

Universität des Saarlandes  
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät I  
Fachrichtung Mathematik

**Masterarbeit**  
**Nullstellen von Eisensteinreihen**  
**zu Hauptkongruenzuntergruppen**  
**von  $SL_2(\mathbb{Z})$**

vorgelegt von  
Karl Bringmann  
am 10.08.2011

Angefertigt unter der Leitung  
und betreut von  
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler

Begutachtet von  
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler  
Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot-Ziemen

# Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 10.08.2011

---

(Unterschrift)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Funktionentheorie . . . . .	7
2.2	Modulformen . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Nullstellenfreiheit außerhalb der Ausnahmemenge</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Untersuchung von Summandengebieten</b>	<b>16</b>
4.1	Reduktion . . . . .	16
4.2	Explizite Darstellung . . . . .	18
4.3	Sichtbare Spitzen . . . . .	20
4.4	Imaginärteile . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Uniforme Aussagen</b>	<b>24</b>
5.1	Effektive Schranke . . . . .	24
5.2	Volumenabschätzung . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Isolierte Nullstellen</b>	<b>32</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>38</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>39</b>

# Einführung

# 1

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Lokalisierung der Nullstellen einer bestimmten Familie analytischer Funktionen, den Eisensteinreihen zu Hauptkongruenzuntergruppen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Was heißt es die Nullstellen einer analytischen Funktion zu lokalisieren? Könnten wir die Nullstellen ausrechnen, so wäre dies definitiv eine Art der Lokalisierung, allerdings sind unsere Funktionen dafür zu kompliziert. Da wir also die Nullstellen nicht exakt berechnen können, so können wir vielleicht wenigstens gute Approximationen liefern - und zwar in dem Sinne, dass wir ein (möglichst kleines) Gebiet angeben, in der genau eine Nullstelle der Funktion liegen muss. Finden wir solch ein Gebiet zu jeder Nullstelle und sind diese Gebiete disjunkt, so haben wir die Nullstellen der Funktion isoliert. Dies werden wir in der vorliegenden Arbeit für die gegebene Familie von Funktionen versuchen, allerdings werden wir nicht ganz dort ankommen. Alles, was wir anzugeben vermögen, ist ein großes nullstellenfreies Gebiet, sowie isolierende Gebiete zu einigen Nullstellen, aber nicht allen.

Die zu untersuchende Familie von Funktionen, die Eisensteinreihen zu Hauptkongruenzuntergruppen  $\Gamma(N)$  von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , kommen aus der Theorie der Modulformen. Sie sind die einfachsten Beispiele für eine Modulform, denn sie sind ganz elementar beschreibbar. Die klassische Eisensteinreihe  $E_k(z)$  zu einem  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$  gerade, ist eine analytische Funktion auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ . Sie lässt sich schreiben als

$$E_k(z) = \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ (c,d) \neq (0,0)}} (cz + d)^{-k}.$$

Wir werden verallgemeinerte Eisensteinreihen betrachten. Sei dazu  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{u} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \setminus \{(0,0)\}$  und  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ . Dann ist die Eisensteinreihe  $E_k^{\bar{u}}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  zur Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma(N)$  gegeben durch

$$E_k^{\bar{u}}(z) = \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ (c,d) \equiv_N \bar{u}}} (cz + d)^{-k}.$$

Diese Funktionen sind elementar beschreibbar, aber kompliziert, sodass sich die Frage nach ihren Nullstellen als nicht trivial herausstellt.

Die klassische Arbeit zu den Nullstellen von Eisensteinreihen (Rankin und Swinnerton-Dyer [RSD70]) zeigt, dass im Fundamentalbereich alle Nullstellen der klassischen Ei-

isensteinreihe  $E_k(z)$  auf dem Einheitskreis liegen und dort gleichverteilt sind. Zudem erlaubt sie isolierende Intervalle auf diesem Kreis zu allen Nullstellen anzugeben.

Dieses Resultat wurde in verschiedene Richtungen verallgemeinert: Zu einen liefern [Ran82, Get04] weitere Modulformen zu  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , deren Nullstellen (fast alle) auf dem Einheitskreis liegen. Des Weiteren zeigt [Noz08] eine gewisse Separationseigenschaft der Nullstellen von  $E_k(z)$  und  $E_{k+12}(z)$ : Jede Nullstelle von  $E_k(z)$  liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von  $E_{k+12}(z)$ . Außerdem kann man auch zu  $k = 2$  eine klassische Eisensteinreihe definieren, [EBS10] behandelt deren Nullstellen. Die interessanteste Richtung für uns ist die Untersuchung von Nullstellen von verallgemeinerten Eisensteinreihen. Hier untersuchen alle bisherigen Arbeiten Eisensteinreihen zu „kleinen“ Untergruppen oder kommensurablen Gruppen  $\Gamma$  von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , also Gruppen von kleinem Level  $|\Gamma \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})|$ : [GLST10] erweitert die Verteilungseigenschaften der klassischen Eisensteinreihen auf dem Einheitskreis auf bestimmte Eisensteinreihen zu  $\Gamma(2)$ , [MNS07] isoliert die Nullstellen der Eisensteinreihen zu  $\Gamma_0^*(2)$  und  $\Gamma_0^*(3)$  und [Shi07] lokalisiert fast alle Nullstellen der Eisensteinreihen zu  $\Gamma_0^*(5)$  und  $\Gamma_0^*(7)$ . Zudem untersucht [Hah07] bestimmte Untergruppen  $\Gamma$  von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit Genus 0. Für die Nullstellen der zugehörigen Eisensteinreihen werden kleine Obermengen angegeben.

Bemerkenswerterweise können die meisten der obigen Arbeiten als Verfeinerung der Argumente von [RSD70] angesehen werden. Die vorliegende Arbeit fällt nicht in diese Kategorie.

## Eigene Resultate

Wir wählen eine etwas andere Stoßrichtung als die zitierten verwandten Artikel. Wir betrachten die Eisensteinreihen zu allen Hauptkongruenzuntergruppen  $\Gamma(N)$  von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gemeinsam, nicht nur die zu „kleinen“ Gruppen. Dafür müssen wir in Kauf nehmen, dass die Aussagen, die wir bekommen, um einiges schwächer sind als in den zitierten Fällen. Wir können beispielsweise nicht zu allen Nullstellen isolierende Gebiete angeben und nur für große Gewichte  $k$  Aussagen treffen.

Die Grundlage dieser Arbeit ist folgende einfache Beobachtung: Betrachten wir die Eisensteinreihe  $E_k^{\bar{u}}$  an der Stelle  $z$  und sei ein Summand von  $E_k^{\bar{u}}(z)$  vom Betrage her echt größer als alle anderen Summanden. Erhöhen wir nun  $k$ , so bleibt dieser Summand maximal und der Abstand zu den restlichen Summanden vergrößert sich sogar noch. Man rechnet nach, dass damit für genügend großes  $k'$  dieser Summand größeren Betrag hat als die Summe der restlichen Summanden, sodass  $E_{k'}^{\bar{u}}$  in  $z$  keine Nullstelle haben kann. Dies liefert Resultate für alle  $z$  außerhalb einer Ausnahmemenge, in der mindestens zwei Summanden von  $E_k^{\bar{u}}(z)$  betragsmäßig maximal sind. Dieses erste einfache Resultat wird in Kapitel 3 ausgeführt.

Die Schranke für  $k$ , die man auf diese Art erhält, ist nicht uniform in  $z$ . Allerdings lässt sie sich uniform machen, wenn wir ein Stück von der Ausnahmemenge weg gehen, sodass wir ein großes nullstellenfreies Gebiet von  $E_k^{\bar{u}}$  bekommen. Es stellt sich sogar heraus, dass das übrige Gebiet, in das wir die Nullstellen eingeschlossen haben, ein Volumen hat, welches mit  $k \rightarrow \infty$  gegen 0 geht. Kapitel 5 beinhaltet diese Resultate.

Innerhalb dieses kleinen übrigen Gebietes, einer Umgebung der Ausnahmemenge, wollen wir nun in Kapitel 6 die Nullstellen isolieren. Dazu betrachten wir die zwei größten Summanden, berechnen die Nullstellen der Summe dieser beiden exakt und

wenden den Satz von Rouché an, um auch die Nullstellen von  $E_k^{\bar{u}}$  zu isolieren. Dies wird uns aber nur dort gelingen, wo der drittgrößte Summand klein genug ist; in Umgebungen von Punkten, in denen dies nicht der Fall ist, werden wir nichts über die Nullstellen aussagen können.

Im folgenden Kapitel 2 werden wir die benötigten Grundlagen beschreiben, die in den späteren Kapiteln vorausgesetzt werden. Die restlichen Kapitel sind wie folgt gegliedert: Kapitel 3 führt das erste einfache Resultat aus, welches nullstellenfreie Punkte für genügend großes  $k$  garantiert. Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, reduzieren wir die Lokalisierung der Nullstellen von  $E_k^{\bar{u}}$  auf die Lokalisierung der Nullstellen in einem geeigneten kleineren Gebiet in Kapitel 4. Zudem liefert dieses Kapitel einige technische Lemmas. In Kapitel 5 werden wir die Aussage aus Kapitel 3 uniformisieren und damit ein großes nullstellenfreie Gebiet finden. Kapitel 6 beschäftigt sich mit dem Isolieren von Nullstellen innerhalb einer Umgebung der Ausnahmemenge.

# Grundlagen

# 2

## 2.1. Funktionentheorie

Die zu untersuchenden Funktionen sind analytisch, also Gegenstand der Funktionentheorie. Daher werden wir in dieser Arbeit ein profundes Wissen über das Rechnen mit komplexen Zahlen stillschweigend voraussetzen, ebenso wie grundlegende Aussagen über Reihen von komplexen Zahlen und analytische Funktionen. Einzig einen Satz über analytische Funktionen wollen wir herausstellen und seine Rolle bei der Lokalisierung von Nullstellen erläutern.

Dazu wenden wir uns kurz von den komplexen Zahlen ab und betrachten die Lokalisierung von Nullstellen im Fall einer stetigen reellen Funktion  $f$ . Finden wir zu  $f$  reelle Zahlen  $a < b$  so, dass  $f(a)$  und  $f(b)$  unterschiedliche Vorzeichen haben, so garantiert der Zwischenwertsatz, dass  $f$  im Intervall  $[a, b]$  mindestens eine Nullstelle hat. Ist  $f$  eine schwer zu bestimmende Funktion, so reicht es eine gute Approximation  $h$  zu finden so, dass  $h(a)$  und  $h(b)$  unterschiedliche Vorzeichen haben, und so, dass man den Rest abschätzen kann durch  $|f(x) - h(x)| < |h(x)|$  für  $x \in [a, b]$ . Dann haben sowohl  $h$  als auch  $f$  eine Nullstelle in  $[a, b]$ . Um alle Nullstellen einer solchen Funktion  $f$  zu isolieren reicht es, disjunkte Intervalle  $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$  anzugeben so, dass  $f(a_i)$  und  $f(b_i)$  unterschiedliche Vorzeichen haben für  $1 \leq i \leq n$ , sofern man die Anzahl  $n$  an Nullstellen von  $f$  kennt.

Als komplexes Analogon zu dieser Technik kann der folgende Satz angesehen werden. Er findet sich in den meisten Lehrbüchern über Funktionentheorie (siehe z.B. [FB06]).

**Satz 2.1** (Satz von Rouché). *Seien  $f$  und  $g$  analytische Funktionen auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$  und  $\gamma$  eine geschlossene Kurve in  $G$ , welche jeden Punkt in ihrem Inneren  $\text{Int}(\gamma)$  genau einmal umläuft. Sei zudem für alle  $z \in \text{Bild}(\gamma)$ :*

$$|g(z)| < |f(z)|.$$

*Dann haben die Funktionen  $f$  und  $f + g$  im Inneren der Kurve  $\gamma$  gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt). Auf dem Bild von  $\gamma$  haben beide Funktionen keine Nullstelle.*

Wie kann man diesen Satz zur Lokalisierung von Nullstellen benutzen? Sei eine zu

untersuchende analytische Funktion  $E(z)$  gegeben. Wir benötigen eine gute Approximation  $H(z)$  von  $E$ , deren Nullstellen leicht zu berechnen sind. Sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve, die in ihrem Inneren genau eine Nullstelle von  $H$  enthält und allen Nullstellen von  $H$  möglichst fern bleibt, sodass  $|H|$  auf  $\text{Bild}(\alpha_i)$  groß ist. Nun wenden wir den Satz von Rouché auf  $f = H$  und  $g = E - H$  an. Ist  $H$  eine gute Approximation von  $E$ , so sollte  $|E - H|$  klein sein, sodass die Voraussetzung des Satzes erfüllt ist. Dann erhalten wir, dass die Kurve  $\gamma$  in ihrem Inneren auch genau eine Nullstelle von  $E$  enthält, wir haben also eine Nullstelle von  $E$  isoliert.

Dieser Satz erlaubt im Allgemeinen sogar noch stärkere Aussagen als die Technik für stetige reelle Funktionen, da er Aussagen über die Anzahl an Nullstellen ermöglicht, nicht nur über deren Existenz.

## 2.2. Modulformen

Das andere Gebiet, aus dem wir einige Aussagen benötigen, ist die Theorie der Modulformen. In diesem Abschnitt wollen wir dem Leser einen Überblick über das im Rest dieser Arbeit hierzu benötigte Wissen liefern. Dieses kann in den ersten Kapiteln von [DS05] oder [Miy06] nachgelesen werden.

Beginnen wir mit der *Modulgruppe*, der Gruppe der  $2 \times 2$ -Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten und Determinante 1,

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Diese Gruppe und ihre Untergruppen werden uns hauptsächlich interessieren. Zur Modulgruppe und  $N \in \mathbb{N}$  betrachten wir die *Hauptkongruenzuntergruppe*

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv_N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dabei ist  $\equiv$  als eintragsweise Äquivalenz zu verstehen, also  $a \equiv_N 1$ ,  $b \equiv_N 0$ , ... Es ist  $\Gamma(1) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Die Gruppen  $\Gamma(N)$  können wir gut handhaben, beispielsweise wissen wir, dass  $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$  ist und wir kennen den Index von  $\Gamma(N)$  in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ :

**Proposition 2.2.** *Zu  $N \in \mathbb{N}$  ist*

$$|\text{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)| = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

*Dabei geht das Produkt über alle Primteiler von  $N$ .*

Sei im Folgenden  $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine Untergruppe so, dass es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ . In dieser Arbeit brauchen wir streng genommen nur den Fall  $\Gamma = \Gamma(N)$ .



Zu einem Element der Modulgruppe erhält man einen Automorphismus der Riemannschen Zahlenkugel  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , die *lineare Transformation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Dies bedeutet für  $c \neq 0$ , dass  $-d/c$  auf  $\infty$  abgebildet wird und  $\infty$  auf  $a/c$ , und für  $c = 0$ , dass  $\infty$  auf  $\infty$  abgebildet wird.

Die *obere Halbebene* ist

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Es operiert  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$  und  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist sogar ein Automorphismus von  $\mathbb{H}$ .

Wir betrachten nun holomorphe Funktionen auf  $\mathbb{H}$ . Dazu definieren wir den Operator  $|_k$  zu Gewicht  $k$  für eine Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  als

$$(f|_k\gamma)(z) = (cz + d)^{-k} f(\gamma(z)), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Nun nennen wir  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  *schwach modular von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$* , falls für alle  $\gamma \in \Gamma$  und  $z \in \mathbb{H}$  gilt

$$(f|_k\gamma)(z) = f(z).$$

Solche Funktionen sind also unter linearen Transformationen in  $\Gamma$  nicht invariant, aber fast: Wir kennen den Faktor, um den sie sich verändert, und er ist eine einfache Funktion.

Insgesamt ist zu  $k \in \mathbb{N}$  eine Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine *Modulform mit Gewicht  $k$  zur Gruppe  $\Gamma$* , falls

- (i)  $f$  holomorph auf  $\mathbb{H}$ ,
- (ii)  $f$  schwach modular von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$  und
- (iii)  $f|_k\gamma$  holomorph an  $\infty$  ist für alle  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Dabei müssen wir noch definieren, was holomorph an  $\infty$  heißen soll, allerdings spielt diese Eigenschaft im Weiteren keine Rolle, daher wollen wir ihre Definition hier nur skizzieren und nicht weiter darauf eingehen. Es ist  $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(N) \subseteq \Gamma$ , also ist ein  $f$ , welches (i) und (ii) erfüllt, periodisch entlang der reellen Achse,

$$f(z + N) = f(z), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Daher können wir  $f(z)$  schreiben als  $g(e^{2\pi iz/N})$  mit einer holomorphen Funktion  $g$  auf dem Einheitskreis ohne 0. Wir nennen nun  $f$  holomorph an  $\infty$ , falls sich  $g$  an 0 holomorph fortsetzen lässt.

Die wichtigsten Modulformen zu  $\Gamma(N)$  sind die *verallgemeinerten Eisensteinreihen*

vom Gewicht  $k \in \mathbb{N}$

$$E_k^{\bar{u}}(z) = \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ (c,d) \equiv \bar{u}}} (cz + d)^{-k},$$

mit  $\bar{u} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$  von Ordnung  $N$ . Man sieht sofort, dass diese Reihe nur für  $k \geq 3$  absolut konvergiert, sodass wir sie ohne Probleme umordnen können. Gilt dies, so rechnet man leicht nach, dass folgende Transformationsformel gilt.

**Proposition 2.3.** *Für alle  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ,  $z \in \mathbb{H}$  gilt*

$$(E_k^{\bar{u}}|_k \gamma)(z) = E_k^{\bar{u}\gamma}(z).$$

Für  $\gamma \in \Gamma(N)$  ist  $\bar{u}\gamma = \bar{u}$ , also entspricht diese Aussage der schwachen Modularität von  $E_k^{\bar{u}}$ . Für sonstige  $\gamma$  bekommen wir Relationen zwischen verschiedenen  $E_k^{\bar{u}}, E_k^{\bar{u}'}$ .

Es ist nicht ganz unaufwendig nachzuweisen, dass  $E_k^{\bar{u}}$  die dritte Eigenschaft einer Modulform erfüllt. Dies kann der geneigte Leser in [DS05] nachlesen.

Zu  $\Gamma$  betrachten wir die *Modulkurve*

$$Y(\Gamma) := \Gamma \backslash \mathbb{H} = \{\Gamma z \mid z \in \mathbb{H}\}.$$

Diese kann durch geeignete Kartenumgebungen zu einer Riemannschen Fläche gemacht werden. Wir verzichten hier auf deren Angabe, da sie für die weitere Arbeit irrelevant sind.

Eine solche Modulkurve können wir durch ein Modell in  $\mathbb{H}$  angeben: Sei dazu  $\pi: \mathbb{H} \rightarrow Y(\Gamma)$  die natürliche Projektion  $\pi(z) = \Gamma z$ . Sei  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{H}$  zusammenhängend mit  $\pi|_{\mathcal{D}}$  surjektiv und  $\pi|_{\mathring{\mathcal{D}}}$  injektiv, wobei  $\mathring{\mathcal{D}}$  das Innere von  $\mathcal{D}$  bezeichnet. Dann nennen wir  $\mathcal{D}$  einen *Fundamentbereich* von  $\Gamma$ . Wir erhalten  $Y(\Gamma)$  aus  $\mathcal{D}$  durch geeignete Identifikation von Randpunkten von  $\mathcal{D}$ . Ein solcher Fundamentbereich existiert immer (zumindest für solche  $\Gamma$ , die wir betrachten).

Auf  $\mathbb{H}$  gibt es eine Metrik  $ds^2$  und ein Maß  $dv$ , die invariant unter  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sind,

$$ds^2(z) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

$$dv(z) = \frac{dx dy}{y^2}.$$

Mithilfe des Maßes  $dv$  können wir der Modulkurve  $Y(\Gamma)$  ein Volumen zuordnen, nämlich als Maß eines Fundamentbereiches  $\mathcal{D}$ . Man kann zeigen, dass diese Definition unabhängig vom gewählten Fundamentbereich ist. Ist nun  $M \subset \mathbb{H}$  invariant unter  $\Gamma$ , so können wir  $M$  ein Volumen in  $Y(\Gamma)$  zuordnen,

$$\mathrm{Vol}_{Y(\Gamma)}(M) := \int_{\mathcal{D} \cap M} dv(z).$$

Die Riemannsche Fläche  $Y(\Gamma)$  kann man kompaktifizieren, indem man geeignete

Punkte hinzufügt. Man erhält diese Kompaktifizierung explizit als

$$X(\Gamma) := \Gamma \backslash \mathbb{H}^*,$$

mit  $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  und geeigneten Kartenumgebungen. Dabei operiert  $\Gamma$  auf  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  und wir nennen  $\Gamma \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$  die *Spitzen* von  $\Gamma$ .

Wir bemerken, dass jedes  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ein Homöomorphismus von  $\mathbb{H}^*$  auf sich selbst ist.

Zu einer Menge  $M \in \mathbb{H}$  sei  $\overline{M}$  der Abschluss von  $M$  in  $\mathbb{H}^*$ . Wir nennen  $\overline{M} \setminus \mathbb{H}$  die von  $M$  sichtbaren Spitzen und setzen  $M^* := M \cup (\overline{M} \setminus \mathbb{H})$ .

# 3

## Nullstellenfreiheit außerhalb der Ausnahmemenge

In der ganzen Arbeit sei  $N > 2$ ,  $\bar{u} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$  von Ordnung  $N$  und  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ . Wir untersuchen die Nullstellen der Eisensteinreihen zur Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma(N)$ ,

$$E_k^{\bar{u}}(z) = \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ (c,d) \equiv \bar{u}}} (cz + d)^{-k}.$$

Dabei und in der ganzen Arbeit meinen wir mit  $\equiv$  die Äquivalenz modulo  $N$ , falls nichts anderes angegeben wird.

Die Voraussetzung, dass  $\bar{u}$  Ordnung  $N$  hat, ist ganz natürlich: Im anderen Falle haben für  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  die ganzen Zahlen  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, N$  einen gemeinsamen Faktor  $g > 1$ . Nach Herausteilen dieses Faktors erhalten wir eine Eisensteinreihe zu  $\Gamma(N/g)$ , die von  $E_k^{\bar{u}}$  nur um den Faktor  $g^k$  abweicht, die also insbesondere die gleichen Nullstellen wie  $E_k^{\bar{u}}$  hat. Es kam  $E_k^{\bar{u}}$  also eigentlich von einer Eisensteinreihe zu kleinerem  $N'$  her.

Die Voraussetzung  $N > 2$  ist allerdings eine echte Einschränkung. Hierdurch verlieren wir die klassischen Eisensteinreihen  $E_k^{(0,0)}$  zu  $\Gamma(1)$ , welche aber gut untersucht sind, sowie die Eisensteinreihen  $E_k^{(0,1)}, E_k^{(1,0)}$  und  $E_k^{(1,1)}$  zu  $\Gamma(2)$ . Diese sind mit unseren Methoden nicht ohne Weiteres handhabbar, zumindest ergeben sich weitere technische Schwierigkeiten. Wir verweisen auf die Arbeit [GLST10], welche die Nullstellen der letzteren Eisensteinreihen untersucht und größtenteils isoliert.

In diesem Kapitel besprechen wir ein erstes einfaches, aber wichtiges Resultat: Zu jedem Punkt  $z$  außerhalb einer Ausnahmemenge  $\Sigma^{\bar{u}}$  hat  $E_k^{\bar{u}}$  keine Nullstelle in  $z$  für  $k$  groß genug. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass wir dabei das  $k$  nicht uniform in  $z$  wählen können. In den späteren Kapiteln dieser Arbeit wollen wir diesen Satz daher verbessern hin zu einer uniformen Aussage und Aussagen zu Umgebungen der Ausnahmemenge  $\Sigma^{\bar{u}}$ .

Zuerst definieren wir die Ausnahmemenge  $\Sigma^{\bar{u}}$ , die wir meinen:  $\Sigma^{\bar{u}}$  ist das Gebiet, in dem kein Summand von  $E_k^{\bar{u}}$  einen echt größeren Betrag als alle anderen Summanden hat, in dem also mindestens zwei Summanden den gleichen, maximalen Betrag haben. Um dies leicht hinschreiben zu können (und weil sie später von eigenem Interesse sein

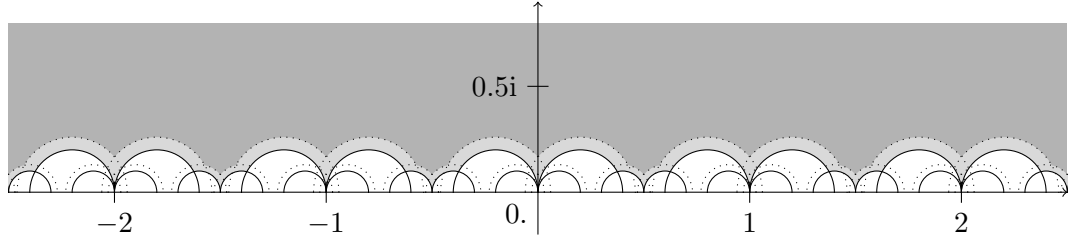


Abbildung 3.1: Diese Abbildung zeigt die Mengen  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  (■) und  $\Lambda^{(0,g)} \setminus \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  (□) für  $N = 5$ ,  $g = 1$  und  $\alpha = 1.3$ . Eingezeichnet sind auch die von Proposition 4.2.(ii) und (iii) geforderten Kreise  $B_{|g/c|}(-d/c)$  (○) und  $B_{\alpha|g/c|}(-d/c)$  (⊙).

werden) bedienen wir uns der folgenden Mengen. Wir betrachten das Summandengebiet  $\Lambda^{(c,d)}$ , in der der zu  $(c,d)$  gehörige Summand von  $E_k^{\bar{u}}$  maximal wird (dies ist unabhängig von  $k$ ). Zusätzlich betrachten wir das Gebiet  $\Lambda_{>\alpha}^{(c,d)}$ , in dem der zu  $(c,d)$  gehörige Summand  $(cz+d)^{-1}$  betragsmäßig um mehr als einen Faktor  $\alpha$  größer ist als jeder andere Summand. Dann lässt sich  $\Sigma^{\bar{u}}$  als Vereinigung aller  $\Lambda^{(c,d)} \setminus \Lambda_{>1}^{(c,d)}$  schreiben. Zudem definieren wir größere Mengen  $\Sigma_{\leq\alpha}^{\bar{u}} \supseteq \Sigma^{\bar{u}}$  für  $\alpha \geq 1$ , denen bei der Uniformisierung in Kapitel 5 Bedeutung zufallen wird.

Die Mengen  $\Lambda^{(c,d)}$  und  $\Lambda_{>\alpha}^{(c,d)}$  sind in den Abbildungen 3.1 und 3.2 zu sehen. Zur Visualisierung haben wir uns der später bewiesenen expliziten Darstellung in Proposition 4.2 bedient.

**Definition 3.1.** Zu  $(c,d) \equiv \bar{u}$  und  $\alpha \geq 1$  definieren wir

$$\begin{aligned} \Lambda^{(c,d)} &:= \{z \in \mathbb{H} \mid |cz+d|^{-1} \geq |c'z+d'|^{-1} \text{ für alle } (c',d') \equiv \bar{u}\}, \quad \text{und} \\ \Lambda_{>\alpha}^{(c,d)} &:= \{z \in \mathbb{H} \mid |cz+d|^{-1} > \alpha |c'z+d'|^{-1} \text{ für alle } (c',d') \equiv \bar{u}\}. \end{aligned}$$

Dabei nennen wir  $\Lambda^{(c,d)}$  ein Summandengebiet. Dann sei

$$\begin{aligned} \Sigma_{\leq\alpha}^{\bar{u}} &:= \mathbb{H} \setminus \bigcup_{(c,d) \equiv \bar{u}} \Lambda_{>\alpha}^{(c,d)} \\ &= \bigcup_{(c,d) \equiv \bar{u}} \Lambda^{(c,d)} \setminus \Lambda_{>\alpha}^{(c,d)}. \end{aligned}$$

Die Ausnahmemenge ist dann  $\Sigma^{\bar{u}} := \Sigma_{\leq 1}^{\bar{u}}$ .

Es sei angemerkt, dass die explizite Darstellung in Proposition 4.2 zeigt, dass  $\Lambda^{(0,1)}$  bereits in [Cum10] untersucht wurde. Dort wird gezeigt, dass  $\Lambda^{(0,1)} \cap \{z \in \mathbb{H} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < N\}$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma(N)$  ist.

Nun zeigen wir, dass in jedem Punkt  $z$  außerhalb der Ausnahmemenge  $\Sigma^{\bar{u}}$  keine Nullstelle von  $E_k^{\bar{u}}$  liegt für  $k$  groß genug: In solch einem Punkt ist genau ein Summand

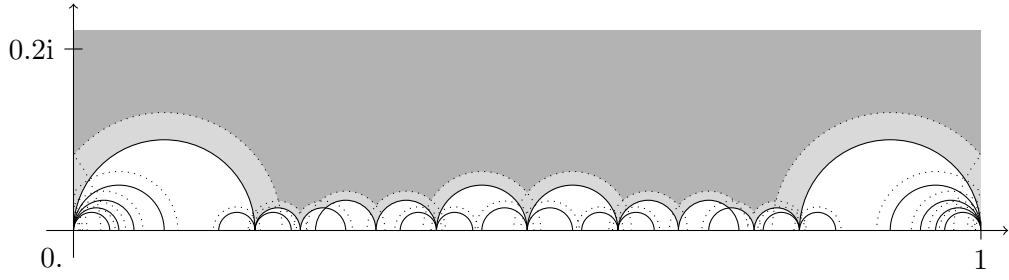


Abbildung 3.2: Diese Abbildung zeigt die gleichen Objekte wie Abbildung 3.1 für  $N = 10$ ,  $g = 1$  und  $\alpha = 1.3$ .

zu einem  $(c, d)$  maximal. Dies wird durch das Potenzieren mit einem genügend großen  $k$  verstärkt, sodass sogar  $|cz + d|^{-k} > |E_k^{\bar{u}}(z) - (cz + d)^{-k}|$  gilt. Das bedeutet aber, dass  $E_k^{\bar{u}}(z) \neq 0$  ist.

**Satz 3.2.** Sei  $z \in \mathbb{H} \setminus \Sigma^{\bar{u}}$ . Dann ist  $E_k^{\bar{u}}(z) \neq 0$  für  $k$  groß genug. Die Schranke für  $k$  ist dabei nicht uniform in  $z$ .

*Beweis.* (i) Wir benötigen eine einfache Aussage über die Summanden von  $E_k^{\bar{u}}$ , nämlich

$$\limsup_{|c|+|d| \rightarrow \infty} |cz + d|^{-1} = 0.$$

Zum Beweis dieser Aussage unterscheiden wir ob  $|c|$  beschränkt ist oder nicht: Ist  $|c|$  beschränkt, so auch  $|cx|$ , aber  $|d| \rightarrow \infty$ . Daher geht  $|cx + d|$  gegen unendlich, also auch  $|cz + d| = \sqrt{(cy)^2 + (cx + d)^2} \geq |cx + d|$ , und  $|cz + d|^{-1}$  geht gegen 0. Ist  $|c|$  unbeschränkt, also  $|c| \rightarrow \infty$ , so geht auch  $|cy|$  gegen unendlich, also  $|cz + d|^{-1}$  gegen 0.

(ii) Wegen  $z \notin \Sigma^{\bar{u}}$  ist genau ein Summand von  $E_k^{\bar{u}}$  maximal, sagen wir der zu  $(c_0, d_0)$ , d.h.,  $|c_0 z + d_0|^{-1} > |cz + d|^{-1}$  für alle  $(c, d) \equiv \bar{u}$ . Wir betrachten

$$\gamma := \sup_{(c_0, d_0) \neq (c, d) \equiv \bar{u}} \frac{|cz + d|^{-1}}{|c_0 z + d_0|^{-1}}.$$

Wegen (i) bekommen wir den gleichen Wert über einen genügend großen endlichen Bereich  $(c_0, d_0) \neq (c, d) \equiv \bar{u}$  mit  $|c| + |d| \leq C$ : Außerhalb dieses genügend großen Bereiches hat jeder Summand  $|cz + d|^{-1}$  kleineren Betrag als  $|c'z + d'|^{-1}$  für ein beliebiges festes  $(c', d')$  mit  $(c_0, d_0) \neq (c', d') \equiv \bar{u}$ . Also brauchen wir das Supremum nur über endlich viele Werte zu betrachten. Da aber genau ein Summand von  $E_k^{\bar{u}}$  maximal ist in  $z$ , sind all diese endlich vielen Werte  $|cz + d|^{-1}/|c_0 z + d_0|^{-1}$  echt kleiner als 1. Es folgt  $\gamma < 1$ .

(iii) Nun betrachten wir

$$\rho_k := \sum_{(c_0, d_0) \neq (c, d) \equiv \bar{u}} \frac{|cz + d|^{-k}}{|c_0 z + d_0|^{-k}}.$$

Für  $k \geq 3$  konvergiert  $E_k^{\bar{u}}$  absolut, daher ist  $\rho_k < \infty$ . Zudem ist

$$\rho_{k+1} \leq \gamma \rho_k,$$

für  $\rho_k < \infty$ , da für jeden Summanden von  $\rho_k$  die Ungleichung  $|cz + d|^{-1} / |c_0 z + d_0|^{-1} \leq \gamma$  gilt. Zusammen mit  $\gamma < 1$  ergibt sich nun  $\rho_k < 1$  für  $k$  groß genug.

(iv) In diesem Fall ist

$$|c_0 z + d_0|^{-k} > \sum_{(c_0, d_0) \neq (c, d) \equiv \bar{u}} |cz + d|^{-k},$$

daher ist  $E_k^{\bar{u}}(z) \neq 0$ .

□

# 4

## Untersuchung von Summandengebieten

Wir wollen die im letzten Kapitel definierte Ausnahmemenge genauer untersuchen, allerdings werden wir dies durch die Untersuchung von Summandengebieten  $\Lambda^{(c,d)}$  erreichen. Von diesen werden wir eine einfachere Darstellung finden sowie einige grundlegende Eigenschaften zeigen. Dies verschafft uns ein klareres Bild von Summandengebieten und der Ausnahmemenge. Zudem werden wir die hier gezeigten Eigenschaften in den Beweisen der kommenden Kapitel verwenden.

Unser Vorgehen in diesem Kapitel ist wie folgt: Zuerst zeigen wir eine Reduktion, die die Untersuchung von  $\Lambda^{(c,d)}$  auf  $\Lambda^{(0,g)}$  zurückführt. Alle Eigenschaften, die uns interessieren, werden durch diese Reduktion beibehalten. Dann leiten wir eine explizite Darstellung des Summandengebiets  $\Lambda^{(0,g)}$  als Komplement von einer Vereinigung von Kreisen in der oberen Halbebene her. Auch zu  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  finden wir eine explizite Darstellung. Dies liefert uns insbesondere eine Darstellung von  $\Sigma^{\bar{u}}$  als die Vereinigung der Ränder der  $\Lambda^{(c,d)}$ , was die Untersuchung der Summandengebiete statt der Ausnahmemenge rechtfertigt. Anschließend bestimmen wir die Spitzen, die von  $\Lambda^{(0,g)}$  aus sichtbar sind, die also in  $(\Lambda^{(0,g)})^* \subset \mathbb{H}^*$  liegen. Wir schließen das Kapitel mit einer unteren Schranke für die Imaginärteile der Punkte in  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  ab.

---

### 4.1. Reduktion

In diesem Abschnitt beschreiben wir eine Reduktion, die die Untersuchung von  $\Lambda^{(c,d)}$  auf die Untersuchung von  $\Lambda^{(0,g)}$  zurückführt für ein  $g \in \mathbb{N}$ . Dafür benötigen wir zuerst, dass es eine lineare Transformation in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gibt, die  $(c, d)$  auf  $(0, g)$  abbildet. Dann nutzen wir das Prinzip der Transformationsformel  $(E_k^{\bar{u}}|_k \gamma)(z) = E_k^{u\gamma}(z)$  (Proposition 2.3), um zu zeigen, dass eine lineare Transformation in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  die Mengen  $\Lambda^{(c,d)}$  und  $\Sigma^{\bar{u}}$  nur linear transformiert.

**Proposition 4.1.** *Es gelten*

(i) Sei  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $(c, d) \neq (0, 0)$ . Dann existiert ein  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und  $g \in \mathbb{N}$  mit

$$(c, d)\gamma = (0, g).$$



(ii) Sei  $(c, d) \equiv \bar{u}$ ,  $\alpha \geq 1$  und  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Dann gelten

$$\begin{aligned}\Lambda^{(c,d)} &= \gamma \Lambda^{(c,d)} \gamma, \\ \Lambda_{>\alpha}^{(c,d)} &= \gamma \Lambda_{>\alpha}^{(c,d)} \gamma, \\ \Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}} &= \gamma \Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}} \gamma.\end{aligned}$$

*Beweis.* (i) Sei  $g \in \mathbb{N}$  der größte gemeinsame Teiler von  $c$  und  $d$ . Dann existieren  $b', d' \in \mathbb{Z}$  mit  $b'c + d'd = g$ . Wir setzen  $a' = d/g$ ,  $c' = -c/g$ . Damit ist  $a'd' - b'c' = d'd/g + b'c/g = g/g = 1$ , also ist

$$\gamma := \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Nach Konstruktion ist  $(c, d)\gamma = (0, g)$ .

(ii) Sei  $\gamma = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ . Es ist  $z \in \Lambda^{(c,d)\gamma}$  genau dann, wenn für alle  $(c', d') \equiv (c, d)\gamma = (ec + gd, fc + hd)$  gilt:

$$|(ec + gd)z + (fc + hd)|^{-1} \geq |c'z + d'|^{-1}.$$

Da  $\gamma$  invertierbar ist, können wir  $(c', d') = (c'', d'')\gamma$  schreiben, wir erhalten

$$|(ec + gd)z + (fc + hd)|^{-1} \geq |(ec'' + gd'')z + (fc'' + hd'')|^{-1}.$$

Dies kann man als lineare Transformation schreiben und vereinfachen zu

$$\left| c \frac{ez + f}{gz + h} + d \right|^{-1} \geq \left| c'' \frac{ez + f}{gz + h} + d'' \right|^{-1},$$

was aber nichts anderes ist als

$$|c\gamma z + d|^{-1} \geq |c''\gamma z + d''|^{-1}.$$

Also ist  $z \in \Lambda^{(c,d)\gamma}$  genau dann, wenn  $\gamma z \in \Lambda^{(c,d)}$ .

Die Aussage über  $\Lambda_{>\alpha}^{(c,d)}$  folgt analog. Wegen  $\Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}} = \bigcup_{(c,d) \equiv \bar{u}} \Lambda^{(c,d)} \setminus \Lambda_{>\alpha}^{(c,d)}$  folgt damit auch die letzte Aussage. □

Zusammen zeigen die beiden Aussagen von Proposition 4.1, dass wir uns auf den Fall  $(c, d) = (0, g)$  beschränken können. Die expliziten Darstellungen und Eigenschaften, die wir in den folgenden Abschnitten zeigen werden, übertragen sich also leichtens auf allgemeines  $(c, d)$ .

## 4.2. Explizite Darstellung

Wir leiten nun explizite Darstellungen der Mengen  $\Lambda^{(0,g)}$ ,  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  und  $\Sigma^{\bar{u}}$  her. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung nach  $g > N/2$  oder  $g < N/2$ .

Der dritte Fall,  $g = N/2$ , ist aus folgendem Grund uninteressant: Hat  $\bar{u} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$  Ordnung  $N$ , so auch jedes  $(c, d) \equiv \bar{u}$ . Die Reduktion in Proposition 4.1 ist ordnungserhaltend, weshalb wir auch bei einem  $(0, g)$  von Ordnung  $N$  landen. Wir können uns also auf  $(0, g)$  der Ordnung  $N$  in  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$  beschränken. Es hat aber  $(0, N/2)$  die Ordnung 2, was nach unserer Voraussetzung echt kleiner als  $N$  ist, dieser Fall fällt also weg.

Für den Fall  $g > N/2$  zeigen wir, dass  $\Lambda^{(0,g)}$  leer ist. Im Fall  $g < N/2$  ergeben sich interessantere Muster. Wir geben eine explizite Darstellung für  $\Lambda^{(0,g)}$  und  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  als Komplement einer Vereinigung von Kreisen in  $\mathbb{H}$  an. Dabei bezeichnen wir mit  $B_r(z)$  die offene Kreisscheibe mit Radius  $r \geq 0$  um den Punkt  $z \in \mathbb{C}$  und mit  $\bar{B}_r(z)$  die abgeschlossene Kreisscheibe.

Diese Darstellung ermöglicht uns unter anderem die Abbildungen 3.1 und 3.2 zu generieren.

**Proposition 4.2.** (i) Für  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g > N/2$  ist  $\Lambda^{(0,g)} = \emptyset$ .

(ii) Für  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g < N/2$  und  $1 \leq \alpha < N/g - 1$  haben wir die folgenden expliziten Darstellungen

$$\Lambda^{(0,g)} = \mathbb{H} \setminus \bigcup_{\substack{(c,d) \equiv (0,g) \\ c \neq 0}} B_{|g/c|}(-d/c),$$

$$\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)} = \mathbb{H} \setminus \bigcup_{\substack{(c,d) \equiv (0,g) \\ c \neq 0}} \bar{B}_{\alpha|g/c|}(-d/c).$$

(iii) In (ii) reicht es sogar, die Vereinigung über alle  $(c, d) \equiv (0, g)$  mit  $0 < |c| < \frac{N^2}{2g}$  zu bilden.

(iv) Für  $g = N/2$  und  $N > 2$  ist  $(0, g)$  von Ordnung kleiner als  $N$ .

*Beweis.* (i) Für  $g > N/2$  ist  $|g - N| < |g|$ , also ist der Betrag des Summanden zu  $(0, g)$ , nämlich  $|g|^{-1}$ , kleiner als der Betrag des Summanden zu  $(0, g - N)$ , nämlich  $|g - N|^{-1}$ . Dies ist unabhängig von  $z \in \mathbb{H}$ , es folgt die Behauptung.

(ii) Für  $g < N/2$  ist  $|g + jN| \geq N - g > g$  für alle  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $j \neq 0$ . Damit ist der Summand zu  $(0, g)$  maximal unter allen Summanden zu  $(0, d)$ ,  $d \equiv g$ . Zudem ist für  $\alpha < N/g - 1$  die Bedingung  $N - g > \alpha g$  erfüllt, sodass der Summand  $|g|^{-1}$  zu  $(0, g)$  sogar um einen Faktor  $\alpha$  größer ist als die Summanden zu  $(0, d)$ ,  $g \neq d \equiv g$ . Dies gilt unabhängig von  $z \in \mathbb{H}$ .

Betrachten wir nun einen Summanden zu  $(c, d) \equiv (0, g)$  mit  $c \neq 0$ . Dann ist für  $z = x + iy \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} |g|^{-1} &\geq |cz + d|^{-1} \\ \Leftrightarrow |g|^2 &\leq (cy)^2 + (cx + d)^2 \\ \Leftrightarrow y^2 + (x + d/c)^2 &\geq |g/c|^2. \end{aligned}$$

Die Punkte  $z \in \mathbb{H}$ , für die die erste Zeile gilt, liegen also außerhalb der offenen Kreisscheibe  $B_{|g/c|}(-d/c)$ . Insgesamt ergibt sich die behauptete Darstellung von  $\Lambda^{(0,g)}$ . Für  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  ergibt eine analoge Rechnung, dass  $z$  außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{B}_{\alpha|g/c|}(-d/c)$  liegen muss, es folgt die behauptete Darstellung.

(iii) Wir zeigen, dass für  $|c| \geq \frac{N^2}{2g}$  jede Kreisscheibe  $B_{|g/c|}(-d/c)$  bereits in einer Kreisscheibe zu einem betragsmäßig kleineren  $\hat{c} = a$  enthalten ist.

Sei dazu  $(c, d) \equiv (0, g)$ . Wir suchen  $(a, b) \equiv (0, g)$  mit  $0 < |a| < |c|$  so, dass

$$B_{|g/c|}(-d/c) \subseteq B_{|g/a|}(-b/a).$$

Man sieht, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $c > 0$  annehmen können, sonst ändern wir das Vorzeichen von  $c$  und  $a$ .

Wir schreiben  $(c, d) = (c'N, d'N + g)$ ,  $(a, b) = (a'N, b'N + g)$  und  $h := g/N$ . Dann gilt obige Kreisinklusion genau dann, wenn

$$B_{|h/c'|}(-(d' + h)/c') \subseteq B_{|h/a'|}(-(b' + h)/a').$$

Dies ist aber äquivalent dazu, dass der Abstand beider Mittelpunkte höchstens die Differenz der Radien ist, also

$$\left| \frac{d' + h}{c'} - \frac{b' + h}{a'} \right| \leq \left| \frac{h}{a'} \right| - \left| \frac{h}{c'} \right|.$$

Nach Durchmultiplizieren mit  $|a'|$  und  $|c'|$  vereinfacht sich dies zu

$$|a'd' - b'c' + h(a' - c')| \leq |hc'| - |ha'|. \quad (4.1)$$

Wir betrachten den Bruch  $\frac{d'}{c'}$ . Ist  $s := \text{ggT}(d', c') > 1$ , so setzen wir  $a' := c'/s$ ,  $b' := d'/s$ , was obige Ungleichung ebenso erfüllt wie  $|a| < |c|$ . Ist dagegen  $\frac{d'}{c'}$  bereits gekürzt (was wegen  $c \geq \frac{N^2}{2g} > N$ , also  $c' > 1$ , auch  $d' \neq 0$  impliziert), so existiert  $(d')^{-1} \pmod{c'}$ . Sei  $0 < r < c'$  ein Repräsentant davon.

Wir betrachten nun zwei Fälle:

- a)  $r \leq c' - \frac{1}{2h}$ : In diesem Fall setzen wir  $a' := r$  und  $b'$  so, dass  $a'd' - b'c' = 1$  gilt. Dies geht wegen  $a' \equiv (d')^{-1} \pmod{c'}$ . Es ist also  $1 \leq a' < c'$  und Ungleichung (4.1) vereinfacht sich zu

$$|h(c' - a') - 1| \leq h(c' - a'),$$

was genau dann erfüllt ist, wenn

$$2h(c' - a') \geq 1,$$

und dies ist wegen  $a' = r \leq c' - \frac{1}{2h}$  erfüllt.

- b)  $r > c' - \frac{1}{2h}$ : In diesem Fall setzen wir  $a' := r - c'$ , also negativ. Wiederum finden wir  $b'$  so, dass  $a'd' - b'c' = 1$  gilt. Ungleichung (4.1) wird zu

$$|h(2c' - r) - 1| \leq hr.$$

Die eine dieser zwei Ungleichungen,  $h(2c' - r) - 1 \leq hr$ , ist wegen der Voraussetzung des aktuellen Falles erfüllt. Für die andere,  $1 - h(2c' - r) \leq hr$ , ist schon  $c' \geq \frac{1}{2h}$ , also  $c \geq \frac{N^2}{2g}$ , hinreichend.

Wir haben also gezeigt, dass jede Kreisscheibe  $B_{|g/c|}(-d/c)$  mit  $|c| \geq \frac{N^2}{2g}$  bereits in einer Kreisscheibe  $B_{|g/a|}(-b/a)$  mit  $|a| < |c|$  enthalten ist. Damit kann man die Vereinigung in der Darstellung von  $\Lambda^{(0,g)}$  wie angegeben einschränken.

Die gleiche Einschränkung kann man für  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  treffen, da  $B_{r_1}(z_1) \subseteq B_{r_2}(z_2)$  bereits  $\overline{B}_{\alpha r_1}(z_1) \subseteq \overline{B}_{\alpha r_2}(z_2)$  impliziert für  $\alpha \geq 1$  (und  $r_1, r_2 > 0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ).

(iv) Wurde vor Proposition 4.2 diskutiert. □

Auf obiger Darstellung aufbauend können wir direkt Darstellungen der Ausnahmemenge  $\Sigma^{\bar{u}}$  ablesen. Diese rechtfertigt die Untersuchung der Summandengebiete  $\Lambda^{(c,d)}$  statt der Ausnahmemenge  $\Sigma^{\bar{u}}$ .

**Korollar 4.3.** *Es ist*

$$\Sigma^{\bar{u}} = \bigcup_{(c,d) \equiv \bar{u}} \gamma_{(c,d)} \partial \Lambda^{(0,g(c,d))}.$$

*Dabei sind  $\gamma_{(c,d)}$  und  $g_{(c,d)}$  die zu  $(c,d)$  gehörigen Objekte aus Proposition 4.1 (i).*

*Beweis.* Aus Proposition 4.2 folgt man sofort  $\Lambda^{(0,g)} \setminus \Lambda_{>1}^{(0,g)} = \partial \Lambda^{(0,g)}$ . Wenden wir zusätzlich die Reduktion aus Proposition 4.1 an, so erhalten wir die Aussage. □

---

### 4.3. Sichtbare Spitzen

Wir wollen nun  $(\Lambda^{(c,d)})^*$  betrachten, also die von  $\Lambda^{(c,d)}$  sichtbaren Spitzen bestimmen. Dazu beobachten wir zuerst einmal, dass zusätzlich zu Proposition 4.1 auch

$$(\Lambda^{(c,d)})^* = \gamma \left( \Lambda^{(c,d)} \gamma \right)^*$$

gilt, da  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}^*$  ein Homöomorphismus ist. Es reicht also wiederum, sich auf den Fall  $(0, g)$  zu beschränken. Nach Proposition 4.2 ist klar, dass auch  $(\Lambda^{(0,g)})^*$  leer ist für  $g > N/2$ . Für  $g < N/2$  zeigen wir folgenden Satz.

**Satz 4.4.** *Sei  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g < N/2$ . Dann ist*

$$(\Lambda^{(0,g)})^* \setminus \mathbb{H} = \{\infty\} \cup \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, 0 < q \leq \frac{N}{2g} \right\}.$$

*Beweis.* Aus Proposition 4.2 folgern wir für den Abschluss  $\overline{\Lambda^{(0,g)}}$  von  $\Lambda^{(0,g)}$  in  $\mathbb{H}^*$ , dass

$$\overline{\Lambda^{(0,g)}} = \mathbb{H}^* \setminus \bigcup_{\substack{(c,d) \equiv (0,g) \\ c \neq 0}} B_{|g/c|}(-d/c).$$

Da alle auftretenden Kreisscheiben Radius  $\leq |g|$  haben, sieht man sofort, dass  $\infty \in (\Lambda^{(0,g)})^*$ .

Betrachten wir nun  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $q > 0$ ,  $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ . Sei  $(c, d) \equiv (0, g)$ , wir können es also schreiben als  $(c, d) = (c'N, d'N + g)$ . Dann ist  $\frac{p}{q} \in B_{|g/c|}(-d/c)$  genau dann, wenn

$$\left| \frac{p}{q} + \frac{d}{c} \right| < \left| \frac{g}{c} \right|,$$

was wir vereinfachen zu

$$\left| \frac{c'p}{q} + d' + \frac{g}{N} \right| < \left| \frac{g}{N} \right|. \quad (4.2)$$

Sei  $q > \frac{N}{2g}$ , also insbesondere  $p \not\equiv_q 0$ . Sei weiter  $r$  ein Repräsentant von  $p^{-1} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . Setzen wir  $c' := -r$ , dann ist  $\frac{c'p}{q} = s - \frac{1}{q}$  für ein  $s \in \mathbb{Z}$ . Wir setzen  $d' := -s$  und bekommen

$$\left| \frac{g}{N} - \frac{1}{q} \right| < \left| \frac{g}{N} \right|,$$

was wegen  $q > \frac{N}{2g}$  erfüllt ist. Solche Spitzen sind also im Inneren eines herausgeschnittenen Kreises enthalten, also nicht in  $(\Lambda^{(0,g)})^*$ .

Sei andersherum  $0 < q \leq \frac{N}{2g}$ . Dann ist  $\left| \frac{c'p}{q} + d' \right|$  ein Vielfaches von  $\frac{1}{q}$ . Ist dieser Wert gleich 0, so ist Ungleichung (4.2) nicht erfüllt, denn  $\left| \frac{g}{N} \right| < \left| \frac{g}{N} \right|$  gilt nicht. Sonst ist dieser Wert mindestens  $\frac{1}{q}$ , aber dann ist

$$\left| \frac{c'p}{q} + d' + \frac{g}{N} \right| \geq \frac{1}{q} - \left| \frac{g}{N} \right| \geq \frac{2g}{N} - \frac{g}{N},$$

und dies ist nicht echt kleiner als  $\frac{g}{N}$ , also ist Ungleichung (4.2) wiederum nicht erfüllt. Es folgt, dass  $\frac{p}{q}$  in keiner der Kreisscheiben  $B_{|g/c|}(-d/c)$  liegt, also in  $(\Lambda^{(0,g)})^*$  enthalten ist.  $\square$

Wir können auch ganz leicht die Spitzen in  $(\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)})^*$  angeben: Dort liegt genau  $\infty$ .

**Korollar 4.5.** *Sei  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g < N/2$  und  $1 < \alpha < N/g - 1$ . Dann ist*

$$(\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)})^* \setminus \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)} = \{\infty\}.$$

*Beweis.* Wiederum sind die Radien der herauszuschneidenden Kreise durch  $\alpha g$  beschränkt, also taucht  $\infty$  als Spitze auf.

Zudem sind nach Lemma 4.6, welches wir im nächsten Abschnitt zeigen werden (ohne die aktuell zu beweisende Aussage zu verwenden), die Imaginärteile von Punkten in  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  nach unten beschränkt, also finden wir keine weiteren Spitzen.  $\square$

## 4.4. Imaginärteile

Wir benötigen für Korollar 4.5 sowie für späteren Aussagen eine untere Schranke für die Imaginärteile von Punkten in  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$ . Diese lässt sich leicht gewinnen aus der expliziten Darstellung und dem Wissen über die sichtbaren Spitzen.

**Lemma 4.6.** *Sei  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g < N/2$  und  $1 < \alpha < N/g - 1$ . Dann ist für  $x + iy \in \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$*

$$y > 2(g/N)^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

*Beweis.* In  $(\Lambda^{(0,g)})^*$  liegen nur endlich viele Spitzen (Satz 4.4), also ist kein echtes reelles Intervall in dieser Menge enthalten. Wegen der expliziten Darstellung (Proposition 4.2) liegt also jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}$  in einer abgeschlossenen Kreisschreibe  $\overline{B}_{|g/c|}(-d/c)$  zu einem  $(c, d) \equiv (0, g)$ , wegen 4.2.(iii) sogar mit

$$0 < |c| < \frac{N^2}{2g}. \quad (4.3)$$

Damit ist

$$|x + d/c| \leq |g/c|. \quad (4.4)$$

Sei nun  $y \in \mathbb{R}$  so, dass  $z = x + iy \in \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$ , also  $z \notin \overline{B}_{\alpha|g/c|}(-d/c)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha|g/c| &< |z + d/c| \\ &= \sqrt{y^2 + (x + d/c)^2} \\ &\stackrel{(4.4)}{\leq} \sqrt{y^2 + |g/c|^2}, \end{aligned}$$

wir erhalten also

$$y \geq |g/c|\sqrt{\alpha^2 - 1} \stackrel{(4.3)}{>} 2(g/N)^2\sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

□

# 5

## Uniforme Aussagen

In diesem Kapitel wollen wir Satz 3.2 uniformisieren. Dies bedeutet, dass wir für die verallgemeinerten Ausnahmemengen  $\Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}}$  eine Schranke für  $k$  finden, ab der  $E_k^{\bar{u}}$  keine Nullstelle in  $\mathbb{H} \setminus \Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}}$  hat. Diese Schranke ist dann nur noch von  $\alpha$  abhängig, also uniform in  $z \in \mathbb{H} \setminus \Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}}$ .

Wir schließen das Kapitel ab mit einer Abschätzung des Volumens von  $\Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}}$  in  $Y(\Gamma(N))$ . Diese wird zeigen, dass wir nun zu jedem  $k$  eine Obermenge der Nullstellen von  $E_k^{\bar{u}}$  angeben können, deren Volumen in  $Y(\Gamma(N))$  gegen 0 geht für  $k \rightarrow \infty$ .

### 5.1. Effektive Schranke

Wir zeigen zunächst das folgende allgemeine Lemma, welches wir in späteren Kapiteln wiederverwenden werden. Es macht Satz 3.2 effektiv durch eine Abschätzung der Anzahl an Summanden von  $E_k^{\overline{(0,g)}}$  von einer bestimmten Größenordnung.

**Lemma 5.1.** *Seien*

- $g \in \mathbb{N}$ ,  $g < N/2$ ,  $\alpha > 1$  und  $z \in \mathbb{H}$ ,
- $S \subset \{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid (c, d) \equiv (0, g)\}$  und  $|S| < \infty$ , also

$$T := T_k(z) := \sum_{(c,d) \in S} (cz + d)^{-k}$$

eine endliche Teilsumme von  $E_k^{\overline{(0,g)}}(z)$ ,

- $\alpha^k |cz + d|^{-k} < |T|$  für alle  $(c, d) \equiv (0, g)$ ,  $(c, d) \notin S$ ,
- $k > 2 + \log_{\alpha} \left( C \left( 1 + \frac{1}{y} \right) \left( 1 + \frac{1}{N^k |T|} \right) \right)$ .

Dann ist  $|T| > \left| E_k^{\overline{(0,g)}}(z) - T \right|$ , insbesondere hat  $E_k^{\overline{(0,g)}}$  keine Nullstelle in  $z$ . Dabei ist  $C > 0$  eine Konstante, die unabhängig von allen Parametern ist.



Alle in dieser Arbeit nicht explizit angegebenen Konstanten können leichtens anhand der Beweise explizit gemacht werden, es findet sich aber kein großer Mehrwert dabei.

*Beweis.* (i) Sei  $r \in \mathbb{N}$ . Wir zählen die Summanden von  $E_k^{\overline{(0,g)}}$  mit  $|cz + d| \leq rN$ ,  $z = x + iy$ . Eine notwendige Bedingung für letzteres ist  $|cy| \leq rN$ , also  $|c| \leq rN/y$ . Wegen  $c \equiv_N 0$  gibt es also  $\leq 1 + 2r/y \leq 2r(1 + 1/y)$  Werte für  $c$ , die sich zu einem Paar  $(c, d)$  mit  $|cz + d| \leq rN$  fortsetzen lassen. Für  $d$  haben wir die notwendige Bedingung  $|cx + d| \leq rN$ , also  $-cx - rN \leq d \leq -cx + rN$ . Daran liest man ab, dass es  $\leq 2r + 1 \leq 3r$  mögliche Werte für  $d$  gibt. Es folgt eine obere Schranke von  $g(r) := 6r^2(1 + 1/y)$  für die Anzahl an Paaren  $(c, d)$  mit  $|cz + d| \leq rN$ . Im Folgenden ignorieren wir Konstanten, also reicht uns die Aussage, dass es höchstens  $C_1 r^2(1 + 1/y)$  solcher Paare gibt für eine Konstante  $C_1$ .

(ii) Sei  $z \in \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$ . Wir betrachten

$$\rho_k := \left| E_k^{\overline{(0,g)}}(z) - T \right| = \sum_{(0,g) \equiv (c,d) \notin S} |cz + d|^{-k}.$$

Für  $k \geq 3$  konvergiert  $E_k^{\overline{(0,g)}}(z) = \sum_{(c,d) \equiv (0,g)} (cz + d)^{-k}$  absolut, also ist  $\rho_k < \infty$ .

(iii) Wir benötigen eine obere Schranke für  $\rho_k$ . Es ist

$$\rho_k = \sum_{r \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(0,g) \equiv (c,d) \notin S \\ (r-1)N \leq |cz+d| \leq rN}} |cz + d|^{-k}.$$

Dabei ist jeder Summand durch  $((r-1)N)^{-k}$  nach oben beschränkt. Zudem gilt nach Voraussetzung für jeden Summanden die Ungleichung  $\alpha^k |cz + d|^{-k} \leq |T|$ , also ist jeder Summand von  $\rho_k$  durch  $\alpha^{-k}|T|$  nach oben beschränkt. Wir nutzen nun die erste dieser beiden Abschätzungen für  $r \geq \beta$  und die zweite für  $r < \beta$  für ein zu wählendes  $\beta \in \mathbb{N}$  und bekommen

$$\begin{aligned} \rho_k &\leq \underbrace{g(\beta)\alpha^{-k}|T|}_{(r < \beta)} + \underbrace{g(\beta)(\beta-1)^{-k}N^{-k}}_{(n = \beta)} \\ &\quad + \sum_{r > \beta} (g(r) - g(r-1))(r-1)^{-k}N^{-k}. \end{aligned}$$

Wegen  $g(r) - g(r-1) = C_1(2r-1)(1+1/y) \leq C_2(r-1)(1+1/y)$  (für  $r > \beta \geq 1$ ) vereinfacht sich die auftretende Summe nach einer Indexverschiebung um 1 zu

$$C_2(1+1/y)N^{-k} \sum_{r \geq \beta} r^{1-k},$$

was sich wiederum gegen  $\int_{\beta-1}^{\infty} x^{1-k} dx = \frac{1}{k-2}(\beta-1)^{2-k} \leq (\beta-1)^{2-k}$  abschätzen

lässt. Einsetzen liefert

$$\rho_k \leq (1 + 1/y) \left( C_1 \beta^2 \alpha^{-k} |T| + N^{-k} (\beta - 1)^{-k} (C_1 \beta^2 + C_2 (\beta - 1)^2) \right).$$

Wählen wir  $\beta \geq 2$  und somit  $\beta^2 \leq 4(\beta - 1)^2$ , vereinfacht sich dies weiter zu

$$\rho_k \leq C_3 (1 + 1/y) \beta^2 \left( \alpha^{-k} |T| + N^{-k} (\beta - 1)^{-k} \right).$$

Wir wählen nun  $\beta := 2 \lceil \alpha \rceil \geq 1 + \alpha \geq 2$ . Dann ist  $(\beta - 1)^{-k} \leq \alpha^{-k}$  und  $\beta^2 \leq (4\alpha)^2$ . Damit ist letztendlich

$$\rho_k \leq C_4 (1 + 1/y) \alpha^{2-k} (|T| + N^{-k}),$$

für eine Konstante  $C_4 \geq 1$ .

(iv) Unter der gegebenen Voraussetzung an  $k$  (mit  $C = C_4$ ) ist also  $\left| E_k^{\overline{(0,g)}}(z) - T \right| = \rho_k < |T|$ , damit kann  $E_k^{\overline{(0,g)}}$  keine Nullstelle in  $z$  haben.  $\square$

Das soeben bewiesene Lemma nutzen wir nun angewendet auf die Teilsumme  $T_k(z) = g^{-k}$  um eine uniforme Schranke an  $k$  zu bekommen ab der  $E_k^{\overline{(0,g)}}$  keine Nullstelle in  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  hat.

**Satz 5.2.** *Sei  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g < N/2$  und  $1 < \alpha < 2$ . Dann hat  $E_k^{\overline{(0,g)}}(z)$  keine Nullstelle in  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  für*

$$k > 2 + \log_\alpha \left( \frac{C N^2}{g^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right),$$

*für eine Konstante  $C \geq 1$ , die unabhängig von allen Parametern ist.*

*Beweis.* Wir wenden Lemma 5.1 an mit  $T = T_k(z) := g^{-k}$ . Für  $z \in \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  ist dann  $\alpha^k |cz + d|^{-k} < |T_k(z)|$  für alle  $(c, d) \equiv (0, g)$ ,  $(c, d) \neq (0, g)$ .

Es bleibt zu zeigen, dass das gewählte  $k$  groß genug ist. Dazu beobachten wir zuerst, dass

$$\frac{1}{N^k |T_k(z)|} = \frac{g^k}{N^k} \leq 1,$$

da  $g < N/2$ , also ist statt der Voraussetzung von Lemma 5.1 schon folgende Ungleichung an  $k$  hinreichend

$$k > 2 + \log_\alpha (C_5 (1 + 1/y)).$$

Verwenden wir nun, dass die Imaginärteile von Punkten in  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  von unten beschränkt

sind (Lemma 4.6) erhalten wir eine hinreichende Schranke von

$$k > 2 + \log_\alpha \left( C_5 \left( 1 + \frac{N^2}{2g^2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) \right).$$

Für  $\alpha \leq 2$  (oder eine beliebige andere Konstante) kann dies wegen  $N^2/g^2 \geq 1$  und  $1/\sqrt{\alpha^2 - 1} \geq C_6$  vereinfacht werden zu

$$k > 2 + \log_\alpha \left( \frac{C_7 N^2}{g^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right).$$

□

## 5.2. Volumenabschätzung

Es fehlt noch eine Abschätzung über das Volumen von  $\Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}}$  in  $Y(\Gamma(N))$ . Mit dieser können wir dann das Hauptresultat dieses Kapitels zeigen.

**Lemma 5.3.** *Sei  $1 < \alpha < 1 + \frac{2}{N-1}$ . Dann ist*

$$\text{Vol}_{Y(\Gamma(N))}(\Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}}) \leq N^4 |\text{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)| \arccos \left( \frac{1}{1 + \frac{N}{2}\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right).$$

Diese Schranke geht mit  $\alpha \rightarrow 1$  gegen 0. Dabei ist  $|\text{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)|$  eine bekannte Größe (Proposition 2.2).

*Beweis.* (i) Nach Definition ist

$$\Gamma(N) \setminus \Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}} = \Gamma(N) \setminus \bigcup_{(c,d) \equiv \bar{u}} (\Lambda^{(c,d)} \setminus \Lambda_{> \alpha}^{(c,d)}).$$

Wegen der Trafoformel (Proposition 4.1) sind  $\Lambda^{(c,d)} \setminus \Lambda_{> \alpha}^{(c,d)}$  und  $\Lambda^{(c,d)\gamma} \setminus \Lambda_{> \alpha}^{(c,d)\gamma}$  gleich modulo  $\Gamma(N)$  für  $\gamma \in \Gamma(N)$ . Also reicht es über ein Repräsentantensystem  $R$  von  $\Gamma(N) \setminus \{(c, d) \equiv \bar{u}\}$  zu summieren.

Zudem ist wegen Proposition 4.1.(i)  $\{(0, g) \mid g \in \mathbb{N}\}$  ein Repräsentantensystem von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ . Nun wollen wir nicht ganz  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  herausteilen, sondern nur  $\Gamma(N)$ . Damit ist aber für ein Repräsentantensystem  $S$  von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)$  die Menge  $S \cdot \{(0, g) \mid g \in \mathbb{N}\}$  ein Repräsentantensystem von  $\Gamma(N) \setminus (\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  und  $R$  kann als eine Teilmenge dieser gewählt werden. Ziehen wir nun noch in Betracht, dass  $\Lambda^{(c,d)}$  leer ist für  $(c, d) \equiv (0, g) \pmod{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$  mit  $g > N/2$  und  $g = N/2$  nicht in Frage kommt, da die Ordnung von  $\bar{u}$  als  $N$  vorausgesetzt wird, so können wir  $R$  sogar als Teilmenge von

$$S \cdot \{(0, g) \mid g \in \mathbb{N}, g < N/2\}$$

wählen. Diese Menge hat aber beschränkte Größe, nämlich höchstens

$$|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)| \cdot N/2.$$

Wir summieren also über beschränkt viele Summanden auf, die alle äquivalent zu einem  $\Lambda^{(0,g)} \setminus \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  sind, und wir benötigen nur noch eine Abschätzung der Volumina der einzelnen Summanden.

- (ii) Wir betrachten ein  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g < N/2$ . Wegen  $g \leq \frac{N-1}{2}$  und  $\alpha < 1 + \frac{2}{N-1}$  ist die Voraussetzung  $\alpha < N/g - 1$  von Proposition 4.2 erfüllt und wir bekommen die explizite Darstellung

$$M := \Lambda^{(c,d)} \setminus \Lambda_{>\alpha}^{(c,d)} = \mathbb{H} \cap \bigcup_{\substack{(c,d) \equiv (0,g) \\ 0 < |c| < N^2/(2g)}} \overline{B}_{\alpha|g/c|}(-d/c) \setminus \bigcup_{\substack{(c,d) \equiv (0,g) \\ 0 < |c| < N^2/(2g)}} B_{|g/c|}(-d/c). \quad (5.1)$$

Zur Berechnung des Volumens von  $M$  können wir uns nun auf  $-N/2 \leq x \leq N/2$  beschränken, da  $z \equiv z + kN \pmod{\Gamma(N)}$  für  $z \in \mathbb{H}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  gilt via  $\begin{pmatrix} 1 & kN \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ . Damit bekommen wir für  $M' := M \cap \{z \in \mathbb{C} \mid -N/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq N/2\}$

$$\mathrm{Vol}_{Y(\Gamma(N))}(M) \leq \int_{M'} \frac{dx dy}{y^2},$$

wobei  $\frac{dx dy}{y^2}$  das  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -invariante Maß auf  $\mathbb{H}$  ist.

- (iii) Für die Definition von  $M'$  spielt nur eine endliche Anzahl an Kreisen eine Rolle: Da  $\alpha < 1 + \frac{2}{N-1} < 2$  (wegen  $N > 2$ ) und  $|g/c| \leq |g/N| < 1/2$  gilt, haben alle in der Definition von  $M$  auftretenden Kreise Radius  $< 1$ . Damit muss  $|d/c| \leq N/2 + 1$  gelten, damit ein Kreis  $\overline{B}_{\alpha|g/c|}(-d/c)$  überhaupt in das Gebiet  $\{z \in \mathbb{C} \mid -N/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq N/2\}$  hineinragt, also

$$|d| \leq |c|(N/2 + 1) \leq \frac{N^2(N+2)}{4g}.$$

Sei

$$K := \{(c, d) \equiv (0, g) \mid 0 < |c| < \frac{N^2}{2g}, |d| \leq \frac{N^2(N+2)}{4g}\}$$

die Menge der Indices  $(c, d)$  dieser Kreise. Wegen  $d \equiv g$  gibt es höchstens  $\frac{N(N+2)}{2g}$  Werte für  $d$ , die für  $(c, d) \in K$  in Frage kommen. Zudem gibt es wegen  $0 < |c| < N^2/(2g)$ ,  $c \equiv 0$  höchstens  $\frac{N}{g}$  Werte für  $c$ , die in Frage kommen. Insgesamt betrachten wir also  $|K| \leq \frac{N^2(N+2)}{2g^2} < \frac{N^3}{g^2}$  Kreise.

(iv) Das Volumen  $\int_{M'} \frac{dx dy}{y^2}$  lässt sich schreiben als

$$\int_{M'} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{-N/2}^{N/2} \int_{\underline{h}(x)}^{\bar{h}(x)} \frac{dy dx}{y^2},$$

für  $\underline{h}(x) := \inf\{y \mid x + iy \in M'\}$  und  $\bar{h}(x) := \sup\{y \mid x + iy \in M'\}$ . Wir definieren die Breite  $B$  von  $M'$  als

$$B := \sup_{-N/2 \leq x \leq N/2} (\bar{h}(x) - \underline{h}(x)).$$

Um diese abzuschätzen seien  $z = x + iy$ ,  $z' = x + iy' \in M$ ,  $y' \geq y$ . Da  $z' \in M$  ist, gibt es ein  $(c, d) \equiv (0, g)$ ,  $0 < |c| < \frac{N^2}{2g}$  mit  $z' \in \bar{B}_{\alpha|g/c|}(-d/c)$ , also ist  $y' \leq \sqrt{\alpha^2(g/c)^2 - (x + d/c)^2}$ . Wegen  $z \in M$  ist aber  $z \notin B_{|g/c|}(-d/c)$ . Wir unterscheiden zwei Fälle.

a)  $|x + d/c| \leq |g/c|$ : Dann ist  $y \geq \sqrt{(g/c)^2 - (x + d/c)^2}$ , also

$$y' - y \leq \sqrt{\alpha^2(g/c)^2 - (x + d/c)^2} - \sqrt{(g/c)^2 - (x + d/c)^2},$$

was für  $|x + d/c| = |g/c|$  maximal wird, also gilt  $y' - y \leq |g/c| \sqrt{\alpha^2 - 1}$ .

b)  $|x + d/c| > |g/c|$ : Dann ist  $y > 0$ , also

$$\begin{aligned} y' - y &< \sqrt{\alpha^2(g/c)^2 - (x + d/c)^2} \\ &< \sqrt{\alpha^2(g/c)^2 - (g/c)^2} \\ &= |g/c| \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned}$$

Wegen  $|c| \geq N$  ist insgesamt also

$$B \leq |g/N| \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

(v) An jedem Punkt  $x \in [-N/2, N/2]$  wird die untere Grenze  $\underline{h}(x)$  durch einen Kreis  $B_{|g/c|}(-d/c)$  mit  $(c, d) \in K$  bestimmt. Dies lässt uns wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_{-N/2}^{N/2} \int_{\underline{h}(x)}^{\bar{h}(x)} \frac{dy dx}{y^2} &\leq \sum_{(c,d) \in K} \int_{-d/c-|g/c|}^{-d/c+|g/c|} \int_{\underline{h}(x)}^{\bar{h}(x)} \frac{dy dx}{y^2} \\ &\leq |K| \max_{(c,d) \in K} \int_{-d/c-|g/c|}^{-d/c+|g/c|} \int_{\underline{h}(x)}^{\bar{h}(x)} \frac{dy dx}{y^2}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\underline{h}(x) \geq \sqrt{(g/c)^2 - (x + d/c)^2}$  und  $\bar{h}(x) - \underline{h}(x) \leq B$ , also bekommen wir

$$\int_{-d/c-|g/c|}^{-d/c+|g/c|} \int_{\underline{h}(x)}^{\bar{h}(x)} \frac{dy dx}{y^2} \leq \int_{-|g/c|}^{|g/c|} \int_{\sqrt{(g/c)^2 - x^2}}^{\sqrt{(g/c)^2 - x^2} + B} \frac{dy dx}{y^2}.$$

Dieses Integrationsgebiet erweitern wir zu

$$\int_{-|g/c|}^{|g/c|} \int_{\sqrt{(g/c)^2-x^2}}^{\sqrt{(g/c)^2-x^2}+B} \frac{dydx}{y^2} \leq \int_{-|g/c|}^{|g/c|} \int_{\sqrt{(g/c)^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dydx}{y^2},$$

mit  $R := |g/c| + |g/N|\sqrt{\alpha^2-1} \geq |g/c| + B$ , also tatsächlich  $\sqrt{R^2-x^2} \geq B + \sqrt{(g/c)^2-x^2}$ . Damit steht auf der rechten Seite ein elementar berechenbares Integral, nämlich

$$\begin{aligned} 2 \arccos\left(\frac{g}{|c|R}\right) &= 2 \arccos\left(\frac{1}{1 + |c/N|\sqrt{\alpha^2-1}}\right) \\ &\leq 2 \arccos\left(\frac{1}{1 + \frac{N}{2g}\sqrt{\alpha^2-1}}\right) \end{aligned}$$

(vi) Zusammen ergeben (i), (ii), (iii) und (v) nun wegen  $g \geq 1$  eine obere Schranke von

$$N^4 |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)| \arccos\left(\frac{1}{1 + \frac{N}{2}\sqrt{\alpha^2-1}}\right)$$

für das Volumen von  $\Sigma_{\leq \alpha}^{\bar{u}}$  in  $Y(\Gamma(N))$ . □

Mithilfe dieser Volumenabschätzung und Satz 5.2 können wir nun zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  eine Obermenge  $M_k$  der Nullstellen von  $E_k^{\bar{u}}$  angeben, deren Volumen in  $Y(\Gamma(N))$  gegen 0 geht für  $k \rightarrow \infty$ . Damit haben wir diese Nullstellen in eine kleine Menge eingeschlossen.

**Korollar 5.4.** *Wir können Mengen  $M_3 \supseteq M_4 \supseteq \dots$  in  $\mathbb{H}$  angeben, sodass  $M_k$  eine Obermenge der Nullstellen von  $E_k^{\bar{u}}$  ist und  $\mathrm{Vol}_{Y(\Gamma(N))}(M_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

*Beweis.* Wir wollen für  $k$  groß genug  $M_k = \Sigma_{\leq \alpha(k)}^{\bar{u}}$  wählen für eine Folge  $(\alpha(k))_{k \in \mathbb{N}}$ . Sei dazu  $C > 0$  die Konstante aus Satz 5.2. Wir beobachten, dass die Funktion  $h: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\alpha \mapsto 2 + \log_{\alpha}\left(\frac{C N^2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right)$$

streng monoton fallend ist, es existiert also eine Umkehrfunktion  $h^{-1}(x)$ . Sei  $k_0 := \lceil h(1 + \frac{2}{N-1}) \rceil$ . Wir setzen für  $k \geq k_0 + 2$

$$\alpha(k) := h^{-1}(k-1).$$

Nun gilt für  $M_k = \Sigma_{\leq \alpha(k)}^{\bar{u}}$ ,  $k \geq k_0 + 2$ , dass  $M_k$  eine Obermenge der Nullstellen von

$E_k^{\bar{u}}$  ist, denn

$$k > k - 1 = h(\alpha(k)) = 2 + \log_{\alpha(k)} \left( \frac{C N^2}{\sqrt{\alpha(k)^2 - 1}} \right) \geq 2 + \log_{\alpha(k)} \left( \frac{C N^2}{g^2 \sqrt{\alpha(k)^2 - 1}} \right),$$

für jedes  $g \geq 1$ , also lässt sich Satz 5.2 anwenden.

Zudem ist  $1 < \alpha(k) < 1 + \frac{2}{N-1}$ , also bekommen wir durch Lemma 5.3 eine obere Schranke für das Volumen von  $M_k$ , und wir sehen sofort ein, dass  $\text{Vol}_{Y(\Gamma(N))}(M_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Setzen wir noch  $M_k := \mathbb{H}$  für  $k < k_0 + 2$  so folgt die Behauptung.  $\square$

# 6

## Isolierte Nullstellen

Nun wollen wir die Nullstellen von  $E_k^{\overline{(0,g)}}$  in  $\Lambda^{(0,g)} \setminus \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  bestimmen. Dort ist neben dem Summanden  $g^{-k}$  mindestens ein weiterer Summand  $(cz + d)^{-k}$  „groß“, denn wir befinden uns in einem Kreis  $B_{\alpha|g/c|}(-d/c)$  (nach Proposition 4.2). Also betrachten wir die beiden Summanden  $g^{-k} + (cz + d)^{-k}$  zusammen. Ihre Nullstellen lassen sich leicht explizit bestimmen, sie liegen auf dem Rand des Kreises  $B_{|g/c|}(-d/c)$ . Um diese Nullstellen finden wir nun Umgebungen  $\Delta$ , in denen auch  $E_k^{\overline{(0,g)}}$  genau eine Nullstelle hat, zumindest sofern kein anderer Kreis  $B_{\alpha|g/c'|}(-d'/c')$  mit  $\Delta$  nichtleeren Schnitt hat. In solchen Gebieten können wir also Nullstellen von  $E_k^{\overline{(0,g)}}$  isolieren und sogar recht genau angeben.

**Lemma 6.1.** *Sei  $(c, d) \equiv (0, g)$ ,  $c \neq 0$ . Dann hat die Funktion  $z \mapsto g^{-k} + (cz + d)^{-k}$  in  $\mathbb{C}$  genau die Nullstellen  $z = \frac{1}{c} \left( g e^{\frac{2\pi i(m+1/2)}{k}} - d \right)$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq m < k$ .*

*Beweis.* Es ist  $g^{-k} + (cz + d)^{-k} = 0$  genau dann, wenn

$$-g^k = (cz + d)^k,$$

was genau dann gilt, wenn

$$z = \frac{\eta g - d}{c},$$

mit  $\eta \in \mathbb{C}$ ,  $\eta^k = -1$ . Man kann also  $\eta$  als  $e^{\frac{2\pi i(m+1/2)}{k}}$  wählen für  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq m < k$ .  $\square$

Nun betrachten wir Umgebungen um diese Nullstellen von folgender Form.

**Definition 6.2.** *Für  $g \in \mathbb{N}$ ,  $0 < g < N/2$ ,  $(c, d) \equiv (0, g)$ ,  $c \neq 0$ ,  $k, \ell \in \mathbb{N}$  und  $\alpha > 1$  sei*

$$\Delta := \Delta_{\alpha, \ell, k, (0, g), (c, d)} := \left\{ \frac{1}{c} \left( r g e^{\frac{2\pi i x}{k}} - d \right) \mid \frac{1}{\alpha} < r < \alpha, \ell < x < \ell + 1 \right\}.$$



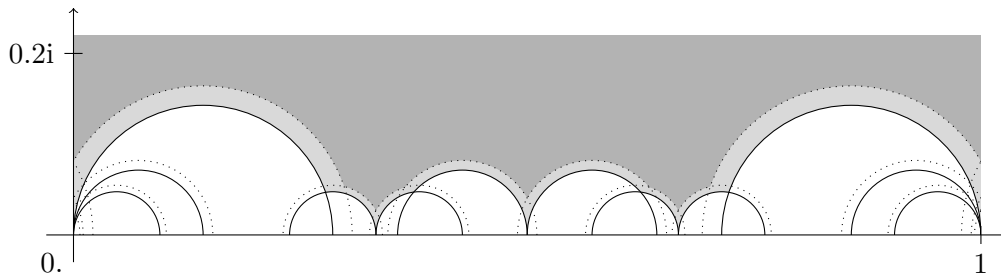


Abbildung 6.1: Wie die Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigt diese Abbildung zeigt die Mengen  $\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  (■) und  $\Lambda^{(0,g)} \setminus \Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$  (■) für  $N = 7$ ,  $g = 1$  und  $\alpha = 1.15$ . Eingezeichnet sind auch die von Proposition 4.2.(ii) und (iii) geforderten Kreise  $B_{|g/c|}(-d/c)$  (○) und  $B_{\alpha|g/c|}(-d/c)$  (⊙).

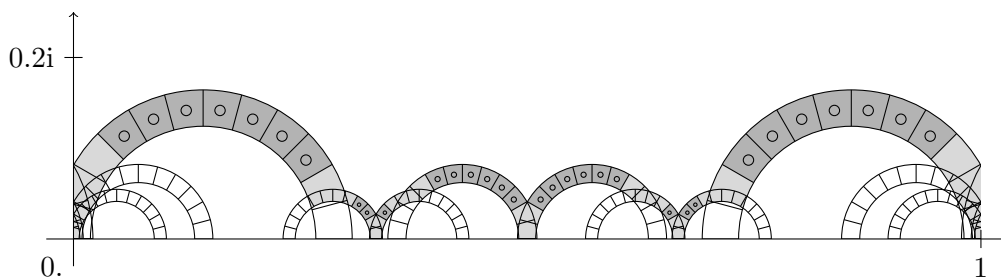


Abbildung 6.2: Diese Abbildung zeigt die Gebiete  $\Delta$  (□) zu  $N = 7$ ,  $g = 1$ ,  $\alpha = 1.15$ ,  $k = 24$ . Markiert sind solche  $\Delta$  (■), die weit genug von den Spitzen entfernt liegen und keinen nichtleeren Schnitt mit einem anderen  $\Delta'$  haben. In diesen können wir eine Nullstelle von  $E_k^{(0,g)}$  isolieren und recht genau bestimmen (○). Über die Nullstellen in den verbleibenden Gebieten (■) können wir nichts aussagen.

In diesen Gebieten liegt genau eine Nullstelle von  $g^{-k} + (cz + d)^{-k}$ . In Gebieten  $\Delta$ , in denen der drittgrößte Summand klein ist, können wir diese Aussage auf  $E_k^{(0,g)}$  ausweiten: Auch  $E_k^{(0,g)}$  hat dann in  $\Delta$  genau eine Nullstelle.

Dieses Verhalten ist in Abbildung 6.2 zu sehen, man vergleiche auch mit Abbildung 6.1. Dort ist eingezeichnet, für welche Gebiete  $\Delta$  wir eine Nullstelle isolieren können.

**Satz 6.3.** *Seien*

- $g \in \mathbb{N}, g < N/2$  und  $1 < \alpha < N/g - 1$ ,
- $\Delta$  wie in Definition 6.2 mit  $\Delta \subset \mathbb{H}$ ,
- $\Delta \cap B_{\alpha|g/c'|}(-d'/c') = \emptyset$  für alle  $(c', d') \equiv (0, g)$ ,  $c' \neq 0$ ,  $(c', d') \neq (c, d)$ ,
- $k > 6 + 2 \log_{\alpha} \left( \frac{CN^2}{g^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right)$ .

Dann hat  $E_k^{(0,g)}$  in  $\Delta$  genau eine Nullstelle.

Dabei ist  $C > 0$  eine Konstante, die unabhängig von allen auftretenden Parametern ist.

Dabei beschränkt  $\alpha$  die Größe des drittgrößten Summanden. Ist es durch eine Konstante beschränkt und ist  $k$  groß genug, so erhalten wir, dass in  $\Delta$  genau eine Nullstelle von  $E_k^{(0,g)}$  liegt.

Es mag auffallen, dass wir damit nicht die Nullstellen von  $E_k^{(0,g)}$  in  $\Lambda^{(0,g)}$  isolieren, denn  $\Delta$  liegt nicht nur in  $\Lambda^{(0,g)}$  sondern auch in  $\Lambda^{(c,d)}$ . Es dürfte allerdings nicht leicht sein zu bestimmen, ob die isolierte Nullstelle in  $\Lambda^{(0,g)}$  oder  $\Lambda^{(c,d)}$  fällt. Zudem ist klar, dass wir dasselbe Gebiet  $\Delta$  erhalten, wenn wir es von  $\Lambda^{(c,d)}$  aus definieren, d.h. wenn wir die Rolle von  $g^{-k}$  und  $(cz + d)^{-k}$  bei der Definition vertauschen. Dadurch zählen wir jede isolierte Nullstelle aus genau zwei Richtungen.

*Beweis.* (i) Sei  $T_k(z) := g^{-k} + (cz + d)^{-k}$  und  $k \geq \log_{\alpha} 3$ . Wir benötigen eine Abschätzung von  $|T_k(z)|$  auf dem Rand von  $\Delta$ . Dazu betrachten wir 3 Abschnitte auf diesem Rand:

- a) Für  $r = \alpha$  ist  $|cz + d|^{-k} = (\alpha g)^{-k}$ , also  $|T_k(z)| \geq g^{-k}(1 - \alpha^{-k})$ .
- b) Für  $r = 1/\alpha$  ist  $|cz + d|^{-k} = \alpha^k g^{-k}$ , also  $|T_k(z)| \geq g^{-k}(\alpha^k - 1)$ .
- c) Für  $x = \ell$  oder  $x = \ell + 1$  ist  $(cz + d)^{-k} = (rg)^{-k}$ , also  $|T_k(z)| = g^{-k}(1 + r^{-k}) \geq g^{-k}$ .

Insgesamt ist also  $|T_k(z)| \geq g^{-k}(1 - \alpha^{-k})$  auf  $\partial\Delta$ . Wegen  $k \geq \log_{\alpha} 3$  ist  $1 - \alpha^{-k} \geq \alpha^{-k/2}$ , also

$$|T_k(z)| \geq \alpha^{-k/2} g^{-k}. \quad (6.1)$$

- (ii) Wir wollen Lemma 5.1 mit  $\alpha' := \sqrt{\alpha}$  auf  $\partial\Delta$  verwenden um dort  $|T_k(z)| > |E_k^{(0,g)}(z) - T_k(z)|$  zu bekommen. Die ersten beiden Voraussetzungen von Lem-

ma 5.1 sind trivialerweise erfüllt. Zudem gilt für alle  $(c', d') \equiv (0, g)$ ,  $c' \neq 0$ ,  $(c', d') \neq (c, d)$

$$\begin{aligned} |T_k(z)| &\stackrel{(6.1)}{\geq} \alpha^{-k/2} g^{-k} > \alpha^{-k/2} \alpha^k |c' z + d'|^{-k} \\ &= (\alpha')^k |c' z + d'|^{-k}, \end{aligned}$$

wobei wir die Voraussetzung  $\Delta \cap B_{\alpha|g/c'|}(-d'/c') = \emptyset$  verwendet haben. Für einen Summanden  $(0, d') \equiv (0, g)$ ,  $d \neq g$  gilt zudem wegen  $\alpha < N/g - 1$

$$\begin{aligned} |d'|^{-k} &< (N - g)^{-k} \leq \alpha^{-k} g^{-k} \\ &\leq \alpha^{-k} \alpha^{k/2} |T_k(z)| \\ &= (\alpha')^{-k} |T_k(z)|, \end{aligned}$$

also ist die dritte Voraussetzung von Lemma 5.1 erfüllt. Wir erhalten, dass für

$$k > 2 + 2 \log_{\alpha} \left( C \left( 1 + \frac{1}{y^*} \right) \left( 1 + \frac{1}{N^k |T_k(z)|} \right) \right) \quad (6.2)$$

die Ungleichung  $|T_k(z)| > |E_k^{\overline{(0,g)}}(z) - T_k(z)|$  gilt, wobei  $y^* := \inf\{\text{Im}(z) \mid z \in \Delta\}$ .

(iii) Die Ungleichung  $|T_k(z)| > |E_k^{\overline{(0,g)}}(z) - T_k(z)|$  erlaubt uns den Satz von Rouché (Satz 2.1) anzuwenden: Sei  $G = \mathbb{H}$ ,  $\gamma$  eine Kurve, die den Rand  $\partial\Delta$  genau einmal abläuft,  $f := T_k(z)$  und  $g := E_k^{\overline{(0,g)}}(z) - T_k(z)$ . Darauf angewendet liefert der Satz von Rouché, dass  $T_k(z)$  und  $E_k^{\overline{(0,g)}}(z)$  gleich viele Nullstellen haben in  $\Delta$ , nämlich genau eine (wegen Lemma 6.1), und dass  $E_k^{\overline{(0,g)}}(z)$  auf  $\partial\Delta$  keine Nullstelle hat. Dies ist die gewünschte Behauptung.

(iv) Wir wollen noch die Schranken an  $k$  vereinfachen. Dazu bemerken wir, dass wegen  $\alpha < N/g - 1$  gilt

$$\frac{1}{N^k |T_k(z)|} \stackrel{(6.1)}{\leq} \frac{g^k \alpha^{k/2}}{N^k} \leq 1.$$

Damit vereinfacht sich Ungleichung (6.2) zu

$$k > 2 + 2 \log_{\alpha} \left( C_2 \left( 1 + \frac{1}{y^*} \right) \right).$$

Zudem beobachten wir noch, dass  $k \geq \log_{\alpha} 3$  schon von obiger Schranke impliziert wird (zumindest nachdem wir  $C_2 \geq 3$  setzen).

(v) Wir betrachten den „oberen Rand“  $S$  von  $\Delta$ ,

$$S := \left\{ \frac{1}{c} \left( \alpha g e^{\frac{2\pi i x}{k}} - d \right) \mid \ell < x < \ell + 1 \right\},$$

und  $y' := \inf\{\operatorname{Im}(z) \mid z \in S\}$ . Man sieht sofort, dass

$$y^* = y'/\alpha^2.$$

Nun ist  $S \subset \partial\Lambda_{>\alpha}^{(0,g)}$ , also lässt sich Lemma 4.6 anwenden und wir erhalten

$$y' \geq 2(g/N)^2 \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

also

$$y^* \geq \frac{2g^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}}{N^2 \alpha^2}.$$

Wegen  $\alpha \leq N/g - 1$ ,  $g < N/2$  ist die rechte Seite davon durch 1 nach oben beschränkt. Daher können wir die Schranke an  $k$  vereinfachen zu

$$\begin{aligned} k &> 2 + 2 \log_{\alpha} \left( C_3 \frac{N^2 \alpha^2}{2g^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) \\ &\geq 6 + 2 \log_{\alpha} \left( \frac{C_4 N^2}{g^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right). \end{aligned}$$

□

Die von Satz 6.3 garantierte Nullstelle von  $E_k^{(0,g)}$  in  $\Delta$  können wir noch genauer angeben. Sie weicht von der Nullstelle von  $g^{-k} + (cz+d)^{-k}$  nur um einen in  $k$  exponentiell kleinen Term ab.

**Satz 6.4.** *Sei  $\varepsilon > 0$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 6.3, also insbesondere*

$$k > 6 + 2 \log_{\alpha} \left( \frac{C_{\varepsilon} N^2}{g^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right)$$

*sei  $z_0 = \frac{1}{c} \left( g e^{\frac{2\pi i(\ell+1/2)}{k}} - d \right)$  die Nullstelle von  $g^{-k} + (cz+d)^{-k}$  in  $\Delta$  und  $z'_0$  die Nullstelle von  $E_k^{(0,g)}(z)$  in  $\Delta$ . Dann gilt*

$$|z_0 - z'_0| \leq (1 + \varepsilon) \left| \frac{g}{c} \right| \frac{\alpha^{-k/2}}{k}.$$

*Dabei müssen wir  $C_{\varepsilon}$  abhängig von  $\varepsilon$  unter Umständen größer wählen als  $C$  in Satz 6.3.*

*Beweis.* Sei  $z^* = \frac{1}{c} \left( g(1 + \xi) e^{\frac{2\pi i(\ell+1/2)}{k}} - d \right)$  mit einem  $\xi \in \mathbb{C}$ ,  $|\xi| < \frac{1}{k}$ . Wir betrachten  $T_k(z) := g^{-k} + (cz+d)^{-k}$  an  $z^*$ . Es ist

$$|T_k(z^*)| = g^{-k} |1 - (1 + \xi)^{-k}|,$$

und

$$\begin{aligned}
|1 - (1 + \xi)^{-k}| &= \frac{|(1 + \xi)^k - 1|}{|1 + \xi|^k} \\
&\geq \frac{k|\xi| - \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} |\xi|^j}{(1 + |\xi|)^k} \\
&\geq \frac{k|\xi| - \sum_{j=2}^{\infty} k^j |\xi|^j}{(1 + |\xi|)^k} \\
&= \frac{k|\xi|(1 - \frac{k|\xi|}{1 - k|\xi|})}{(1 + |\xi|)^k}.
\end{aligned}$$

Wir wählen  $|\xi| = (1 + \varepsilon) \frac{\alpha^{-k/2}}{k} \leq \frac{1 + \varepsilon}{C_\varepsilon k}$ . Ist nun  $C_\varepsilon$  groß genug gewählt (in Abhängigkeit von  $\varepsilon$ ) so ist tatsächlich  $|\xi| < \frac{1}{k}$ . Zudem geht  $\frac{1 - \frac{k|\xi|}{1 - k|\xi|}}{(1 + |\xi|)^k}$  gegen 1 mit  $C_\varepsilon \rightarrow \infty$ , also können wir  $C_\varepsilon$  groß genug wählen, sodass dieser Wert mindestens  $1/(1 + \varepsilon)$  ist. Dann ist

$$|1 - (1 + \xi)^{-k}| \geq \alpha^{-k/2},$$

also

$$|T_k(z^*)| \geq \alpha^{-k/2} g^{-k}.$$

Dies gilt für alle  $z^*$  auf dem Rand des Gebietes

$$D := \left\{ \frac{1}{c} \left( g(1 + \xi) e^{\frac{2\pi i(\ell+1/2)}{k}} - d \right) \mid \xi \in \mathbb{C}, |\xi| \leq (1 + \varepsilon) \frac{\alpha^{-k/2}}{k} \right\}.$$

Wir folgen (ii)-(v) im Beweis von Satz 6.3 nun mit  $\Delta \cap D$  statt  $\Delta$  und erhalten, dass  $T_k(z)$  und  $E_k^{(0,g)}(z)$  in  $\Delta \cap D$  gleich viele Nullstellen haben, nach Lemma 6.1 also eine.

Diese Nullstelle  $z'_0$  von  $E_k^{(0,g)}(z)$  lässt sich schreiben als  $z'_0 = \frac{1}{c} \left( g(1 + \xi) e^{\frac{2\pi i(\ell+1/2)}{k}} - d \right)$  mit einem  $\xi \in \mathbb{C}$ ,  $|\xi| \leq (1 + \varepsilon) \frac{\alpha^{-k/2}}{k}$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
|z_0 - z'_0| &= \left| \frac{g}{c} \xi e^{\frac{2\pi i(\ell+1/2)}{k}} \right| \\
&\leq \left| \frac{g}{c} \right| (1 + \varepsilon) \frac{\alpha^{-k/2}}{k}.
\end{aligned}$$

□

# Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$ .....	Die Menge der natürlichen Zahlen (ohne 0), $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\lfloor x \rfloor$ .....	Die größte ganze Zahl $n$ mit $n \leq x$
$E_k^{\bar{u}}(z)$ .....	Eisensteinreihe zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ , S. 12
$N$ .....	Natürliche Zahl zu der wir die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ betrachten, S. 12
$k$ .....	Gewicht der Eisensteinreihe $E_k^{\bar{u}}(z)$ , S. 12
$\bar{u}$ .....	$\bar{u} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ von Ordnung $N$ , Index der Eisensteinreihe $E_k^{\bar{u}}(z)$ , S. 12
$\Lambda^{(c,d)}$ .....	Summandengebiet, in dem der Summand zu $(cz+d)^{-k}$ betragsmäßig maximal ist für $E_k^{\bar{u}}(z)$ , S. 13
$\Lambda_{>\alpha}^{(c,d)}$ .....	Gebiet, in dem der Summand zu $(cz+d)^{-1}$ betragsmäßig um einen Faktor $\alpha$ größer ist als alle anderen Summanden von $E_k^{\bar{u}}(z)$ , S. 13
$\Sigma_{\leq\alpha}^{\bar{u}}$ .....	Die (verallgemeinerte) Ausnahmemenge, nur hier kann $E_k^{\bar{u}}(z)$ Nullstellen haben, S. 13
$T_k(z)$ .....	Eine endliche Teilsumme der Eisensteinreihe $\overline{E_k^{(0,g)}}(z)$ , S. 24
$\Delta$ .....	Gebiet, in der wir unter gewissen Voraussetzungen eine Nullstelle von $\overline{E_k^{(0,g)}}(z)$ isolieren können, S. 32
$C, C_1, C_2$ usw. ....	Positive reelle Konstanten, die anhand der Beweise explizit ausgerechnet werden können
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .....	Modulgruppe, S. 8
$\Gamma(N)$ .....	Hauptkongruenzuntergruppe, S. 8
$\mathbb{H}$ .....	obere Halbebene, S. 9
$Y(\Gamma)$ .....	Modulkurve, S. 10
$\mathcal{D}$ .....	Fundamentalebene, S. 10
$ds^2$ .....	invariante Metrik, S. 10
$dv$ .....	invariantes Maß, S. 10
$\mathrm{Vol}_{Y(\Gamma)}(M)$ .....	Volumen von $M$ in $Y(\Gamma)$ , S. 10
$X(\Gamma)$ .....	kompaktifizierte Modulkurve, S. 11
$\mathbb{H}^*$ .....	obere Halbebene erweitert um $\mathbb{Q}$ und $\infty$ , S. 11

# Literaturverzeichnis

- [Cum10] C. J. Cummins, *Fundamental domains for genus-zero and genus-one congruence subgroups*, LMS Journal of Computation and Mathematics **13** (2010), 222–245.
- [DS05] F. Diamond and J.M. Shurman, *A First Course in Modular Forms*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2005.
- [EBS10] A. El Basraoui and A. Sebbar, *Zeros of the Eisenstein series  $E_2$* , Proceedings of The American Mathematical Society **138** (2010), 2289–2299.
- [FB06] E. Freitag and R. Busam, *Funktionentheorie 1*, Springer-Lehrbuch, Springer, 2006.
- [Get04] J. Getz, *A generalization of a theorem of Rankin and Swinnerton-Dyer on zeros of modular forms*, Proceedings of The American Mathematical Society **132** (2004), 2221–2231.
- [GLST10] S. Garthwaite, L. Long, H. Swisher, and S. Treneer, *Zeros of some level 2 Eisenstein series*, Proceedings of The American Mathematical Society **138** (2010), 467–480.
- [Hah07] H. Hahn, *On zeros of Eisenstein series for genus zero Fuchsian groups*, Proceedings of The American Mathematical Society **135** (2007), 2391–2401.
- [Miy06] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2006.
- [MNS07] T. Miezuki, H. Nozaki, and J. Shigezumi, *On the zeros of Eisenstein series for  $\Gamma_0^*(2)$  and  $\Gamma_0^*(3)$* , Journal of the Mathematical Society of Japan **59** (2007), no. 3, 693–706.
- [Noz08] H. Nozaki, *A separation property of the zeros of Eisenstein series for  $SL_2(\mathbb{Z})$* , Bulletin of the London Mathematical Society **40** (2008), no. 1, 26–36.
- [Ran82] R. A. Rankin, *The zeros of certain Poincaré series*, Compositio Math. **46** (1982), no. 3, 255–272.
- [RSD70] F. K. C. Rankin and H. P. F. Swinnerton-Dyer, *On the Zeros of Eisenstein Series*, Bulletin of the London Mathematical Society **2** (1970), no. 2, 169–170.
- [Shi07] J. Shigezumi, *On the zeros of the Eisenstein series for  $\Gamma_0^*(5)$  and  $\Gamma_0^*(7)$* , Kyushu Journal of Mathematics **61** (2007), no. 2, 527–549.