |K_1| |K_2|.$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$|V^{G(n)} \cap \tilde{U}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_3| = |K_2|^2 + 2 |K_1| |K_2|.$$

□

Satz 9.13 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in W_3(G(n)).$$

Dann gilt

$$|V^{G(n)} \cap \tilde{U}| = \begin{cases} 3|K_1| |K_2|^2 - |K_2|^2 - 2|K_1| |K_2| & : a, b \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Es ist klar, daß der Schnitt für $\{a, b\} \not\subset \mathbb{F}_q^*$ leer ist. Für $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V^{G(n)} \cap \tilde{U} &= \{M \in \tilde{U} \mid \phi(M) = m(M) = (x-a)^2(x-b)\} \\ &= \{M \in \tilde{U} \mid \phi(M) = (x-a)^2(x-b)\} - \left\{ M \in \tilde{U} \mid \begin{array}{l} \phi(M) = (x-a)^2(x-b), \\ m(M) = (x-a)(x-b) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung, auf wieviel Arten zwei a und ein b auf der Hauptdiagonalen angeordnet werden können, erhalten wir mit Satz 9.12

$$|V^{G(n)} \cap \tilde{U}| = 3|K_1| |K_2|^2 - (|K_2|^2 + 2|K_1| |K_2|).$$

□

Satz 9.14 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_4(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| = \begin{cases} 1 & : a \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Da die Konjugationsklasse von V nur ein Element enthält, folgt die Aussage direkt. \square

Satz 9.15 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_5(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| = \begin{cases} |K_2|^2 + |K_1||K_2| - |K_2| - 1 & : a \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{12} \in K_1, c_{13}, c_{23} \in K_2, \\ \mathfrak{m}(M) = (x-a)^2 \end{array} \right\} \\ &= \{M \in \tilde{U} \mid (M - aI)^2 = 0\} - \{\text{diag}(a, a, a)\}. \end{aligned}$$

Da

$$(M - aI)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{12}c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{12} \in K_1, c_{13}, c_{23} \in K_2 \\ c_{12}c_{23} = 0 \end{array} \right\} \\ &\quad - \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| &= |\{(c_{12}, c_{13}, c_{23}) \in K_1 \times K_2^2 \mid c_{12} \cdot c_{23} = 0\}| - 1 \\ &= |K_1 \times K_2^2| - |\{(c_{12}, c_{13}, c_{23}) \in K_1 \times K_2^2 \mid c_{12} \cdot c_{23} \neq 0\}| - 1 \\ &= |K_1| \cdot |K_2|^2 - (|K_1| - 1)(|K_2| - 1)|K_2| - 1 \\ &= |K_2|^2 + |K_1||K_2| - |K_2| - 1. \end{aligned}$$

\square

Den nächsten Satz bereiten wir durch folgendes Lemma vor.

Lemma 9.16 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_6(G(\mathfrak{n})).$$

Dann ist für $a \notin \mathbb{F}_q^*$ der Schnitt $V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}$ leer, und für a aus \mathbb{F}_q^* ist

$$V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{12} \in K_1^*, c_{23} \in K_2^*, c_{13} \in K_2 \\ c_{12}^{-2} c_{23}^{-1} \in \tau \cdot \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\}.$$

Beweis: Analog zu den vorangegangenen Beweisen ist der Schnitt für $a \notin \mathbb{F}_q^*$ leer. Sei also a ein Element aus \mathbb{F}_q^* , und es sei wieder

$$Z := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Dann liefert uns Satz 8.9, daß

$$V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{12} \in K_1, c_{13}, c_{23} \in K_2, m(M) = (x-a)^3 \\ \exists T \in GL(L) \text{ mit } T^{-1}MT = Z \\ \text{und } \det(T)\tau^2 \in \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\}$$

ist. Wie im letzten Beweis ergibt sich, daß die Matrix M genau dann das Minimalpolynom $(x-a)^3$ hat, wenn $c_{12} \cdot c_{23} \neq 0$ gilt. Somit können wir schreiben

$$V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{12} \in K_1^*, c_{23} \in K_2^*, c_{13} \in K_2 \\ \exists T \in GL(L) \text{ mit } T^{-1}MT = Z \\ \text{und } \det(T)\tau^2 \in \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\}$$

Nach Satz 8.9 reicht es aus, ein bestimmtes $T \in GL(L)$ zu betrachten, um zu entscheiden, ob alle T mit $T^{-1}MT = Z$ der Bedingung genügen. Wir wählen T als

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12}^{-1} & -c_{13} \\ 0 & 0 & (c_{12}c_{23})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\det(T) = \frac{1}{c_{12}^2 c_{23}}.$$

Daraus folgt bereits

$$V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{12} \in K_1^*, c_{23} \in K_2^*, c_{13} \in K_2 \\ c_{12}^{-2} \cdot c_{23}^{-1} \in \tau \cdot \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\}.$$

□

Den nächsten Satz können wir nicht für beliebige Zwischenkörper K_1 und K_2 von $L \mid \mathbb{F}_q$ zeigen, da im Beweis die "Lage" von $(L^*)^3$ bezüglich der Zwischenkörper eingeht. Daher beschränken wir uns im Fall $a \in \mathbb{F}_q^*$ und $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ auf die uns interessierenden Körper \mathbb{F}_q und L .

Satz 9.17 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_6(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| = \begin{cases} (|K_1 - 1|)(|K_2 - 1||K_2|) & : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(|K_1| - 1)(q^d - 1)q^d & : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}, K_2 = L \\ (q - 1)^2 q & : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}, \\ & K_1 = K_2 = \mathbb{F}_q, \tau = 1 \\ 0 & : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}, \\ & K_1 = K_2 = \mathbb{F}_q, \tau \neq 1 \\ 0 & : a \notin \mathbb{F}_q^* \end{cases}.$$

Beweis: Nach dem obigen Lemma ist für $a \notin \mathbb{F}_q^*$ der Schnitt leer. Im anderen Fall ist

$$V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{12} \in K_1^*, c_{23} \in K_2^*, c_{13} \in K_2 \\ c_{12}^{-2} c_{23}^{-1} \in \tau \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\}.$$

Wir unterscheiden nun die einzelnen Fälle:

1. Fall: $\frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Dann ist $\mathbb{F}_q^*(L^*)^3 = L^*$. Daher ist

$$V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{12} \in K_1^*, c_{23} \in K_2^*, \\ c_{13} \in K_2 \end{array} \right\}$$

und

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| = (|K_1 - 1|)(|K_2 - 1||K_2|).$$

2. Fall: $\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$.

Dann ist $\mathbb{F}_q^*(L^*)^3 = (L^*)^3$ und $[L^* : (L^*)^3] = 3$. Wir unterscheiden weiter folgende Fälle.

2.1.: $K_2 = L$.

Dann enthält die Nebenklasse

$$c_{12}^2 \tau \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 = c_{12}^2 \tau (L^*)^3$$

für jedes $c_{12} \in K_1$ genau $\frac{1}{3}(|L| - 1)$ Elemente. Da c_{23}^{-1} frei aus

$$L^* \cap c_{12}^2 \tau (L^*)^3$$

gewählt werden darf, folgt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| = \frac{1}{3}(|L| - 1)(|K_1| - 1)|L|.$$

Mit $|L| = q^d$ folgt die Aussage.

2.2.: $K_2 = \mathbb{F}_q$

Dann ist auch $K_1 = \mathbb{F}_q$. Folglich ist c_{12} aus \mathbb{F}_q^* , und es gilt

$$c_{12}^2 \tau \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 = \tau (L^*)^3.$$

Im Fall $\tau = 1$ kann c_{23}^{-1} frei aus

$$\mathbb{F}_q^* \cap \tau(L^*)^3 = \mathbb{F}_q^* \cap (L^*)^3 = \mathbb{F}_q^*$$

gewählt werden. Daher ist

$$\begin{aligned} |V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| &= (|\mathbb{F}_q| - 1)^2 |\mathbb{F}_q| \\ &= (q - 1)^2 q. \end{aligned}$$

Falls τ ungleich eins ist, gilt

$$(\mathbb{F}_q^* \cap \tau(L^*)^3) \subset ((L^*)^3 \cap \tau(L^*)^3) = \emptyset.$$

Daher sind \mathbb{F}_q und $\tau(L^*)^3$ disjunkt. Also ist in diesem Fall

$$V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U} = \emptyset.$$

Damit sind alle Fälle gezeigt, und der Satz ist bewiesen. \square

Da für alle M aus \tilde{U} das charakteristische Polynom in $\mathbb{F}_q[x]$ in Linearfaktoren zerfällt, folgen direkt die beiden Sätze

Satz 9.18 Sei

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in W_7(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| = 0.$$

Beweis: Das Polynom $x^2 - \beta x - \alpha$ ist prim und zerfällt daher nicht in Linearfaktoren. \square

Satz 9.19 Sei

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \in W_8(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{U}| = 0.$$

Beweis: Das charakteristische Polynom $x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha$ von V ist prim und zerfällt daher nicht in Linearfaktoren. \square

Indem wir nun die Körper K_1 und K_2 wie am Beginn des Abschnitts beschrieben wählen, erhalten wir Formeln für die Mächtigkeit des Schnitts der Konjugationsklassen mit den entsprechenden Fixgruppen. Diese Formeln werde ich hier nicht angeben, sondern ich verweise auf die entsprechenden Tabellen auf den Seiten 133, 135 und 136.

9.3 Der Schnitt $V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H}$

Sei $\mathbb{F}_q \subset K \subset L$ ein Körperturm. Dann ist

$$\tilde{H} := \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \alpha_{13} \\ m_{21} & m_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \in G(\mathfrak{n}) \mid \begin{array}{l} m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, m_{33} \in \mathbb{F}_q \\ \alpha_{13}, \alpha_{23} \in K \end{array} \right\}$$

eine Untergruppe von $GL(L)$. Je nach Wahl des Körpers K entspricht \tilde{H} den folgenden Gruppen

K	\tilde{H}
\mathbb{F}_q	$\overline{\Gamma_{[0,0],[0,1]}}$
L	$\overline{\Gamma_{[0,d-1]}}$

Ich erinnere wiederum daran, daß außer im Fall Typ=6 und $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ der Typ einer Matrix durch ihr charakteristisches Polynom und ihr Minimalpolynom festgelegt ist. Zudem liegt das charakteristische Polynom einer Matrix aus \tilde{H} immer in $\mathbb{F}_q[x]$. In allen Beweisen werden wir die Blockstruktur der Gruppe \tilde{H} ausnutzen. Zudem werden wir die Konjugationsklassen der $GL(2, \mathbb{F}_q)$ benötigen. Diese sind in [Lan93, S.715] zu finden. Ich gebe sie kurz an:

Klassentyp	Anzahl der Klassen	Elemente je Klasse
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$	$q(q+1)$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$(q-1)$	1
$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$(q-1)$	$(q-1)(q+1)$
$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ $x^2 - \beta x - \alpha \in \mathbb{F}_q[x]_{\text{prim}}$	$\frac{1}{2} q (q-1)$	$q(q-1)$

Satz 9.20 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in W_1(G(\mathbf{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathbf{n})} \cap \tilde{H}| = \begin{cases} 3q(q+1)|\mathbf{K}|^2 & : & a, b, c \in \mathbb{F}_q^* \\ (q-1)q|\mathbf{K}|^2 & : & \begin{array}{l} \phi(V) \in \mathbb{F}_q[x] \text{ hat} \\ \text{Primteiler vom Grad zwei.} \end{array} \\ 0 & : & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Mit den Bezeichnungen wie im Satz gilt:

$$V^{G(\mathbf{n})} \cap \tilde{H} = \{M \in \tilde{H} \mid \phi(M) = (x-a)(x-b)(x-c) \in \mathbb{F}_q[x]\}.$$

Falls $\phi(V)$ nicht in $\mathbb{F}_q[x]$ liegt, ist der Schnitt leer, ansonsten unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Fall: Das charakteristische Polynom $\phi(V)$ zerfällt in $\mathbb{F}_q[x]$ in Linearfaktoren. Dies ist äquivalent dazu, daß a, b, c in \mathbb{F}_q^* liegen. Dann folgt aus der Blockstruktur von \tilde{H} :

$$= \left| \left\{ M = \begin{pmatrix} A & c_{13} \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \in GL(L) \mid \begin{array}{l} A \in GL(2, \mathbb{F}_q), c_{13}, c_{23} \in \mathbf{K}, e \in \mathbb{F}_q^* \\ \phi(M) = (x-a)(x-b)(x-c) \end{array} \right\} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= |\mathbb{K}|^2 \cdot \left| \left\{ A \in GL(2, \mathbb{F}_q) \mid \begin{array}{l} \phi(A) = (x-a)(x-b) \\ \text{oder } \phi(A) = (x-a)(x-c) \\ \text{oder } \phi(A) = (x-b)(x-c) \end{array} \right\} \right| \\
&= 3 |\mathbb{K}|^2 \cdot \left| \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & b \end{array} \right)^{GL(2, \mathbb{F}_q)} \right| \\
&= 3 |\mathbb{K}|^2 (q+1)q.
\end{aligned}$$

2.Fall: Das Polynom $\phi(V)$ besitzt in $\mathbb{F}_q[x]$ einen Primteiler vom Grad 2. O.B.d.A. sind dann $c \in \mathbb{F}_q^*$, $a, b \in L - \mathbb{F}_q$ und $p := (x-a)(x-b)$ ist ein primes Polynom in $\mathbb{F}_q[x]$. Dann gilt :

$$\begin{aligned}
&|V^{G(n)} \cap \tilde{H}| \\
&= \left| \left\{ M = \begin{pmatrix} A & c_{13} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in GL(L) \mid \begin{array}{l} A \in GL(2, \mathbb{F}_q), c_{13}, c_{23} \in \mathbb{K} \\ \phi(M) = (x-a)(x-b)(x-c) \end{array} \right\} \right| \\
&= |\mathbb{K}|^2 \cdot |\{A \in GL(2, \mathbb{F}_q) \mid \phi(A) = p\}| \\
&= |\mathbb{K}|^2 (q^2 - q).
\end{aligned}$$

3.Fall: Das Polynom $\phi(V)$ ist prim in $\mathbb{F}_q[x]$. Da für alle $M \in \tilde{H}$ das charakteristische Polynom $\phi(M)$ eine Nullstelle in \mathbb{F}_q^* besitzt, ist der Schnitt leer. Damit ist die Aussage gezeigt. \square

Satz 9.21 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in W_2(G(n)).$$

Dann gilt

$$|V^{G(n)} \cap \tilde{H}| = \begin{cases} |\mathbb{K}|^2 + |\mathbb{K}|(q^2 + q) & : a, b \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Da $L \mid \mathbb{F}_q$ separabel ist, gilt

$$(x-a)^2(x-b) \in \mathbb{F}_q[x] \iff a, b \in \mathbb{F}_q.$$

Daher ist für $\{a, b\} \not\subset \mathbb{F}_q^*$ der Schnitt leer, und ansonsten gilt

$$\begin{aligned}
V^{G(n)} \cap \tilde{H} &= \left\{ M \in \tilde{H} \mid \begin{array}{l} \phi(M) = (x-a)^2(x-b), \\ \mathfrak{m}(M) = (x-a)(x-b) \end{array} \right\} \\
&= \mathcal{M}_1 \dot{\cup} \mathcal{M}_2
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &:= \left\{ M = \begin{pmatrix} N & c_{13} \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in GL(2, \mathbb{F}_q), c_{13}, c_{23} \in \mathbb{K} \\ \phi(N) = (x-a)^2, \mathfrak{m}(N) = (x-a) \end{array} \right\}, \\
\mathcal{M}_2 &:= \left\{ M = \begin{pmatrix} N & c_{13} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)}, c_{13}, c_{23} \in \mathbb{K} \\ \mathfrak{m}(M) = (x-a)(x-b) \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich direkt, daß

$$|\mathcal{M}_1| = |\mathbb{K}|^2 \left| \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^{GL(2, \mathbb{F}_q)} \right| = |\mathbb{K}|^2$$

ist. Um \mathcal{M}_2 zu berechnen, überlegen wir uns folgendes: Für ein M aus \mathcal{M}_2 ist

$$\begin{aligned} (M - bI) \cdot (M - aI) &= \begin{pmatrix} (N - bI) & \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & a - b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (N - aI) & \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (N - bI)(N - aI) & (N - bI) \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da N das Minimalpolynom $(x - b)(x - a)$ besitzt, ist $(N - bI) \cdot (N - aI)$ die Nullmatrix. Daher ist das obige Produkt genau dann gleich Null, wenn $\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$ im Eigenvektorraum von N , aufgefaßt als Matrix aus $GL(2, \mathbf{K})$, zum Eigenwert b liegt. Da dieser Eigenvektorraum eindimensional ist, ergibt sich

$$|\mathcal{M}_2| = |\mathbf{K}| \left| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)} \right| = |\mathbf{K}| (q^2 + q).$$

Damit folgt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H}| = |\mathbf{K}|^2 + |\mathbf{K}| (q^2 + q).$$

□

Satz 9.22 *Sei*

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in W_3(G(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H}| = \begin{cases} |\mathbf{K}|^2 (q^2 - 1) + (|\mathbf{K}|^2 - |\mathbf{K}|) (q^2 + q) & : a, b \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis des letzten Satzes ist der Schnitt für $\{a, b\} \not\subset \mathbb{F}_q^*$ leer, und für $\{a, b\} \subset \mathbb{F}_q^*$ gilt:

$$V^{G(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H} = \mathcal{M}_1 \dot{\cup} \mathcal{M}_2$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &:= \left\{ M = \begin{pmatrix} N & \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in GL(2, \mathbb{F}_q), c_{13}, c_{23} \in \mathbf{K} \\ \phi(N) = \mathfrak{m}(N) = (x - a)^2 \end{array} \right\}, \\ \mathcal{M}_2 &:= \left\{ M = \begin{pmatrix} N & \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)}, c_{13}, c_{23} \in \mathbf{K} \\ \mathfrak{m}(M) = (x - a)^2 (x - b) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$|\mathcal{M}_1| = |\mathbf{K}|^2 \left| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)} \right| = |\mathbf{K}|^2 \cdot (q^2 - 1).$$

Mit den gleichen Überlegungen wie im Beweis des obigen Satzes ergibt sich

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ M = \begin{pmatrix} N & \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)}, c_{13}, c_{23} \in \mathbf{K} \\ (N - bI) \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Und daher

$$|\mathcal{M}_2| = (|\mathbf{K}|^2 - |\mathbf{K}|) (q^2 + q).$$

Insgesamt ergibt sich

$$|V^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \tilde{H}| = |\mathbf{K}|^2 (q^2 - 1) + (|\mathbf{K}|^2 - |\mathbf{K}|) (q^2 + q)$$

□

Satz 9.23 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_4(\mathbf{G}(\mathbf{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \tilde{H}| = \begin{cases} 1 & : a \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Die Konjugationsklasse von V in $\mathbf{G}(\mathbf{n})$ hat Länge eins.

□

Satz 9.24 Sei

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_5(\mathbf{G}(\mathbf{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \tilde{H}| = \begin{cases} (|\mathbf{K}|^2 - 1) + (q^2 - 1)|\mathbf{K}| & : a \in \mathbb{F}_q^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Für $a \in \mathbb{F}_q$ ist

$$\begin{aligned} & V^{\mathbf{G}(\mathbf{n})} \cap \tilde{H} \\ &= \left\{ M = \begin{pmatrix} N & c_{13} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in GL(2, \mathbb{F}_q), c_{13}, c_{23} \in \mathbf{K} \\ \phi(M) = (x - a)^3, m(M) = (x - a)^2 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ M = \begin{pmatrix} N & c_{13} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in GL(2, \mathbb{F}_q), c_{13}, c_{23} \in \mathbf{K} \\ \phi(N) = (x - a)^2, (M - aI)^2 = 0, (M - aI) \neq 0 \end{array} \right\} \\ &= \mathcal{M}_1 \dot{\cup} \mathcal{M}_2 \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{M}_1 := \left\{ M = \begin{pmatrix} N & c_{13} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)}, c_{13}, c_{23} \in \mathbf{K} \\ (M - aI)^2 = 0, M \neq aI \end{array} \right\}$$

und

$$\mathcal{M}_2 := \left\{ M = \begin{pmatrix} N & c_{13} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} N \in \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)}, c_{13}, c_{23} \in \mathbf{K} \\ (M - aI)^2 = 0, M \neq aI \end{array} \right\}.$$

Nun berechnen wir die Mächtigkeiten dieser beiden Mengen. Da $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{F}_q)$ die Länge eins hat, ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 0 & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{13}, c_{23} \in \mathbb{K} \\ (M - aI)^2 = 0, M \neq aI \end{array} \right\} \\ &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 0 & c_{13} \\ 0 & a & c_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{13}, c_{23} \in \mathbb{K} \\ (c_{13}, c_{23}) \neq (0, 0) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$|\mathcal{M}_1| = |\mathbb{K}|^2 - 1.$$

Kommen wir nun zur Menge \mathcal{M}_2 . Für ein M aus \mathcal{M}_2 gilt

$$\begin{aligned} (M - aI)^2 &= \begin{pmatrix} (N - aI) & \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (N - aI) & \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (N - aI)^2 & (N - aI) \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da N aus $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{F}_q)$ ist, gilt immer $(N - aI)^2 = 0$ und $N \neq aI$. Also ist $(M - aI)^2$ genau dann die Nullmatrix, wenn $\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ im Eigenvektorraum von N , aufgefaßt als Matrix aus $GL(2, \mathbb{K})$, liegt. Dieser ist ein eindimensionaler Unterraum von \mathbb{K}^2 . Daher gibt es $|\mathbb{K}|$ solche Elemente. Daraus folgt

$$|\mathcal{M}_2| = \left| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{F}_q) \right| \cdot |\mathbb{K}| = (q^2 - 1) |\mathbb{K}|.$$

Abschließend ergibt sich

$$|V^{G(n)} \cap \tilde{H}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| = (|\mathbb{K}|^2 - 1) + (q^2 - 1)|\mathbb{K}|.$$

□

Wir zeigen nun ein vorbereitendes Lemma.

Lemma 9.25 Sei τ ein beliebiges Element aus L^* und

$$V = \begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_3(G(n)).$$

Dann gilt

$$|V^{G(n)} \cap \tilde{H}| = (q^2 - 1) \cdot |\mathbb{K}| \cdot |\{b_{23} \in \mathbb{K}^* \mid b_{23} \in \tau^{-2} \mathbb{F}_q^*(L^*)^3\}|$$

Beweis: Aus $a \notin \mathbb{F}_q^*$ folgt $\phi(V) \notin \mathbb{F}_q[x]$ und daher $V^{G(n)} \cap \tilde{H} = \emptyset$. Sei also $a \in \mathbb{F}_q^*$. Aus schreibtechnischen Gründen führen wir

$$Z := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ein. Dann ist unter Beachtung von Satz 8.9

$$\begin{aligned} &V^{G(n)} \cap \tilde{H} \\ &= \left\{ M = \begin{pmatrix} N & c_{13} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{13}, c_{23} \in \mathbb{K}, m(M) = (x - a)^3 \\ \exists T \in GL(L) \text{ mit } T^{-1}MT = Z \\ \text{und } \det(T)\tau^2 \in \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ M = \begin{pmatrix} N & c_{13} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} c_{13}, c_{23} \in \mathbb{K}, m(M) = (x - a)^3 \\ N \in \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{F}_q), \exists T \in GL(L) \text{ mit} \\ T^{-1}MT = Z \text{ und } \det(T)\tau^2 \in \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Die Matrix M hat genau dann das Minimalpolynom $(x - a)^3$, wenn $(M - aI)^3 = 0$ und $(M - aI)^2 \neq 0$ ist. Wie im obigen Beweis ergibt sich

$$(M - aI)^2 = \begin{pmatrix} 0 & (N - aI) \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrat ist also genau dann ungleich Null, wenn $\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix}$ nicht im Eigenraum von N aufgefaßt als Matrix aus $GL(2, \mathbb{K})$ liegt. Für alle $g \in GL(2, \mathbb{F}_q)$ und $v \in \mathbb{K}^2$ gilt

$$v \text{ ist Eigenvektor von } N \iff gv \text{ ist Eigenvektor von } gNg^{-1}.$$

Somit können wir schreiben

$$V^{G(n)} \cap \tilde{H} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} g \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} g^{-1} & g \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & a \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} g \in GL(2, \mathbb{F}_q), \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \notin (\text{EVR}(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}) \cap \mathbb{K}^2) \\ \exists T \in GL(L) \text{ mit } T^{-1}MT = Z \\ \text{und } \det(T)\tau^2 \in \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\}.$$

Der Eigenvektorraum (EVR) von $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{K})$ ist $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{K}}$. Also gilt $\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \notin \text{EVR}(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix})$ genau dann, wenn $c_{23} \neq 0$ ist. Wir müssen entscheiden, ob ein T existiert, daß die obige Bedingung an die Determinante erfüllt. Nach Satz 8.9 genügt es, die Determinante einer speziellen Matrix T mit $T^{-1}MT = Z$ zu untersuchen, da alle anderen Matrizen S mit $S^{-1}MS = Z$ der gleichen Bedingung an ihre Determinante genügen. Wir wählen

$$T = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_{13}c_{23}^{-1} \\ 0 & 0 & c_{23}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$T^{-1} \begin{pmatrix} g \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} g^{-1} & g \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & a \end{pmatrix} T = Z$$

und

$$\det(T) = \frac{\det(g)}{c_{23}}.$$

Unter Berücksichtigung, daß $\det(g)$ in \mathbb{F}_q^* liegt, können wir schreiben

$$V^{G(n)} \cap \tilde{H} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} g \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} g^{-1} & g \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & a \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} g \in GL(2, \mathbb{F}_q), c_{13} \in \mathbb{K} \\ c_{23} \in \mathbb{K}^*, c_{23}^{-1}\tau^2 \in \mathbb{F}_q^*(L^*)^3 \end{array} \right\}.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} |V^{G(n)} \cap \tilde{H}| &= \left| \left(\begin{array}{cc} a & 1 \\ 0 & a \end{array} \right)^{GL(2, \mathbb{F}_q)} \right| \cdot |\mathbb{K}| \cdot |\{b_{23} \in \mathbb{K} \mid b_{23} \in \tau^{-2}\mathbb{F}_q^*(L^*)^3\}| \\ &= (q^2 - 1) |\mathbb{K}| |\{b_{23} \in \mathbb{K}^* \mid b_{23} \in \tau^{-2}\mathbb{F}_q^*(L^*)^3\}|. \end{aligned}$$

□

Ich weise darauf hin, daß im nächsten Satz nicht alle Möglichkeiten abgedeckt werden. Da uns nur die Zwischenkörper \mathbb{F}_q und L von $L \mid \mathbb{F}_q$ interessieren, sind alle nötigen Fälle bearbeitet.

Satz 9.26 Sei

$$\begin{pmatrix} a & & 0 \\ \theta & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in W_6(G(n)).$$

Dann gilt

$$|V^{G(n)} \cap \tilde{H}| = \begin{cases} (q^2 - 1) |K| \cdot (|K| - 1) & : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (q - 1)^2 (q + 1) q & : \begin{array}{l} a \in \mathbb{F}_q^*, K = \mathbb{F}_q \\ \tau = 1, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \\ 0 & : \begin{array}{l} a \in \mathbb{F}_q^*, K = \mathbb{F}_q \\ \tau \neq 1, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \\ \frac{1}{3} (q^2 - 1) q^d (q^d - 1) & : \begin{array}{l} a \in \mathbb{F}_q^*, K = L \\ \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \\ 0 & : a \notin \mathbb{F}_q^* \end{cases} .$$

Beweis: Aufgrund des gerade gezeigten Lemmas müssen wir lediglich noch die Mächtigkeit der Menge

$$\{b_{23} \in K^* \mid b_{23} \in \tau^{-2} \mathbb{F}_q^* (L^*)^3\}$$

in den unterschiedlichen Fällen berechnen.

1. Fall: $\frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3}$. Dann ist $\mathbb{F}_q^* (L^*)^3$ gleich L^* . Es ergibt sich

$$\{b_{23} \in K^* \mid b_{23} \in \tau^{-2} \mathbb{F}_q^* (L^*)^3\} = \{b_{23} \in K^* \mid b_{23} \in L^*\} = K^* .$$

und damit

$$|\{b_{23} \in K^* \mid b_{23} \in \tau^{-2} \mathbb{F}_q^* (L^*)^3\}| = |K^*| .$$

2. Fall: $\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$. Dies ist äquivalent zu

$$[L^* : (L^*)^3] = 3 \text{ und } \mathbb{F}_q^* \subset (L^*)^3 .$$

Daher ist

$$\{b_{23} \in K^* \mid b_{23} \in \tau^{-2} \mathbb{F}_q^* (L^*)^3\} = \{b_{23} \in K^* \mid b_{23} \in \tau^{-2} (L^*)^3\} = K^* \cap \tau^{-2} (L^*)^3 .$$

Weiter folgt in diesem Fall aus $V \in W_6(G(\mathfrak{n}))$, daß τ entweder die 1 oder ein Erzeuger von L^* ist. Wir betrachten die Möglichkeiten $K = \mathbb{F}_q$ und $K = L$ einzeln.

- (i) $\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ und $K = \mathbb{F}_q$.
Falls τ ein Erzeuger von L^* ist, ist

$$\tau^{-2} (L^*)^3 = \{\tau^{3k-2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$\mathbb{F}_q = \left\{ \tau^l \mid l \equiv 0 \pmod{\frac{q^d - 1}{q - 1}} \right\} .$$

Da $\frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ ist, sind diese beiden Mengen disjunkt. Falls τ kein Erzeuger von L^* ist, ist nach unseren obigen Überlegungen τ bereits gleich eins. Und da \mathbb{F}_q^* eine Teilmenge von $(L^*)^3$ ist, folgt

$$\mathbb{F}_q^* \cap \tau^{-2} (L^*)^3 = \begin{cases} \mathbb{F}_q^* & : \tau = 1 \\ \emptyset & : \text{sonst} \end{cases} .$$

Daher ist

$$|\{b_{23} \in \mathbb{K}^* \mid b_{23} \in \tau^{-2}\mathbb{F}_q^*(L^*)^3\}| = |\mathbb{F}_q^* \cap \tau^{-2}(L^*)^3| = \begin{cases} (q-1) & : \tau = 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

(ii) $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ und $\mathbb{K} = L$.
Es ist

$$|L \cap \tau^{-2}(L^*)^3| = |\tau^{-2}(L^*)^3| = \frac{1}{3}(q^d - 1).$$

Folglich gilt in diesem Fall

$$|\{b_{23} \in \mathbb{K}^* \mid b_{23} \in \tau^{-2}\mathbb{F}_q^*(L^*)^3\}| = \frac{1}{3}(q^d - 1).$$

Indem wir die berechneten Mächtigkeiten in die Formel aus Lemma 9.25 einsetzen, erhalten wir die Aussage des Satzes.

Satz 9.27 Sei

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in W_7(\mathbb{G}(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{\mathbb{G}(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H}| = \begin{cases} (q^2 - q) |\mathbb{K}|^2 & : \alpha, c \in \mathbb{F}_q^*, \beta \in \mathbb{F}_q \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Für alle $M \in V^{\mathbb{G}(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H}$ liegt $\phi(M)$ in $\mathbb{F}_q[x]$ und hat aufgrund der Gestalt von \tilde{H} eine Nullstelle in \mathbb{F}_q^* . Da $x^2 - \beta x - \alpha$ prim in $L[x]$ ist, muß c diese Nullstelle sein. Dann liegt auch $x^2 - \beta x - \alpha = \frac{\phi(M)}{x-c}$ in $\mathbb{F}_q[x]$. Also ist für $\{\alpha, \beta, c\} \not\subset \mathbb{F}_q$ der Schnitt leer. Im Fall $\{\alpha, \beta, c\} \subset \mathbb{F}_q$ folgt

$$V^{\mathbb{G}(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} N & b_{13} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid N \in \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)} \right. \right. \\ \left. \left. b_{13}, b_{23} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Offenbar ist dann

$$|V^{\mathbb{G}(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H}| = \left| \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}^{GL(2, \mathbb{F}_q)} \right| \cdot |\mathbb{K}|^2 = (q^2 - q) |\mathbb{K}|^2.$$

□

Da ein primes Polynom aus $L[x]$ keine Nullstelle in \mathbb{F}_q hat, folgt abschließend

Satz 9.28 Sei

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \in W_8(\mathbb{G}(\mathfrak{n})).$$

Dann gilt

$$|V^{\mathbb{G}(\mathfrak{n})} \cap \tilde{H}| = 0$$

Beweis: Klar. □

Indem wir die Ergebnisse dieses Abschnitts auf die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ und $\mathbb{K} = L$ spezialisieren, erhalten wir die Tabellen auf den Seiten 133 und 134.

9.4 Die Funktion θ

Wir müssen noch die Mächtigkeiten der Schnitte von Konjugationsklassen mit den Untergruppen

$$\overline{\Gamma_{(0,0)(1,1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in GL(L) \mid \text{alle } m_{ij} \in \mathbb{F}_q \right\},$$

$$\overline{\Gamma_{(d-1,d-1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in GL(L) \mid \begin{array}{l} \text{alle } m_{ij} \in \mathbb{F}_q \\ \alpha_{12}, \alpha_{13} \in L \end{array} \right\}$$

und

$$\overline{\Gamma_{(d-1,d-1)(d-1,d)}} = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \in GL(L) \mid \begin{array}{l} \text{alle } m_{ij} \in \mathbb{F}_q \\ \alpha_{12}, \alpha_{13} \in L \end{array} \right\}$$

berechnen. Die Blockstruktur dieser Gruppen legt nahe, daß dies auf die Berechnung der Schnitte mit den Gruppen

$$\overline{\Gamma_{(0,0)(0,1)}}, \quad \overline{\Gamma_{(0,d-1)}}, \quad \overline{\Gamma_{(0,d-1)(1,d)}}$$

zurückgeführt werden kann. Dazu betrachten wir folgende Bijektion

$$\begin{aligned} \theta : GL(L) &\rightarrow GL(L) \\ A &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Abbildung θ ist ein Anti-Homomorphismus, d.h. für alle $A, B \in GL(L)$ ist

$$\theta(A \cdot B) = \theta(B) \cdot \theta(A).$$

Es ist

$$\theta^2 = id,$$

und da Konjugation und Transposition die Determinante nicht ändern, ist

$$\theta(G(\mathfrak{n})) = G(\mathfrak{n}).$$

Bemerkung: Indem eine Matrix A auf $\theta(A)^{-1}$ abgebildet wird, erhält man einen "normalen" Homomorphismus von $GL(L)$ nach $GL(L)$. Dieser ist aber für unsere Zwecke nicht sinnvoll, da das Invertieren das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom verändert.

Für eine beliebige Matrix $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ ist

$$\theta(A) = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \theta(\overline{\Gamma_{(0,0)(0,1)}}) &= \overline{\Gamma_{(0,0)(1,1)}} \\ \theta(\overline{\Gamma_{(0,d-1)}}) &= \overline{\Gamma_{(d-1,d-1)}} \\ \theta(\overline{\Gamma_{(0,d-1)(1,d)}}) &= \overline{\Gamma_{(d-1,d-1)(d-1,d)}}. \end{aligned}$$

Lemma 9.29 Seien M, N Matrizen aus $G(\mathfrak{n})$. Dann sind M und N genau dann in $G(\mathfrak{n})$ konjugiert, wenn $\theta(M)$ und $\theta(N)$ in $G(\mathfrak{n})$ konjugiert sind.

Beweis: Da $\theta^2 = id$ ist, reicht es, eine Richtung der Äquivalenz zu zeigen. Seien $M, N, A \in G(\mathfrak{n})$ mit $M = A^{-1} \cdot N \cdot A$. Da θ ein Anti-Homomorphismus ist, ist

$$\begin{aligned}\theta(M) &= \theta(A^{-1} \cdot N \cdot A) \\ &= \theta(A) \cdot \theta(N) \cdot \theta(A^{-1}) \\ &= \theta(A^{-1})^{-1} \cdot \theta(N) \cdot \theta(A^{-1}).\end{aligned}$$

Also sind $\theta(M)$ und $\theta(N)$ durch $\theta(A^{-1})$, das ebenfalls in $G(\mathfrak{n})$ liegt, konjugiert. \square

Aus der Injektivität von θ folgt für beliebige Mengen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2

$$\theta(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) = \theta(\mathcal{M}_1) \cap \theta(\mathcal{M}_2).$$

Also ergibt sich insgesamt für ein beliebiges M aus $G(\mathfrak{n})$ und eine der obigen Fixgruppen F

$$|M^{G(\mathfrak{n})} \cap F| = |\theta(M^{G(\mathfrak{n})} \cap F)| = |\theta(M)^{G(\mathfrak{n})} \cap \theta(F)|.$$

Wir müssen also untersuchen, wie sich die Konjugationsklassen, bzw. ihre Vertreter aus $W(G(\mathfrak{n}))$, unter der Abbildung θ verhalten.

Lemma 9.30 Sei M eine Matrix aus $G(\mathfrak{n})$. Weiter sei $\text{Typ}(M) \neq 6$ oder $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$. Dann gilt

$$\theta(M^{G(\mathfrak{n})}) = M^{G(\mathfrak{n})}.$$

Beweis: In den angegebenen Fällen ist die Konjugationsklasse einer Matrix M durch $m(M)$ und $\phi(M)$ festgelegt. Da Konjugation und Transposition das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom einer Matrix nicht ändern, sind die angegebenen Konjugationsklassen invariant unter der Bijektion θ . \square

Im anderen Fall gilt:

Lemma 9.31 Sei $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ und $L^* = \langle \varepsilon \rangle$. Dann sind

(i)

$$\theta\left(\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(\mathfrak{n})}\right) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(\mathfrak{n})},$$

(ii)

$$\theta\left(\begin{pmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(\mathfrak{n})}\right) = \begin{pmatrix} a & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(\mathfrak{n})},$$

(iii)

$$\theta\left(\begin{pmatrix} a & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(\mathfrak{n})}\right) = \begin{pmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{G(\mathfrak{n})}.$$

Beweis: Es genügt, die Wirkung von θ auf den Vertretermatrizen

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

zu betrachten. Um alle drei Fälle simultan zu betrachten, führen wir eine Variable τ ein mit $\tau \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$. Dann ist

$$\theta\left(\begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & \tau \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Wir müssen entscheiden, in welcher Konjugationsklasse das Bild des Vertreters liegt. Wählen wir noch ein σ aus $\{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$, so gilt nach Satz 8.9

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & \tau \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a & \sigma & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{\text{G}(n)}$$

genau dann, falls eine Matrix $T \in GL(L)$ existiert mit

$$T^{-1} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & \tau \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

deren Determinante in $\sigma(L^*)^3$ liegt. Die Berechnung der Jordanschen-Normalform in $GL(L)$ liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & \tau \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

und daher gilt

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & \tau \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a & \sigma & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{\text{G}(n)} \iff \tau^{-1} \in \sigma(L^*)^3.$$

Aus $\tau = 1$ folgt daher $\sigma = 1$, aus $\tau = \varepsilon$ ergibt sich $\sigma = \varepsilon^2$ und $\tau = \varepsilon^{-1}$ liefert $\sigma = \varepsilon$. Damit ist gezeigt, daß die Vertreter durch θ in die angegebenen Konjugationsklassen abgebildet werden. Es folgt die Behauptung. \square

Wir können also zusammenfassen:

Satz 9.32 Für alle M aus $\text{G}(n)$ gilt unabhängig von q und d

$$(i) \quad |M^{\text{G}(n)} \cap \overline{\Gamma_{(0,0)(0,1)}}| = |M^{\text{G}(n)} \cap \overline{\Gamma_{(0,0)(1,1)}}|,$$

$$(ii) \quad |M^{\text{G}(n)} \cap \overline{\Gamma_{(0,d-1)}}| = |M^{\text{G}(n)} \cap \overline{\Gamma_{(d-1,d-1)}}|,$$

$$(iii) \quad |M^{\text{G}(n)} \cap \overline{\Gamma_{(0,d-1)(1,d)}}| = |M^{\text{G}(n)} \cap \overline{\Gamma_{(d-1,d-1)(d-1,d)}}|.$$

Beweis: Wir haben gesehen, daß für eine beliebige Untergruppe F gilt

$$|M^{\text{G}(n)} \cap F| = |\theta(M^{\text{G}(n)}) \cap \theta(F)|.$$

Die in derselben Gleichung vorkommenden Fixgruppen werden durch θ auf einander abgebildet. Zudem sind, außer im Fall $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ und $\text{Typ}(M) = 6$, die Konjugationsklassen stabil unter θ . Daraus folgt die Aussage in den entsprechenden

Fällen. Im Fall $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ und $\text{Typ}(M) = 6$ ist die Konjugationsklasse der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

fest unter θ . Daher gilt auch hier die Aussage. Die Konjugationsklassen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

werden durch θ vertauscht. Da für alle Fixgruppen

$$F \in \{\overline{\Gamma_{(0,0)(0,1)}}, \overline{\Gamma_{(0,d-1)}}, \overline{\Gamma_{(d-1,d-1)}}\}$$

gilt

$$\left| \begin{pmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{\text{G}(\mathfrak{n})} \cap F \right| = \left| \begin{pmatrix} a & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{\text{G}(\mathfrak{n})} \cap F \right|,$$

ergibt sich dies auch für die Bilder unter θ . Damit ist die Aussage gezeigt. \square

Die Mächtigkeiten der Schnitte können also an den Tabellen auf den Seiten 133, 134 und 135 abgelesen werden.

Zusammenfassung: Der Satz 6.3 besagt, daß die alternierende Summe der Charaktere der Darstellungen auf den Homologiegruppen mit der alternierenden Summe der Charaktere der Darstellungen auf den Kettengruppen übereinstimmt. Im Fall des Simplizialkomplexes $\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n})$ sind nach Satz 6.10 nur die Charaktere zu bestimmten Simplexes aus \mathcal{W}^{d-1} relevant. Wie auf Seite 6.2 beschrieben, sind aufgrund der Ergebnisse dieses Kapitels für ein primes \mathfrak{n} manche dieser Charaktere gleich, so daß wir die Formel aus Satz 6.13 erhalten. Die Charaktere auf den Simplexes aus \mathcal{W} können wir mit Satz 6.6 auswerten. Für primes \mathfrak{n} wurden in den letzten Kapiteln die auftretenden Mächtigkeiten der Konjugationsklassen und der Schnitte mit den relevanten Fixgruppen berechnet und in Tabellen zusammengefaßt. Wir können also für ein primes \mathfrak{n} die alternierende Summe der Charaktere von $\text{G}(\mathfrak{n})$ auf den $H_i(\mathcal{B}_{d-1}(\mathfrak{n}))$ explizit berechnen.

Es bezeichnen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ Elemente aus L , und ε sei ein fest gewählter Erzeuger der Gruppe L^* .

<i>Typ</i>	$V \in W_i(G(n))$	<i>Elemente in</i> $V^{G(n)} \cap GL(\mathbb{F}_q)$
1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} a \neq b \neq c \neq a \\ a, b, c \in \mathbb{F}_q^* \end{array}$	$(q-1)^2 q^3 (q+1) \quad : \quad \phi(V) \in \mathbb{F}_q[x] \text{ prim}$ $(q-1)q^3(q^2+q+1) \quad : \quad \begin{array}{l} \phi(V) \in \mathbb{F}_q[x] \\ \text{hat Primteiler vom Grad zwei.} \end{array}$ $q^3(q+1)(q^2+q+1) \quad : \quad a, b, c \in \mathbb{F}_q$ $0 \quad : \quad \text{sonst}$
2	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$q^2(q^2+q+1) \quad : \quad a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 \quad : \quad \text{sonst}$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)q^2(q+1)(q^2+q+1) \quad : \quad a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 \quad : \quad \text{sonst}$
4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$1 \quad : \quad a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 \quad : \quad \text{sonst}$
5	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)(q+1)(q^2+q+1) \quad : \quad a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 \quad : \quad \text{sonst}$
6	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)^2 q (q+1)(q^2+q+1) \quad : \quad a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 \quad : \quad \text{sonst}$
	$\begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \tau \in \{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\} \\ a^3 \in \mathbb{F}_q^* \end{array}$	$0 \quad : \quad \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ <i>nicht definiert</i> $: \quad \text{sonst}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim} \\ -\alpha \cdot c \in \mathbb{F}_q^* \end{array}$	$(q-1)q^3(q^2+q+1) \quad : \quad \alpha, c \in \mathbb{F}_q^*, \beta \in \mathbb{F}_q$ $0 \quad : \quad \text{sonst}$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim} \\ \alpha \in \mathbb{F}_q^* \end{array}$	$(q-1)^2 q^3 (q+1) \quad : \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_q^*$ $0 \quad : \quad \text{sonst}$

<i>Typ</i>	$V \in W_i(G(n))$	<i>Elemente in</i> $V^{G(n)} \cap \overline{\Gamma}_{[0,d-1]}$
1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a \neq b \neq c \neq a \\ a \cdot b \cdot c \in \mathbb{F}_q^* \end{matrix}$	$(q-1)q^{2d+1} : \begin{matrix} \phi(V) \in \mathbb{F}_q[x] \\ \text{hat Primteiler vom Grad zwei.} \end{matrix}$ $3q^{2d+1}(q+1) : a, b, c \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
2	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$q^{2d} + q^{d+2} + q^{d+1} : a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$2q^{2d+2} + q^{2d+1} - q^{2d} - q^{d+2} - q^{d+1} : a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$1 : a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
5	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q^{2d} - 1) + (q^2 - 1)q^d : a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
6	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q^2 - 1)(q^d - 1)q^d : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $\frac{1}{3}(q^2 - 1)(q^d - 1)q^d : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ $0 : \text{sonst}$
	$\begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \tau \in \{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\} \\ a^3 \in \mathbb{F}_q^* \end{matrix}$	$\frac{1}{3}(q-1)(q^d-1)q^d : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ $0 : a \notin \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ <i>nicht definiert</i> : $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim} \\ -\alpha \cdot c \in \mathbb{F}_q^* \end{matrix}$	$(q-1)q^{2d+1} : \alpha, c \in \mathbb{F}_q^*, \beta \in \mathbb{F}_q$ $0 : \text{sonst}$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim} \\ \alpha \in \mathbb{F}_q^* \end{matrix}$	0

<i>Typ</i>	$V \in W_i(G(n))$	<u>Elemente in</u> $V^{G(n)} \cap \Gamma_{[d-1, 2d-2]}$
1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c \neq a$ $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{F}_q^*$	$6 q^{3d} : a, b, c \in \mathbb{F}_q$ $0 : \text{sonst}$
2	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$3 q^{2d} : a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$3 q^{2d}(q^d - 1) : a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$1 : a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
5	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(2q^d + 1)(q^d - 1) : a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
6	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$q^d(q^d - 1)^2 : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $\frac{1}{3}q^d(q^d - 1)^2 : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ $0 : \text{sonst}$
	$\begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\tau \in \{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$\frac{1}{3}q^d(q^d - 1)^2 : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ $0 : a \notin \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d - 1}{q - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ <i>nicht definiert</i> : $\frac{q^d - 1}{q - 1} \not\equiv 0 \pmod{3}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim}$ $-\alpha \cdot c \in \mathbb{F}_q^*$	0
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ $x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim}$ $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$	0

<i>Typ</i>	$V \in W_i(G(n))$	<i>Elemente in</i> $V^{G(n)} \cap \Gamma_{[0,0][0,1]}$
1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c \neq a$ $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)q^3$: $\phi(V) \in \mathbb{F}_q[x]$ hat Primteiler vom Grad zwei. $3q^3(q+1)$: $a, b, c \in \mathbb{F}_q^*$ 0 : <i>sonst</i>
2	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$q^3 + 2q^2$: $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ 0 : <i>sonst</i>
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$2q^4 - 2q^2$: $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ 0 : <i>sonst</i>
4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	1 : $a \in \mathbb{F}_q^*$ 0 : <i>sonst</i>
5	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)(q+1)^2$: $a \in \mathbb{F}_q^*$ 0 : <i>sonst</i>
6	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)^2 q(q+1)$: $a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $(q-1)^2 q(q+1)$: $a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ 0 : <i>sonst</i>
	$\begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\tau \in \{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	0 : $\frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ <i>nicht definiert</i> : $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim}$ $-\alpha \cdot c \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)q^3$: $\alpha, c \in \mathbb{F}_q^*, \beta \in \mathbb{F}_q$ 0 : <i>sonst</i>
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ $x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim}$ $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$	0

<i>Typ</i>	$V \in W_i(G(n))$	$\frac{\text{Elemente in}}{V^{G(n)} \cap \Gamma_{[0,d-1][1,d]}}$
1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a \neq b \neq c \neq a \\ a, b, c \in \mathbb{F}_q^* \end{matrix}$	$6q^{2d+1} : a, b, c \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
2	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$q^{2d} + 2q^{d+1} : a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$3q^{2d+1} - q^{2d} - 2q^{d+1} : a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$1 : a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
5	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$q^{2d} + q^{d+1} - q^d - 1 : a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
6	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)(q^d-1)q^d : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $\frac{1}{3}(q-1)(q^d-1)q^d : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ $0 : \text{sonst}$
	$\begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \tau \in \{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\} \\ a^3 \in \mathbb{F}_q^* \end{matrix}$	$\frac{1}{3}(q-1)(q^d-1)q^d : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ $0 : a \notin \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ $\text{nicht definiert} : \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim} \\ -\alpha \cdot c \in \mathbb{F}_q^* \end{matrix}$	0
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim} \\ \alpha \in \mathbb{F}_q^* \end{matrix}$	0

<i>Typ</i>	$V \in W_i(G(n))$	<i>Elemente in</i> $V^{G(n)} \cap \Gamma_{[0,0][0,1][1,1]}$
1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c \neq a$ $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{F}_q^*$	$6q^3 : a, b, c \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
2	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$3q^2 : a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $a \neq b, a^2 \cdot b \in \mathbb{F}_q^*$	$3(q-1)q^2 : a, b \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$1 : a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
5	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)(2q+1) : a \in \mathbb{F}_q^*$ $0 : \text{sonst}$
6	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$(q-1)^2q : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$ $(q-1)^2q : a \in \mathbb{F}_q^*, \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ $0 : \text{sonst}$
	$\begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\tau \in \{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ $a^3 \in \mathbb{F}_q^*$	$0 : \frac{q^d-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{3}$ <i>nicht definiert</i> : $\frac{q^d-1}{q-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim}$ $-\alpha \cdot c \in \mathbb{F}_q^*$	0
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ $x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha \text{ prim}$ $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$	0

Symbolverzeichnis

$\begin{pmatrix} * & \{i\} & \{j\} \\ 0 & * & \{k\} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$		36
A	das Standardapartment,	17
A_B	Apartment zur Basis B ,	16
$Aut_k(V)$	Gruppe der k -Automorphismen eines k -Vektorraums V ,	67
$B(R)$	obere 3×3 Dreiecksmatrizen über R ,	14
\mathcal{B}	das Bruhat-Tits-Gebäude zur $SL(\mathcal{K})$,	16
\mathcal{B}_{GL}	das Bruhat-Tits-Gebäude zur GL ,	16
$\mathcal{B}(\mathfrak{n})$	der Quotient $\Gamma(\mathfrak{n}) \backslash \mathcal{B}$,	58
$\mathcal{B}_i(\mathfrak{n})$	endlicher Unterkomplex von $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$,	62
(C_i, δ_i)	Kettenkomplex,	7
C_i	i -te Kettengruppe,	7
$C_i(\mathcal{D})$	i -te Kettengruppe zu \mathcal{D} ,	7
$C_k(\mathcal{D}, \mathcal{E})$	k -te relative Kettengruppe zum Paar $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$,	11
$\mathcal{C}_{00}, \mathcal{C}_{01}, \mathcal{C}_{02}$	die Standardknoten,	16
$\mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{12}$	die Standardkanten,	16
\mathcal{C}_2	der Standard-2-Simplex,	17
$\dim(\mathcal{S})$	Dimension eines Simplex,	5
$\dim(\mathcal{D})$	Dimension eines Simplizialkomplexes,	5
d	Grad von \mathfrak{n} ,	14
$d(s, t)$	Abstand zwischen 2-Simplizes,	21
$\widetilde{\det}$		96
$diag(a, b, c)$	3×3 Diagonalmatrix mit Einträgen a, b, c ,	14
$DIAG(\mathbb{R})$	Gruppe der Diagonalmatrizen in $GL(\mathbb{R})$,	14
\mathcal{D}	Simplizialkomplex,	5
\mathcal{D}^{or}	orientierter Simplizialkomplex,	6
$\mathcal{D} \xrightarrow{1} \mathcal{E}$	elementarer Zusammenbruch,	10
$\mathcal{D} \searrow \mathcal{E}$	Zusammenbruch,	12
$(\mathcal{D}, \mathcal{E})$	simpliziales Paar,	10
δ_i	i -te Randabbildung,	7, 8
$E_k(M)$	alternierende Summe der Charaktere auf $\mathcal{B}_k(\mathfrak{n})$	82
$Eu(\mathcal{D})$	Euler-Charakteristik eines Simplizialkomplexes,	9
$f \otimes g$	Tensor von Homomorphismen,	9
\mathbb{F}_q	der endliche Körper mit $q = p^f$ Elementen,	14
$\mathbb{F}_q[T]$	Polynomring über \mathbb{F}_q ,	14

g^G	die Menge der zu g mit Elementen aus G konjugierten Elemente,	67
$G(\mathfrak{n})$	die Gruppe $\Gamma/\Gamma(\mathfrak{n})$,	60
$GL(R)$	Gruppe der invertierbaren 3×3 Matrizen über R ,	14
GL^0		18
GL^+		18
$G \otimes H$	Tensor von abelschen Gruppen,	8
Γ	$GL(\mathbb{F}_q[T])$	14
$\Gamma_{[j,k]}$	$Fix_{\Gamma}(L_{0,j,k})$,	37
$\Gamma_{[j,k]}^B$	$Fix_{B(\mathbb{F}_q[T])}(L_{0,j,k})$,	37
$\Gamma(\mathfrak{n})$	die Hauptkongruenzuntergruppe zu \mathfrak{n} ,	54
$\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{B}$	Quotienten-Seitenkomplex,	52
\tilde{H}		119
$H_i(C)$	i -te Homologiegruppe eines Kettenkomplexes,	7
$H_i(\mathcal{D})$	i -te Homologiegruppe eines Simplicialkomplexes,	8
$H_k(\mathcal{D}, \mathcal{E})$	k -te relative Homologiegruppe,	10
$H_k(\mathcal{D}, \mathbb{C})$	Homologiegruppe von \mathcal{D} über \mathbb{C} ,	10
$[j, k]$	Gitterklasse von $L_{0,j,k}$,	36
$[i, j, k]$	Gitterklasse von $L_{i,j,k}$,	16
I	Kapitel 2 bis 4: die Standard-Iwahorigruppe, Kapitel 5 bis 9: die Einheitsmatrix,	22 83
$k[G]$	Gruppenalgebra einer Gruppe G über einem Körper k ,	67
K	$\mathbb{F}_q(T)$,	14
\mathcal{K}	$\mathbb{F}_q((\pi))$,	15
$[L]$	die Gitterklasse von L ,	15
$L_{i,j,k}$	$\langle \pi^i e_1, \pi^j e_2, \pi^k e_3 \rangle_{\mathcal{O}}$,	16
L	Kapitel 2 bis 4: \mathcal{O} -Gitter Kapitel 5 bis 9: Erweiterungskörper von \mathbb{F}_q vom Grad d ,	15 92
$(L^*)^3$	Menge der dritten Potenzen von Elementen aus L^* ,	93
$\mathcal{LK}_{\mathcal{D}}(\mathcal{S})$	Link eines Simplex \mathcal{S} in \mathcal{D} ,	6
$m(M)$	das Minimalpolynom der Matrix M ,	83
$MON(R)$	monomiale Matrizen in $GL(R)$,	14
\mathfrak{n}	ein Polynom aus $\mathbb{F}_q[T]$, ist in den Kapiteln 8, 9 prim.	14
\tilde{N}	$MON(\mathcal{K}) \cap GL^0(\mathcal{K})$,	27
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null,	14
$\mathfrak{N}_w(\mathcal{B})$	Menge der Simplexes vom Niveau w in \mathcal{B} ,	52
$\mathfrak{N}_{w^+}(\mathfrak{n})$	Menge der positiv orientierten Simplexes vom Niveau w in $\mathcal{B}(\mathfrak{n})$,	73
$ord(\mathcal{S})$	Ordnung eines Simplex,	6
$ord(\mathcal{D})$	Ordnung eines Simplicialkomplex \mathcal{D} ,	6
$or(\mathcal{S})$	Menge der Orientierungen eines Simplex \mathcal{S} ,	6
\mathcal{O}	$\mathbb{F}_q[[\pi]]$,	15

P_1, P_2	die Standard-Parahorigruppen,	22
$\phi(M)$	das charakteristische Polynom der Matrix M ,	83
ψ_k^j	Seitenabbildung des Quotienten $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{B}$,	52
ϕ_j^i	eine Seitenabbildung,	49
π	die Uniformisierende T^{-1} bzgl. der Gradbewertung,	15
Rp	das kanonische Vertretersystem von $\Gamma/\Gamma(\mathfrak{n})$	56
$\rho_{(i,k)}$	Permutationsdarstellung auf $C_i(\mathcal{B}_k(\mathfrak{n}), \mathbb{C})$	73
$\rho_{(i,k)}^H$	Permutationsdarstellung auf $H_i(\mathcal{B}_k(\mathfrak{n}), \mathbb{C})$	75
$s \sim t$	die 2-Simplizes s und t sind benachbart,	21
s^+	positiv orientierter Simplex,	6
s^-	negativ orientierter Simplex,	6
S_3	Gruppe der Permutationsmatrizen in $GL(R)$,	14
$SL(R)$		14
$S(\mathcal{D})$	Menge aller Simplizes in \mathcal{D} ,	5
$S_i(\mathcal{D})$	Menge aller i -Simplizes in \mathcal{D} ,	5
$S_i^+(\mathcal{B})$	Menge der positiv orientierten i -Simplizes in \mathcal{B}	73
$S_i^-(\mathcal{B})$	Menge der negativ orientierten i -Simplizes in \mathcal{B}	73
$S_i^{or}(\mathcal{B})$	Menge aller orientierten i -Simplizes in \mathcal{B}	73
$\hat{S} < \mathcal{S}$	\hat{S} ist Seite von Simplex \mathcal{S} ,	5
$\Sigma(W, S)$	Coxeterkomplex,	34
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Erzeuger der Weylgruppe W ,	25
$Tr(M)$	Spur eines Endomorphismus M ,	69
$Typ([L])$	Typ einer Gitterklasse $[L]$,	18
$Typ(s)$	Typ eines Simplex s ,	18
$Typ(M)$	Konjugationstyp einer Matrix M aus GL ,	85
θ		128
\tilde{U}		113
Υ	ein Seitenkomplex,	49
$v(\frac{f}{g})$	die Gradbewertung,	14
$V(\mathcal{D})$	Knotenmenge eines Simplicialkomplexes,	5
$W_i(GL)$	Menge der Vertretermatrizen vom Typ i der Konjugationsklassen in $GL(\mathbb{F}_n)$,	84
$W(GL)$	Menge aller Vertretermatrizen der Konjugationsklassen in $GL(\mathbb{F}_n)$,	85
$W_i(G(\mathfrak{n}))$	Menge der Vertretermatrizen vom Typ i der Konjugationsklassen in $G(\mathfrak{n})$,	95
$W(G(\mathfrak{n}))$	Menge aller Vertretermatrizen der Konjugationsklassen in $G(\mathfrak{n})$,	95

W	die Weylgruppe,	25
W_B	Weylkammer zur Basis B ,	16
\mathcal{W}	die Standardweylkammer,	17
\mathcal{W}_i	endlicher Unterkomplex von \mathcal{W} ,	62
\mathcal{W}^n	n -fache Kopie von \mathcal{W} ,	54
χ_ρ	Charakter zur Darstellung ρ	69
$\chi_U, \chi_{\rho,U}$	Charakter der Einschränkung von ρ auf den G -Modul U	69
$\chi(C_i)$	Charakter der Darstellung auf $C_i(\mathcal{D}, \mathbb{C})$,	70
$\chi(H_i(\mathcal{D}, \mathbb{C}))$	Charakter der Darstellung auf $H_i(\mathcal{D}, \mathbb{C})$,	71
$\chi_{(i,k)}$	Charakter zur Darstellung $\rho_{(i,k)}$,	73
$\chi_{(i,k)}^H$	Charakter zur Darstellung $\rho_{(i,k)}^H$,	75
$\chi_i(w^+)$	Charakter zur Darstellung auf $\langle \mathfrak{N}_{w^+}(\mathfrak{n}) \rangle_{\mathbb{C}}$,	73
$\chi_0(i, j)$	Charakter auf Simplizes vom Niveau $[i, j]$,	76
$\chi_1 \begin{pmatrix} i, j \\ k, l \end{pmatrix}$	Charakter auf Simplizes vom Niveau $\{[i, j], [k, l]\}$,	76
$\chi_2 \begin{pmatrix} i, j \\ k, l \\ m, n \end{pmatrix}$	Charakter auf Simplizes vom Niveau $\{[i, j], [k, l], [m, n]\}$,	76
$Z(\mathbb{R})$	Zentrum der $GL(\mathbb{R})$,	14
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen,	14
$Z_G(H)$	Zentralisator der Teilmenge H einer Gruppe G .	83

Literaturverzeichnis

- [Bro89] K.S. Brown. *Buildings*. Springer, 1989.
- [Gib77] P.J. Giblin. *Graphs, Surfaces and Homology*. Chapman and Hall, 1977.
- [HW60] P.J. Hilton and S. Wylie. *Homolgy Theory*. Cambridge University Press, 1960.
- [Lam68] K. Lamotke. *Semisimpliziale algebraische Topologie*. Springer, 1968.
- [Lan93] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, third edition, 1993.
- [Mig91] M. Mignotte. *Mathematics for Computer Algebra*. Springer, 1991.
- [Non94] U. Nonnengardt. Arithmetisch definierte Graphen über rationalen Funktionenkörpern. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1994.
- [Ron89] M. Ronen. *Lectures on Buildings*. ACADEMIC PRESS, INC., 1989.
- [Spa66] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966.

Seite entfernen. Ist diese Seite rechts?