

Zetafunktionen arithmetisch definierter Graphen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von
Ortwin Scheja

Saarbrücken
1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Grundlagen	11
1.1 Graphen und Wege	11
1.2 Operatoren auf Graphen	17
1.3 Spektren von Graphen und Expansion	20
1.4 Formale Potenzreihenringe	23
1.5 Gruppenoperationen auf Graphen	25
2 Die Zetafunktion von Graphen	28
2.1 Erzeugende Funktionen	28
2.2 Die Zetafunktion	31
3 Die L-Funktion von Graphen	38
3.1 Graphen von Gruppen	38
3.2 Die universelle Überlagerung von \mathbb{Y}	40
3.3 G -äquivariante Funktionen auf X	42
3.4 Die L -Funktion $L(X, G, \rho; \mathbf{u})$	45
3.5 Rationalität der L -Funktion	50
3.6 Der Zusammenhang mit dem Laplace-Operator	52
4 Arithmetische Graphen	55
4.1 Gruppenoperationen auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T}	55
4.2 Kongruenzgraphen	58
4.3 Die Darstellungen der Gruppe $G(n)$ für irreduzibles n	65
5 Zetafunktionen der endlichen Hauptkongruenzgraphen	72
5.1 Berechnungsgraphen	73
5.2 Berechnungsgraphen der Hauptserie	74
5.3 Berechnungsgraphen zu supercuspidalen Darstellungen	84
5.4 Explizite Formeln und Anwendungen	87
6 Zetafunktionen der vollen Hauptkongruenzgraphen	95
6.1 Grundlegende Eigenschaften	95
6.2 Hauptkongruenzgraphen	101
6.3 Beschluß	104
Index	108
Symbolverzeichnis	110
Literatur	112

Tag des Kolloquiums: 19.2.1999

Dekan: Prof. Dr. Th. Eicher

Berichterstatter: Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Prof. Dr. R. Schulze-Pillot

Einleitung

Die Fundamentalgruppe $\Gamma = \pi(Y, v_0)$ und die universelle Überlagerung \tilde{Y} eines endlichen, zusammenhängenden Graphen Y mit Aufpunkt v_0 kann man vollständig durch den Graphen selbst beschreiben. Die Knoten von \tilde{Y} entsprechen den reduzierten Wegen mit Anfangsknoten v_0 , die Elemente von Γ den *geschlossenen* reduzierten Wegen mit Anfangsknoten v_0 . Es ist nicht ausgeschlossen, daß die erste und die letzte Kante eines solchen Weges invers zueinander sind. Kürzt man sukzessive die erste und die letzte Kante, solange dies der Fall ist, erhält man einen geschlossenen, *stark* reduzierten Weg (mit eventuell geändertem Anfangsknoten). Die geschlossenen, stark reduzierten Wege $SG(Y)$ sind also dadurch charakterisiert, daß jede Rotation dieser Wege wieder reduziert ist. Die nichttrivialen Konjugationsklassen von Γ entsprechen dann gerade den Äquivalenzklassen geschlossener, stark reduzierter Wege modulo Rotation — den reduzierten Zykeln $\mathcal{RZ}(Y)$ von Y . Dem Zykel P , und damit der zugehörigen Konjugationsklasse $\langle P \rangle$ in Γ , wird durch $\deg(\langle P \rangle) := \deg(P) := l(P)$ die Länge eines zugrundeliegenden stark reduzierten Weges zugewiesen.

Die Zetafunktion $Z_Y(u)$ von Y ist dann definiert als die formale Potenzreihe

$$Z_Y(u) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{RZ}(Y) \\ P \text{ primitiv}}} (1 - u^{\deg(P)})^{-1} = \exp \sum_{W \in SG(Y)} \frac{u^{l(W)}}{l(W)}.$$

Primitive Zykeln sind dabei solche, die sich nicht als echte Potenzen kleinerer Zykeln schreiben lassen; der Bruch $(1 - u^{\deg(P)})^{-1}$ ist der Eulerfaktor zu P . Die multiplikative und die additive Schreibweise lassen sich leicht ineinander überführen.

Ist $\rho : \Gamma \rightarrow U_n(V_\rho)$ eine n -dimensionale, unitäre Darstellung von Γ , so erhält man als Verallgemeinerung von $Z_Y(u)$ die L -Funktion

$$L_Y(\rho; u) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{RZ}(Y) \\ P \text{ primitiv}}} \det(I - \rho(\langle P \rangle) u^{\deg(P)})^{-1} = \exp \sum_{W \in SG(Y)} \frac{\text{tr} \rho(\langle W \rangle)}{l(W)} u^{l(W)}.$$

Im Fall $\rho = 1$ ist $Z_Y(u) = L_Y(1; u)$.

Die Zetafunktion von Graphen wurde das erste Mal von Ihara in [Ih] untersucht, dort allerdings als Zetafunktion $Z_\Gamma(u)$ endlich erzeugter freier Untergruppen $\Gamma \subseteq PGL_2(K_\nu)$, wobei K_ν ein diskret bewerteter, vollständiger Körper ist. Die Konjugationsklassen γ^σ von $\Gamma \subseteq PGL_2(K_\nu)$ besitzen eine natürliche Gradstruktur, die durch die Arithmetik vorgegeben ist. Die Gruppe $PGL_2(K_\nu)$ läßt sich durch Übergang zum Quotienten $PGL_2(K_\nu)/PGL_2(O_\nu)$ (O_ν bezeichne

den Bewertungsring von K_ν) als Knotenmenge des Bruhat-Tits-Baumes \mathcal{T} interpretieren und Γ als Fundamentalgruppe des Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{T}$, siehe [Se]. Die L -Funktion

$$L_\Gamma(\rho; u) = \prod_{\gamma^\sigma \text{ primitiv}} \det(I - \rho(\langle P \rangle) u^{\deg(\gamma^\sigma)})^{-1},$$

wie sie Ihara definiert, entspricht dann genau der L -Funktion des endlichen Quotientengraphen $\Gamma \backslash \mathcal{T}$, da die Gradstruktur auf Γ , die von $PGL_2(K_\nu)$ herrührt, der Gradstruktur entspricht, die durch die Realisierung von Γ als Fundamentalgruppe des Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ definiert wird.

Die L -Funktion von Ihara ist also ein Spezialfall der L -Funktion von Graphen, wie sie dann allgemein in Arbeiten von K. Hashimoto und H. Bass ([H1, H2, Ba1]) untersucht worden ist. Wir stellen kurz ihre Ergebnisse zusammen: A bzw. T bezeichnen die Nachbarschaftsoperatoren auf den Knoten bzw. den orientierten Kanten der universellen Überlagerung \tilde{Y} von Y und Q den Operator, der den Grad (weniger eins) von Knoten bzw. Q den Operator, der den Grad (weniger eins) von Knoten bzw. Q den Operator, der den Grad (weniger eins) von Knoten mißt. Diese Operatoren auf \tilde{Y} induzieren Funktionen auf den Räumen $H_{\rho,0}(\tilde{Y})$ bzw. $H_{\rho,1}(\tilde{Y})$ der Γ -äquivarianten Funktionen auf Knoten bzw. Kanten von \tilde{Y} . Setzt man noch $\Delta_\rho(u) = I_\rho - A_\rho u + Q_\rho u^2$, so sind die Rationalitätsformeln

$$L_Y(\rho; u)^{-1} = \det(I - T_\rho u) = (1 - u^2)^{-\chi_\rho} \det(\Delta_\rho(u))$$

das wichtigste Ergebnis, wobei $\chi_\rho = \dim H_{\rho,0}(\tilde{Y}) - \dim H_{\rho,1}(\tilde{Y})$ sei. Im Fall $\rho = 1$ sind $H_\rho(V\tilde{Y})$ und $H_\rho(E\tilde{Y})$ die Räume der Γ -invarianten Funktionen auf \tilde{Y} , die sich mit den Räumen $C_0(Y)$ bzw. $C_1(Y)$ der Funktionen auf dem endlichen Quotienten $Y = \Gamma \backslash \tilde{Y}$ identifizieren lassen. Es ist dann

$$Z_Y(u)^{-1} = \det(I - T_Y u) = (1 - u^2)^{-\chi(Y)} \det(\Delta(u))$$

mit dem allgemeinen Laplace-Operator $\Delta(u) = \Delta_Y(u) = I - A_Y u + Q_Y u^2$. Die zweite Gleichung enthält insbesondere die Verallgemeinerung einer Formel von Ihara (loc. cit.) auf die allgemeine Situation der L -Funktion von Graphen; sie liefert zudem den Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Laplace-Operator $\Delta = Q + I - A = \Delta(1)$ von Y .

Die Zetafunktion von Graphen ist ein Analogon der Zetafunktion algebraischer Kurven über endlichen Körpern \mathbb{F}_q . Dort wird statt der geschlossenen, stark reduzierten Wege der Länge l die Anzahl der rationalen Punkte der Kurve über den Erweiterungen \mathbb{F}_{q^l} gezählt. Ist Y ein $q+1$ -regulärer Graph, so ist die Analogie besonders deutlich. Die Zetafunktion von Y besitzt nämlich in diesem Fall eine einfache Funktionalgleichung. Definiert man weiterhin für $s \in \mathbb{C}$

$$\zeta_Y(s) := Z_Y(q^{-s}),$$

so ist $\zeta_Y(s)$ eine meromorphe Funktion. Sie erfüllt genau dann die Riemannsche Vermutung (alle Pole im kritischen Streifen liegen auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$),

wenn der im Betrage zweitgrößte Eigenwert λ_2 des Operators A_Y der Abschätzung

$$|\lambda_2| \leq 2\sqrt{q}$$

genügt. Solche Graphen heißen auch Ramanujan-Graphen und spielen in der Kombinatorik eine große Rolle, da sie zum Beispiel sehr gute Expansionseigenschaften besitzen, siehe [Lu, Ch]. Die explizite Konstruktion solcher Graphen ist allerdings sehr schwierig.

Die Zetafunktion ist der aus kombinatorischer Sicht interessante Spezialfall der L -Funktion, da in $Z_Y(u)$ Invarianten von Y wie das Geschlecht, die Taille und die Komplexität kodiert sind. Ihre Eigenschaften lassen sich rein kombinatorisch beweisen. Am Anfang der Arbeit beschränken wir uns daher auf Zetafunktionen und betrachten erst später allgemeiner die L -Funktionen.

In Kapitel 1 führen wir die grundlegenden Begriffe der Graphentheorie ein, die in dieser Arbeit benötigt werden, und diskutieren einige Eigenschaften des Spektrums $\operatorname{Spec}(Y) = \operatorname{Spec}(A_Y)$. Charakteristische Funktionen bzw. Spektren von Operatoren auf Graphen sind schon lange Gegenstand von Untersuchungen in der Kombinatorik. In Kapitel 2 ordnen wir die Theorie der Zetafunktion von Graphen in diesen Kontext ein. Die Verbindung von Wegen in Y und dem Nachbarschaftsoperator A_Y ist durch die Gleichung

$$\det(I - A_Y u) = \exp \sum_{l>0} \frac{\#\mathcal{G}^l(Y)}{l} u^l$$

gegeben, wobei $\mathcal{G}^l(Y)$ die Menge der geschlossenen Wege in Y bezeichnet. Wir führen diese Zusammenhänge in Abschnitt 2.1 aus und folgen dabei [Ka]. Dann zeigen wir, wie sich

$$\det(I - T_Y u) = \exp \sum_{l>0} \frac{\#\mathcal{S}\mathcal{G}^l(Y)}{l} u^l$$

und damit die Rationalität von $Z_Y(u)$ mit demselben Beweis ergibt. Der Operator T_Y auf Kanten von Y läßt sich als Nachbarschaftsoperator der Knoten des gerichteten Kantengraphen Y_K^+ interpretieren. Die Rationalitätsformel für $Z_Y(u)$ folgt dann allein aus unserer Beobachtung, daß geschlossene, stark reduzierte Wege in Y gerade den geschlossenen Wegen (positiver Länge) in Y_K^+ entsprechen.

Der Ansatz in [Ba1] ist allgemeiner als bisher beschrieben. Bass überträgt den Begriff der L -Funktionen von der Operation der freien Fundamentalgruppe auf der universellen Überlagerung \tilde{Y} eines endlichen Graphen Y auf die allgemeine Situation einer Gruppe G , die diskret (alle Stabilisatoren G_y sind endlich) und ohne Inversion von Kanten auf einem Baum X operiert, so daß der Quotient $G \backslash X$ ein endlicher Graph ist. Er definiert die L -Funktionen $L(X, G, \rho; u)$, indem er nur

noch die Eulerfaktoren der primitiven „hyperbolischen Elemente“ von G berücksichtigt. Die hyperbolischen Elemente, die ein Ende des Baumes X festhalten, werden dabei gemittelt. Auch für diese L -Funktionen gelten die grundlegenden Rationalitätsformeln

$$L(X, G, \rho; u)^{-1} = \det(I - T_\rho u) = (1 - u^2)^{-x_\rho} \det(\Delta_\rho(u)).$$

Bass beschreibt als eine weitere wichtige Eigenschaft der L -Funktion von Graphen ihr Verhalten in Überlagerungen; dies ist eine Verallgemeinerung eines Resultats aus [H2]: Ist $G' \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index, so gilt

$$L(X, G', \rho; u) = L(X, G, \text{ind}_{G'}^G \rho; u).$$

Ist G' insbesondere normal in G , so zerlegt sich

$$L(X, G', 1; u) = \prod_{\rho \in \overline{G/G'}} L(X, G, \rho; u)^{\text{deg}(\rho)}$$

in das Produkt der L -Funktionen der Überlagerung $G' \backslash X \xrightarrow{G/G'} G \backslash X$. (Ist allgemein H eine endliche Gruppe, so bezeichnet \hat{H} die Menge der irreduziblen komplexen Darstellungen von H .) Für die Beweise benötigt Bass allerdings die Theorie nichtkommutativer Determinanten von Operatoren über projektiven $\mathbb{C}[G]$ -Moduln, die er selbst entwickelt (loc. cit.).

Ist G keine freie Gruppe, so besitzt die Überlagerung $G' \backslash X \xrightarrow{G/G'} G \backslash X$ im allgemeinen Verzweigungspunkte. In [H3] verallgemeinert auch Hashimoto den Begriff der L -Funktion auf diesen Fall, falls ρ eine Darstellung von G ist, die über G' faktorisiert. Von Nachteil an diesem Ansatz ist, daß man statt der globalen Operation auf der universellen Überlagerung Gruppenoperationen auf Zwischenüberlagerungen betrachten muß, die keine Bäume mehr sind.

Wir geben in Kapitel 3 eine neue Definition der L -Funktionen $L(X, G, \rho; u)$, die eine direkte Verallgemeinerung der Definition in [H1] darstellt. Wir benötigen hier über die Kombinatorik hinaus nur den Begriff der Graphen von Gruppen wie er in [Se, Ba2] entwickelt wird. Die Kanten und Knoten des Quotienten $G \backslash X$ werden dabei mit Stabilisatoren der Operation von G auf X versehen; der resultierende Graph von Gruppen $G \backslash X$ trägt die volle Information der Operation von G auf X . Wege in $G \backslash X$ bestehen aus Kanten und Elementen der Knotengruppen; auf diesen Wegen ist noch eine Äquivalenzrelation einzuführen, die die Einbettungen der Kantengruppen G_e in die Knotengruppen $G_{\partial_0(e)}$ berücksichtigt. Die Standardvertreter dieser Äquivalenzrelation sind S -normalisierte Wege, die an jedem Knoten $\partial_0(e)$ des Weges nur Elemente eines fixierten Vertretersystems $G_{\partial_0(e)}/G_e$ zulassen.

In Analogie zur „topologischen Situation“ der freien Operation einer Gruppe auf einem Baum gewinnt man die Gruppe G als „Fundamentalgruppe“ von $G \backslash X$

und den Baum X als Menge der S -normalisierten reduzierten Wege in $G \backslash X$ mit Anfangsknoten v_0 zurück. Die Elemente von G entsprechen dabei den S -normalisierten Wegen mit Anfangsknoten v_0 , die geschlossen und reduziert sind. Die hyperbolischen Konjugationsklassen entsprechen der Menge $C_{\text{redn}^*}(G \backslash X)$ der normierten, S^* -normalisierten, geschlossenen und stark reduzierten Wege modulo Rotation mit beliebigem Anfangsknoten (die S^* -Normalisierung ist nur eine kleine zusätzliche technische Bedingung). Die Normierung ist notwendig, da man mit den Elementen der Gruppe konjugieren kann, die dem Anfangsknoten des Weges zugeordnet ist.

Ist die Menge der reduzierten Wege der Länge l in $G \backslash X$ endlich für alle $l \geq 1$, so definieren wir

$$L(X, G, \rho; u) := \exp \left(\sum_{(d, \tau) \in C_{\text{redn}^*}(G \backslash X)} \frac{1}{l(d)} \text{tr}_{j(d)} \rho(\langle d, \tau \rangle) u^{l(d)} \right).$$

Im Gegensatz zur freien Gruppenoperation ist hier noch eine Mittelung der Spuren über die Fixräume $V_\rho^{G_{e_j}} \subseteq V_\rho$ bestimmter Stabilisatoren nötig, $\langle d, \tau \rangle$ bezeichnet dabei nicht mehr eine Konjugationsklasse, sondern ein bestimmtes Element in G . Wir beweisen die bekannten Rationalitätsformeln, falls der Quotient $G \backslash X$ endlich ist, und somit die Äquivalenz mit den Definitionen in [Ba1, H3].

Für $\rho = 1$ hängt die L -Funktion nur noch von dem gewichteten Graphen $(G \backslash X, i)$ ab. Jeder Kante $e \in V(G \backslash X)$ wird dabei die Anzahl $i(e)$ der Kanten zugeordnet, die in einem Punkt der Überlagerung $X \rightarrow G \backslash X$ über e liegen. Die L -Funktion $L(X, G, 1; u)$ ist dann von der Form

$$Z_{(Y, i)}(u) = L(X, G, 1; u) = \exp \sum_{(d, \tau) \in C_{\text{redn}^*}(G \backslash X)} \frac{u^{l(d)}}{l(d)}$$

mit der erzeugenden Funktion über die normierten, geschlossenen stark reduzierten Wege von $G \backslash X$.

Die nichttrivialen Faktoren der Zetafunktion $Z_{(Y, i)}(u) = L(X, G, 1; u)$ berechnen sich als Determinante des allgemeinen Laplace-Operator auf dem gewichteten Quotienten (Y, i) . Ist $\rho \neq 1$, so ist $\det(\Delta_\rho(u))$ über eine Basiswahl von $H_{\rho, 0}(X)$ zu bestimmen. Es ist sinnvoll, $\Delta_\rho(u)$ als Laplace-Operators eines Graphen zu interpretieren, dessen Knoten die gewählten Basiselemente sind. Die Kanten müssen eventuell mit komplexen Zahlen indiziert werden. Die resultierenden Graphen Y_ρ nennen wir Berechnungsgraphen.

Nach den allgemeinen Untersuchungen zu L -Funktionen von Graphen im ersten Teil, wollen wir im zweiten Teil der Arbeit mit Hilfe dieser Funktionen die Kombinatorik arithmetischer Graphen studieren.

Es bezeichne $K_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ den Körper der formalen Laurentreihen in $1/T$ über dem endlichen Körper \mathbb{F}_q . Dann verstehen wir unter arithmetischen Graphen

Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ des Bruhat-Tits-Baumes \mathcal{T} des lokalen Körpers K_∞ , wobei $\Gamma' \subseteq \Gamma = GL_2(A)$, $A = \mathbb{F}_q[T]$, eine Untergruppe von endlichem Index sei. Γ operiert diskret aber nicht frei auf \mathcal{T} und der Quotient $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ ist eine Halbgerade mit Knotenmenge $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

In Kapitel 4 untersuchen wir die Grobstruktur der Graphen $\Gamma \backslash \mathcal{T}$. Es ist zweckmäßig, diese als Auffaserung

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\Gamma'} \Gamma \backslash \mathcal{T} \longrightarrow \Gamma \backslash \mathcal{T}$$

zu studieren. Insbesondere interessieren uns die Hauptkongruenzgraphen

$$\mathcal{T}(n) = \Gamma(n) \backslash \mathcal{T},$$

die durch die Operation der Hauptkongruenzgruppe

$$\Gamma(n) = \text{Ker}(\Gamma \xrightarrow{\text{red}} GL_2(A/n))$$

von $n \in A$ gebildet werden. Da $\Gamma(n)$ normal ist, wird auch die zweite Überlagerung in der Folge

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\Gamma(n)} \mathcal{T}(n) \xrightarrow{G(n)} \mathcal{T}(1) = \Gamma \backslash \mathcal{T}$$

durch die natürliche Operation der Gruppe $G(n) = \Gamma/\Gamma(n)$ gegeben. Der unendliche Graph zerfällt in einen endlichen Graphen $X(n)$ und endlich viele Halbgeraden, die wir auch als Spitzen bezeichnen. Die Struktur der Hauptkongruenzgraphen ist gegeben durch die Struktur der Gruppe $G(n)$.

In \mathcal{T} zeichnen wir einen Unterbaum X aus, so daß

$$X \xrightarrow{\Theta(n)} X(n) \xrightarrow{\Theta/\Theta(n)} X^{\text{deg}(n)-1}(1)$$

wieder eine Sequenz von Überlagerungen ist, wobei $X^{\text{deg}(n)-1}(1)$ den Untergraphen von $\mathcal{T}(1)$ bezeichnet, der von den Knoten $v_0, \dots, v_{\text{deg}(n)-1}$ induziert wird. Die Gruppen $\Theta, \Theta(n)$ lassen sich explizit durch Stabilisatoren der Operation von Γ auf \mathcal{T} darstellen. Die Situation bleibt bei der Beschränkung auf $X(n)$ insofern stabil, als $\Theta/\Theta(n) \cong G(n)$ wieder als Überlagerungsgruppe von $X(n) \rightarrow X^{\text{deg}(n)-1}(1)$ auftritt. Die Überlagerung $X \xrightarrow{\Theta(n)} X(n)$ ist dabei unverzweigt. Genauer ist $X(n)$ der maximale Untergraph von $\mathcal{T}(n)$, der sich durch \mathcal{T} unverzweigt überdecken läßt; $\Theta(n)$ ist insbesondere die Fundamentalgruppe von $X(n)$. Die Zetafunktion $Z_{X(n)}(u)$ zerfällt in das Produkt

$$Z_{X(n)}(u) = L(X, \Theta(n), 1; u) = \prod_{\rho \in \widehat{G(n)}} L(X, \Theta, \rho; u)^{\text{deg}(\rho)}$$

der L -Funktionen der Überlagerung $X(n) \xrightarrow{G(n)} X^{\text{deg}(n)-1}(1)$, und das Problem der Berechnung von $Z_{X(n)}(u)$ reduziert sich auf die Berechnung von $L(X, \Theta, \rho; u)$.

Die Gruppe $G(n)$,

$$G(n) \cong \mathbb{F}_q^* \ltimes SL_2(A/n),$$

liegt zwischen der $SL_2(A/n)$ und der $GL_2(A/n)$. Ihre Darstellungstheorie ist daher eng verwandt mit der Darstellungstheorie dieser Gruppen. Ist n irreduzibel und vom Grad d , so ist A/n der endliche Körper mit q^d Elementen. Die Darstellungen von $G(n)$ erhält man durch Beschränkung der wohlbekannten Darstellungen von $GL_2(A/n)$. Sie sind von I. Rust in [Ru] inklusive der Angabe der Charaktertafeln genau beschrieben. Die Darstellungen ρ von $G(n)$ unterteilen sich in die Darstellungen ρ_μ der Hauptserie und die supercuspidalen Darstellungen ρ_ν . Die ersten werden durch Charaktere μ der Standard-Borelgruppe $B(A/n)$ induziert, die anderen durch unzerlegbare Charaktere ν der multiplikativen Gruppe L^* der quadratischen Erweiterung L von A/n .

In Kapitel 5 geben wir für beide Familien von Darstellungen die Nachbarschaftsrelationen der Berechnungsgraphen an. Die grundlegenden Räume $H_{\rho,0}(X)$ der G -äquivalenten Funktionen auf X zerfallen in eine direkte Summe

$$H_{\rho,0}(X) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq \text{deg}(n)-1} H_{\rho,0}^{(i)}(X),$$

wobei $H_{\rho,0}^{(i)}(X)$ isomorph ist zu einem Fixraum $V_\rho^{\Gamma_i}$ des Darstellungsraums V_ρ . Hier bezeichnet Γ_i den Stabilisator einer Liftung von $v_i \in V X^{\text{deg}(n)-1}(1)$ auf X . Wir bestimmen dann Basen von $V_\rho^{\Gamma_i}$ und die Relationen zwischen den Basiselementen, die durch A_ρ gegeben werden.

Wir zeigen, daß die resultierenden Berechnungsgraphen Y_{ρ_μ} der Hauptserie eng verbunden sind mit den Hecke-Graphen $\mathcal{T}_0(n) := \Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T}$, die als Quotienten der Hecke-Kongruenzgruppe

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

definiert sind. In Abhängigkeit von μ müssen einige Knoten entfernt werden; außerdem werden bestimmte Kanten mit Ausdrücken in μ indiziert.

Ein Vorteil der Zerlegung in die L -Funktionen besteht darin, daß die Graphen Y_ρ wesentlich kleiner sind als $X(n)$ selbst. Die Größenordnung von Y_ρ ist $q^{\text{deg}(n)}$, die von $X(n)$ ist $q^{3 \cdot \text{deg}(n)}$. Allerdings kommen durch die kombinatorische Vereinfachung partielle Gaußsche Summen ins Spiel. Wir illustrieren die Berechnungen am Beispiel $n = T^3 + T + 1$, $q = 2$. Die invertierte Zetafunktion $Z_{X(n)}(u)^{-1}$ ist hier ein Polynom vom Grad 756. Die Berechnung als charakteristisches Polynom ist sehr langwierig. Die einzelnen L -Funktionen sind hingegen noch (unter Zuhilfenahme eines Computeralgebrasystems) manuell zu berechnen.

Für kleine n sind die Graphen $\mathcal{T}_0(n)$ von uniformer Gestalt, wenn q variiert, vgl. [GN]. Im Fall n irreduzibel und $\text{deg}(n) = 2$ können wir deshalb explizite Formeln für $Z_{X(n)}(u)$ angeben. Daraus gewinnen wir das Spektrum $\text{Spec}(X(n))$, da die Graphen $X(n)$ bipartit und $(q, q+1)$ -semiregulär sind. Für $X(n)$ ergeben

sich dann sehr gute Expansionskonstanten. Für diese Polynome n erhalten wir somit eine Verschärfung der Konstanten, die von M. Morgenstern für allgemeines n bewiesen wurden, siehe [Mol]. Darüber hinaus können wir beweisen, daß die Regularisierungen $X(n)^{[0]}$, $X(n)^{[1]}$ auf beiden Seiten des semiregulären Graphen $X(n)$ Ramanujan-Graphen sind. Am Ende des Kapitels diskutieren wir die Verallgemeinerungsfähigkeit dieser Methode auf Polynome höheren Grades. Diese Ergebnisse über die Graphen $X(n)$ erscheinen auch in [Sch].

Anders als die Definition der L -Funktionen in [Ba1, H3] setzt unsere Definition nicht voraus, daß die Quotienten $G \setminus X$ endlich sind, sondern nur, daß die Mengen $C_{redn}^l(G \setminus X)$ für $l \geq 1$ endlich sind. Bezeichnet $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe von endlichem Index, so ist diese Bedingung für $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ erfüllt, da der Graph von Gruppen in einen endlichen Teil und eine Vereinigung disjunkter Spitzen zerfällt. Die Zetafunktionen sind dann zwar keine invertierten Polynome mehr, aber immer noch rational. Genauer beweisen wir in Kapitel 6 die Rationalitätsformel

$$Z_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(u)^{-1} = \frac{(1-u^2)^{g-1+c}}{(1-qu^2)^c} \cdot P,$$

wobei $g = g(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$ das Geschlecht und $c = c(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$ die Anzahl der Spitzen von $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ bezeichnet. Das Polynom $P = \det \Delta_{\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}}^*(u)$ berechnet sich als die Determinante des Laplace-Operators eines endlichen Teils von $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$, bei dem die Werte in den Ansatzpunkten der Spitzen von $1 - (q-1)u^2$ auf 1 deformiert werden. Die Formeln erhält man durch einen Ausschöpfungsprozeß.

Dieses Ergebnis übertragen wir auf die L -Funktionen der Überlagerung

$$\mathcal{T}(n) \xrightarrow{G(n)} \mathcal{T}(1).$$

Die supercuspidalen Faktoren $L(\mathcal{T}, \Gamma, \rho_\nu; u)$ sind dieselben wie im endlichen Fall. Die Faktoren der Hauptserie vereinfachen sich, wie man am Beispiel $n = T^3 + T + 1$, $q = 2$ sieht. Die zugrundeliegenden Berechnungsgraphen sind Hecke-Graphen $\mathcal{T}_0(n)$. Um dieses Phänomen der Vereinfachung der Zetafunktionen beim Übergang zu den unendlichen Graphen zu verdeutlichen, beenden wir die Arbeit mit der Berechnung der Zetafunktionen $Z_{(\mathcal{T}_0(T^m), i)}(u)$ für kleine m .

Herrn Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler bin ich für die Unterstützung, die er mir zuteil werden ließ, zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dipl.-Math. Max Gebhardt danke ich für die Implementierung von Programmen zur Berechnung von Zetafunktionen und Herrn Dipl.-Math. Volker Priebe für die vielen Kommentare, die den Aufbau dieser Arbeit verbessert haben.

1 Grundlagen

Am Anfang führen wir grundlegende Begriffe und Notationen aus der Graphentheorie ein, wobei wir uns nach [Se] richten. Nach der Definition von Graphen, Wegen und Operatoren gehen wir auf das Spektrum von Graphen ein, das ein wichtiges Bindeglied zwischen der Algebra und der Kombinatorik von Graphen darstellt. Anschließend stellen wir mit je einem Abschnitt über formale Potenzreihen und Gruppenoperationen auf Graphen Hilfsmittel für unsere Untersuchungen zur Verfügung.

1.1 Graphen und Wege

Definition 1.1.1. Unter einem (*ungerichteten*) Graphen X verstehen wir ein Quintupel $(EX, VX, \partial_0, \partial_1, \bar{\cdot})$, das aus der Menge EX von (*gerichteten*) Kanten, der Menge $VX \neq \emptyset$ von Knoten, den Randabbildungen $\partial_0, \partial_1 : EX \rightarrow VX$ und der Inversion $\bar{\cdot}$ von Kanten besteht. Diese Funktionen genügen dabei den Gleichungen $\partial_0(e) = \partial_1(\bar{e})$, $\partial_1(e) = \partial_0(\bar{e})$, $\bar{\bar{e}} = e$ und $\bar{e} \neq e$ für alle Kanten $e \in EX$. Die Knoten $\partial_0(e), \partial_1(e)$ heißen *Randknoten* der Kante e , das Paar $\{e, \bar{e}\}$ heißt *geometrische Kante*.

Wir nennen zwei Knoten v und w *benachbart*, wenn sie die Randknoten einer Kante $e \in EX$ sind. Der *Grad eines Knotens* $v \in VX$ ist

$$\deg(v) := \#\{e \in EX : \partial_0(e) = v\}.$$

Wir setzen grundsätzlich voraus, daß alle Graphen lokal endlich sind, also $\deg(v) < \infty$ für alle $v \in VX$ gilt. Ist $\deg(v) = k$ für alle $v \in VX$, so heißt X ein *k-regulärer Graph*.

In naheliegender Weise sind *Untergraphen* eines Graphen definiert. Sei $V' \subseteq VX$ gegeben, sei

$$E' = \{e \in EX \mid \partial_i(e) \in V' \text{ für } i = 0 \text{ und } 1\}$$

und X' der Untergraph von X , der durch V', E' gebildet wird. Dann heißt X' der von V' induzierte Untergraph von X .

Besondere induzierte Untergraphen sind für $v \in VX$ die Graphen $\text{stern}(v)$: Es ist

$$V(\text{stern}(v)) := \{v\} \cup \{\partial_1(e) \mid \partial_0(e) = v\}$$

und

$$E(\text{stern}(v)) = \{e \in EX \mid \partial_i(e) = v \text{ für } i = 0 \text{ oder } 1\}.$$

Definition 1.1.2. Eine *Orientierung* des Graphen X ist eine Teilmenge $E^+X \subseteq EX$, so daß $EX = E^+X \cup \overline{E^+X}$ und $E^+X \cap \overline{E^+X} = \emptyset$ gilt. Eine solche Orientierung existiert immer. Haben wir für X eine Orientierung ausgezeichnet, so nennen wir X auch einen *orientierten Graphen*.

Zur Beschreibung eines orientierten Graphen reicht es aus, VX , E^+X und die Randabbildung $E^+X \rightarrow VX \times VX$ anzugeben.

Der Graph X heißt *bipartit*, wenn VX sich disjunkt zerlegen läßt in zwei Mengen $V_0(X), V_1(X)$, so daß aus $\partial_0(e) \in V_0(X)$ immer $\partial_1(e) \in V_1(X)$ folgt. Die Randknoten einer jeden Kante liegen also in verschiedenen Mengen.

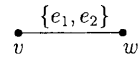
Definition 1.1.3. Ein *Morphismus* $m : X \rightarrow Y$ von Graphen X und Y besteht aus einem Paar von Abbildungen

$$m_V : VX \rightarrow VY, \quad m_E : EX \rightarrow EY,$$

für die $m_V(\partial_0(e)) = \partial_0(m_V(e))$ und $\overline{m_E(e)} = m_E(\bar{e})$ für alle $e \in EX$ gilt.

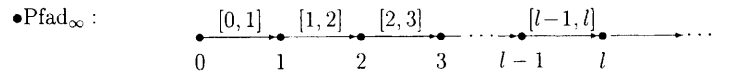
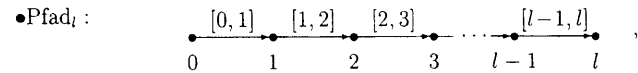
Injektiv, surjektiv bzw. *bijektiv* sind Morphismen von Graphen, wenn sie als Abbildungen auf den entsprechenden Kanten- und Knotenmengen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind. Bijektive Morphismen heißen auch *Isomorphismen*, Isomorphismen eines Graphen auf sich selbst *Automorphismen*; die Gruppe der Automorphismen eines Graphen X wird mit $Aut(X)$ bezeichnet. Haben wir für X eine Orientierung E^+X ausgezeichnet, so bezeichnen wir mit $Aut(X^+)$ diejenigen Automorphismen von X , die E^+X auf sich selbst abbilden.

Endliche Graphen können als Diagramme dargestellt werden, indem jeder Knoten durch einen Punkt und geometrische Kanten durch Verbindungslinien der jeweiligen Endknoten repräsentiert werden. Der Graph X mit $VX = \{v, w\}$ und $EX = \{e_1, e_2\}$ wird somit durch das Bild



repräsentiert.

Ist der Graph orientiert, so macht man die Orientierung durch einen Pfeil deutlich. Eine besondere Familie von orientierten Graphen ist durch $\text{Pfad}_l, l \geq 0$ gegeben:



Definition 1.1.4. Ein *Weg* W (der Länge $l \geq 0$) in einem Graphen X ist ein Morphismus $m : \text{Pfad}_l \rightarrow X$. Der Knoten $m_V(0)$ bzw. $m_V(l)$ heißt *Anfangs-* bzw. *Endknoten* von W . Ist X orientiert, so verlangen wir weiterhin $m_E(E^+\text{Pfad}_l) \subseteq E^+X$. Anschaulich gesprochen folgt ein Weg in einem orientierten Graphen also der vorgegebenen Orientierung.

Ein Weg W verbindet die Knoten $m_V(0)$ und $m_V(l)$; W heißt auch *Weg* von $m_V(0)$ nach $m_V(l)$. Ein Weg W der Länge $l > 0$ wird eindeutig charakterisiert durch eine Folge von Kanten (e_1, \dots, e_l) mit $\partial_1(e_i) = \partial_0(e_{i+1})$ für alle $i = 1, \dots, l-1$, was wir häufig ausnutzen werden.

Definition 1.1.5. Eine *Halbgerade* ist ein Untergraph eines Graphen X , der isomorph ist zu Pfad_∞ . Zwei Halbgeraden X_1, X_2 in einem Graphen X seien äquivalent, wenn EX_1 und EX_2 bis auf endlich viele Kanten übereinstimmen. Äquivalenzklassen von Halbgeraden heißen *Enden*.

Der Begriff von Halbgeraden bzw. Enden ist offensichtlich nur interessant für unendliche Graphen.

Definition 1.1.6. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten des Graphen durch einen Weg verbunden sind. Die maximalen, zusammenhängenden Untergraphen heißen *Zusammenhangskomponenten* des Graphen.

Definition 1.1.7. Sei X ein Graph. Ein *Fluß* von X ist eine Funktion $f : EX \rightarrow \mathbb{C}$, die den folgenden Bedingungen genügt:

- (i) $\forall e \in EX : f(e) = -f(\bar{e})$,
- (ii) $\forall v \in VX : \sum_{\partial_1(e)=v} f(e) = 0$,
- (iii) $f(e) = 0$ für fast alle $e \in EX$.

Die Menge der Flüsse auf X bildet einen \mathbb{C} -Vektorraum, den wir mit $H_1(X, \mathbb{C})$ bezeichnen.

Definition 1.1.8. Sei Y ein endlicher Graph. Dann heißt die Zahl

$$g(Y) := \dim H_1(Y, \mathbb{C})$$

das *Geschlecht* von Y .

Das Geschlecht ist eine wichtige Invariante eines Graphen.

Proposition 1.1.9. (*Euler-Formel*) Es sei Y ein endlicher Graph mit $\#EY = 2m$, $\#VY = n$. Dann ist

$$g(Y) = \dim H_1(Y, \mathbb{C}) = m - n + z,$$

wobei $z = z(Y)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von Y bezeichnet.

Ist Y zusätzlich zusammenhängend, so ist $g(Y) = m - n + 1$.

Definition 1.1.10. Der Weg (e_1, \dots, e_l) heißt *reduziert*, wenn $e_i \neq \bar{e}_{i+1}$ ist für $i = 1, \dots, l-1$ oder wenn er die Länge null hat.

Sind zwei Punkte v nach w in X durch einen Weg verbunden, so gibt es auch einen reduzierten Weg, der v und w verbindet. Dies sieht man induktiv, indem man eventuell auftretende Paare (e_i, \bar{e}_i) sukzessive löscht.

Ein Weg $W = (e_1, \dots, e_l)$ heißt *geschlossen*, wenn $\partial_1(e_l) = \partial_0(e_1)$ ist. Wir nennen e_1 *Aufkante* und e_l *Endkante* von W . Eine *Schleife* ist ein geschlossener Weg der Länge 1.

Definition 1.1.11. Ein Graph X heißt *kombinatorisch*, wenn zu je zwei (nicht notwendig verschiedenen) Knoten v und w höchstens eine Kante e existiert mit $\partial_0(e) = v$ und $\partial_1(e) = w$.

Anschaulich gesprochen ist ein kombinatorischer Graph ein Graph ohne Schleifen und Mehrfachkanten zwischen zwei Knoten. In diesem Fall ist eine Kante e eindeutig durch das Paar $(\partial_0(e), \partial_1(e))$ und analog Wege durch eine Folge von Knoten charakterisiert.

Definition 1.1.12. Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph, der keine reduzierten geschlossenen Wege der Länge > 0 enthält.

Bäume sind genau die zusammenhängenden Graphen vom Geschlecht null.

Ist der Weg $W = (e_0, \dots, e_{l-1})$ geschlossen, so auch der Weg (e_i, \dots, e_{i+l-1}) , wobei die Indizes modulo l gerechnet werden. Wir nennen (e_i, \dots, e_{i+l-1}) auch *Drehung* von W . Die Relation " W_1 ist Drehung von W_2 " ist eine Äquivalenzrelation. Wir nennen die entsprechenden Äquivalenzklassen von geschlossenen Wegen der Länge > 0 *Zykel*. (Insbesondere hat nach dieser Konvention ein Zykel immer eine positive Länge.)

Sind (e_1, \dots, e_l) und (y_1, \dots, y_n) zwei Wege mit $\partial_1(e_l) = \partial_0(y_1)$, so definieren wir die Komposition dieser Wege durch

$$(e_1, \dots, e_l) \circ (y_1, \dots, y_n) = (e_1, \dots, e_l, y_1, \dots, y_n),$$

für die Komposition der gleichen geschlossenen Wege schreiben wir auch $W \circ W = W^2$.

Definition 1.1.13. Ein geschlossener Weg W heißt *primitiv*, wenn er nicht von der Form $W = P^m$ ist mit $m > 1$. Ein Zykel heißt *primitiv*, wenn einer seiner Vertreter (und dann auch alle) primitiv ist. Ist $W = P^m$ eine Darstellung mit maximalem m , so heißt $m = m(W)$ die *Vielfachheit* von W .

Ein Zykel Z besteht aus $\frac{l(Z)}{m(Z)}$ Vertretern. Ein Zykel ist insbesondere genau dann primitiv, wenn er genausoviele Vertreter besitzt wie er lang ist.

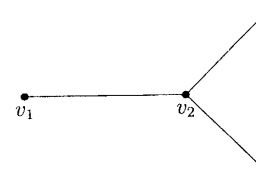


Abbildung 1: Graph X

Definition 1.1.14. Ein Zykel Z heißt *reduziert*, wenn jeder Vertreter von Z reduziert ist.

Diese Bedingung kann man an einem beliebigen Vertreter von Z testen:

Definition 1.1.15. Ein geschlossener Weg $W = (e_1, \dots, e_l)$ der Länge > 0 heißt *stark reduziert*, wenn W und $W \circ W$ reduziert sind.

Anders gesprochen ist ein geschlossener Weg der Länge > 0 genau dann stark reduziert, wenn jede Drehung dieses Weges reduziert ist, bzw. wenn der von diesem Weg induzierte Zykel reduziert ist.

Beispiel 1.1.16. X bezeichne den Graphen in Abbildung 1. Ein geschlossener Weg, der in $v_1 \in VX$ beginnt, ist nicht stark reduziert, selbst wenn er reduziert ist.

Zu einem Graphen X und $v, w \in VX$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(v, w) &:= \mathcal{P}(X, v, w) := \{\text{Wege in } X \text{ von } v \text{ nach } w\} \\ \mathcal{R}(v, w) &:= \mathcal{R}(X, v, w) := \{\text{reduzierte Wege in } X \text{ von } v \text{ nach } w\} \\ \mathcal{G}(X) &:= \{\text{geschlossene Wege in } X\} \\ \mathcal{G}^+(X) &:= \{\text{geschlossene Wege der Länge } > 0 \text{ in } X\} \\ \mathcal{RG}(X) &:= \{\text{geschlossene, reduzierte Wege in } X\} \\ \mathcal{SG}(X) &:= \{\text{geschlossene, stark reduzierte Wege in } X\} \\ \mathcal{Z}(X) &:= \{\text{Zykel in } X\} \\ \mathcal{RZ}(X) &:= \{\text{reduzierte Zykel in } X\} \end{aligned}$$

Ist \mathcal{B} eine dieser Mengen, so sei $\mathcal{B}^l = \mathcal{B} \cap \mathcal{P}^l(X)$, wobei $\mathcal{P}^l(X)$ die Menge der Wege der Länge l in X bezeichnet.

Definition 1.1.17. Sei X ein Graph, der reduzierte, geschlossene Wege enthält. Die Zahl

$$t(X) := \min\{l > 0 \mid \mathcal{RG}^l(X) \neq \emptyset\}$$

heißt *Taille* von X .

Zu einem Graphen X ist der *Kantengraph* X_K assoziiert, der durch

$$\begin{aligned} VX_K &= \{\text{geometrische Kanten von } X\}, \\ EX_K &= \{(\{e_1, \bar{e}_1\}, \{e_2, \bar{e}_2\}) \mid \\ &\quad e_1 \text{ und } e_2 \text{ haben einen gemeinsamen Randpunkt in } X\} \end{aligned}$$

gegeben ist. Die Randoperatoren und die Inversion von Kanten werden auf die natürliche Weise definiert. Der Kantengraph X_K ist genau dann kombinatorisch, wenn X keine Schleifen enthält.

Weiterhin assoziieren wir zu X den *gerichteten Kantengraphen* X_K^+ . Dies sei der gerichtete Graph, der durch

$$VX_K^+ := EX$$

und

$$E^+X_K^+ := \{(e_1, e_2) \mid \partial_1(e_1) = \partial_0(e_2), e_1 \neq \bar{e}_2\}$$

mit den natürlichen Randoperatoren gegeben ist. Auch dieser Graph ist genau dann kombinatorisch, wenn X keine Schleifen enthält. Durch die vorgegebene Orientierung ist aber selbst in diesem Fall jeder Weg in X_K^+ durch eine Folge von Knoten $e_1, \dots, e_l \in VX_K^+ = EX$ charakterisiert.

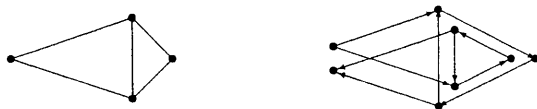


Abbildung 2: Der Kantengraph X_K und der gerichtete Kantengraph X_K^+ .

Beispiel 1.1.18. In Abbildung 2 sind die Graphen X_K und X_K^+ des Graphen X aus Abbildung 1 angegeben.

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen X und X_K^+ besteht in dem

Lemma 1.1.19. *Sei X ein Graph und X_K^+ der assoziierte gerichtete Kantengraph. Dann entsprechen die geschlossenen, stark reduzierten Wege der Länge $l > 0$ in X kanonisch den geschlossenen Wegen der Länge l in X_K^+ .*

Beweis. Sei (e_1, \dots, e_l) ein geschlossener, stark reduzierter Weg in X . Dann ist auch (e_1, \dots, e_l, e_1) reduziert. Diese Folge von Knoten in X_K^+ charakterisiert einen geschlossenen Weg der Länge l in X_K^+ . Die resultierende kanonische Abbildung zwischen geschlossenen, stark reduzierten Wegen in X und geschlossenen Wegen positiver Länge in X_K^+ ist offensichtlich bijektiv. \square

1.2 Operatoren auf Graphen

Wir führen Operatoren auf Graphen ein und beweisen einige grundlegende Identitäten. Mit X sei immer ein Graph bezeichnet. Grundlegend sind die Räume

$$C_0(X) := \mathbb{C}^{(VX)} \text{ und } C_1(X) := \mathbb{C}^{(EX)}$$

der komplexen Funktionen auf Knoten und Kanten von X mit endlichem Träger. Wir identifizieren die charakteristische Funktion χ_v mit $v \in VX$ und χ_e mit $e \in EX$, die Elemente von $C_0(X)$ bzw. $C_1(X)$ sind dann Linearkombinationen von Knoten bzw. Kanten. Für orientierte Graphen X^+ setzen wir analog

$$C_0(X^+) := \mathbb{C}^{(VX)} \text{ und } C_1(X^+) := \mathbb{C}^{(E^+X)}.$$

Definition 1.2.1. Ein *Operator* auf dem Graphen X ist ein Homomorphismus von $C_i(X)$ nach $C_j(X)$, $i, j \in \{0, 1\}$, der mit der Operation von $Aut(X)$ vertauscht. Ein Operator auf einem orientierten Graphen X^+ ist dagegen ein Homomorphismus von $C_i(X)$ nach $C_j(X)$, $i, j \in \{0, 1\}$, der mit der Operation von $Aut(X^+)$ vertauscht.

Die Randoperatoren etwa sind Operatoren auf Graphen, da für $\phi \in Aut(X)$ gilt:

$$\partial_i(\phi(e)) = \phi(\partial_i(e)).$$

Bemerkung 1.2.2. Durch Fortsetzung der natürlichen Operation von $Aut(X)$ auf X auf die Räume $C_i(X)$ kann man diese als $\mathbb{C}[Aut(X)]$ -Moduln auffassen. Die Operatoren auf X entsprechen dann gerade den $\mathbb{C}[Aut(X)]$ -linearen Abbildungen. Entsprechendes gilt für orientierte Graphen.

Analog definieren wir die Operatoren

$$\sigma_0, \sigma_1 : C_0(X) \rightarrow C_1(X)$$

via

$$\sigma_i(v) = \sum_{\partial_i(e)=v} e.$$

Die Operatoren Q bzw. J auf X seien durch

$$J(e) = \bar{e}, \text{ und } Q(v) = (\deg(v) - 1)v$$

gegeben.

Definition 1.2.3. Wir definieren den *Nachbarschaftsoperator* $A = A_X$ auf X durch

$$A(v) := A_X(v) := \sum_{\partial_0(e)=v} \partial_1(e).$$

Offensichtlich gelten die Beziehungen

$$A^l(v) = \sum_{(e_1, \dots, e_l) \text{ Weg, } \partial_0(e_1)=v} \partial_1(e_l), \quad (1.1)$$

$$\partial_0 \sigma_0 = \partial_1 \sigma_1 = Q + I, \quad (1.2)$$

$$\partial_1 \sigma_0 = \partial_0 \sigma_1 = A. \quad (1.3)$$

Wir setzen nun

$$A_m(v) := \sum_{\substack{(e_1, \dots, e_m) \text{ reduziert,} \\ \partial_0(e_1)=v}} \partial_1(e_m).$$

Es ist $A_0 = I$, und $A = A_1$ ist der Nachbarschaftsoperator von X . Für $l > 1$ stimmen A_l und A^l zwar nicht mehr überein, es gilt aber noch die Rekursion

$$A^2 = A_2 + Q + I \quad (1.4)$$

$$AA_m = A_{m+1} + QA_{m-1} \quad (1.5)$$

Diese beiden Gleichungen kann man zusammenfassen zu

$$(I - Au + Qu^2) \left(\sum A_m u^m \right) = (1 - u^2)I, \quad (1.6)$$

wobei u eine Unbestimmte ist. Wir nennen

$$\Delta(u) := (I - Au + Qu^2) \in \text{End}(C_0(X) \otimes \mathbb{C}[u])$$

den *allgemeinen Laplace-Operator* von X . Für $u = 1$ erhält man den *gewöhnlichen Laplace-Operator*

$$\Delta = \Delta(1) = (I + Q) - A$$

des Graphen X .

Bemerkung 1.2.4. Die Verbindung von $\Delta(u)$ mit den erzeugenden Funktionen der A_m tritt schon in [Se, II, 1.1, ex. 3] auf: Dort werden die Operatoren B_m definiert durch

$$B_m := \sum_{0 \leq i \leq \frac{m}{2}} A_{m-2i}.$$

Daraus ergibt sich dann ganz analog

$$\sum_{m \geq 0} B_m u^m = \frac{1}{\Delta(u)}.$$

Formuliert ist das bei Serre nur für Bäume, in unserer Formulierung beweist man aber auch den allgemeinen Fall wie dort beschrieben.

Definition 1.2.5. Der *Nachbarschaftsoperator auf orientierten Kanten* ist gegeben durch

$$T(e) := T_X(e) := \sum_{(e, e') \text{ reduziert}} e'.$$

Dieser Operator stimmt überein mit dem Nachbarschaftsoperator des orientierten Kantengraphen X_K^+ .

Analog zu (1.1) gilt

$$T^l(e) = \sum_{\substack{(e_0, \dots, e_l) \text{ red.} \\ e=e_0}} e_l.$$

Der Operator T hat den Vorteil, daß man damit die reduzierten Wege in X besser beschreiben kann als mit A . Es gilt

$$A_l = \partial_1 T^{l-1} \sigma_0,$$

was eine Verallgemeinerung von (1.3) ist. Andererseits gilt zwar

$$T = \sigma_0 \partial_1 - J,$$

bzw.

$$T^2 = \sigma_0 A \partial_1 - \sigma_1 \partial_1 - \sigma_0 + I.$$

An der letzten Formel sieht man aber, daß man T^l nicht in einem einfachen Term in A bzw. A_m ausdrücken kann. Auf den Zusammenhang zwischen den Operatoren T und A_l kommen wir im Abschnitt 2.2 zurück.

Ist $Y = X$ ein endlicher Graph mit $VY = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $EY = \{e_1, \dots, e_{2m}\}$, so kann man A bzw. T als Matrizen bezüglich der kanonischen Basen der charakteristischen Funktionen auffassen. Es ist dann

$$A_{j,i} = \#\{e : \partial_0(e) = v_i, \partial_1(e) = v_j\},$$

in der Literatur *Nachbarschafts-* oder *Adjazenzmatrix* genannt. Die Matrix A ist symmetrisch.

Analog gilt

$$T_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \partial_1(e_i) = \partial_0(e_j) \text{ und } e_i \neq \bar{e}_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man achte auf die Reihenfolge der Indizes j, i . Dies ist so eingerichtet, daß die Anwendung von T auf e_i der Matrizenoperation von T auf dem i -ten Element der natürlichen Basis entspricht. Durch Induktion sieht man dann weiterhin

$$A_{j,i}^l = \#(\mathcal{P}^l(Y, v_i, v_j))$$

bzw.

$$T_{j,i}^l = \#(\mathcal{P}^l(Y_K^+, e_i, e_j)).$$

Bemerkung 1.2.6. Die Nachbarschaftsoperatoren A bzw. T werden in der Literatur auch durch

$$\tilde{A}f(v) := \tilde{A}_Y f(v) := \sum_{\partial_0(e)=v} f(\partial_1 e), \quad f \in C_0(Y)$$

und

$$\tilde{T}f(e) := \tilde{T}_Y f(e) := \sum_{(e,e') \text{ red.}} f(e'), \quad f \in C_1(Y)$$

definiert. Identifiziert man wieder Kanten und Knoten mit den entsprechenden charakteristischen Funktionen, so erhält man

$$\tilde{A}v = \sum_{\partial_1(e)=v} \partial_0(e)$$

und

$$\tilde{T}e = \sum_{(e',e) \text{ red.}} e'.$$

Faßt man die Operatoren als Matrizen auf, so sind sie transponiert zu A bzw. T :

$$\tilde{A} = A^t = A, \quad \tilde{T} = T^t.$$

1.3 Spektren von Graphen und Expansion

Definition 1.3.1. Sei Y ein endlicher Graph, A die Nachbarschaftsmatrix von Y . Dann nennen wir das Spektrum

$$\text{Spec}(Y) := \text{Spec}(A)$$

das *Spektrum von Y* . Dabei ist $\text{Spec}(A)$ die Menge der Eigenwerte von A (mit Vielfachheiten).

Das Spektrum kodiert viele Eigenschaften eines Graphen, charakterisiert diesen aber nicht. Es gibt nichtisomorphe Graphen, die dasselbe Spektrum besitzen, siehe [CDS] für eine ausführliche Diskussion. Wir nennen solche Graphen *isospektral*. Da A symmetrisch ist, ist $\text{Spec}(Y)$ reell; wir bezeichnen die Elemente des Spektrums mit

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Wir zählen grundlegende Eigenschaften auf, die elementar zu beweisen sind (siehe etwa [Bi]).

Proposition 1.3.2. Sei Y ein endlicher Graph. Dann gelten

(i) $|\lambda| \leq \max_{v \in VY} \deg(v)$ für alle $\lambda \in \text{Spec}(Y)$.

(ii) Wenn Y bipartit ist, so ist $\text{Spec}(Y)$ symmetrisch um Null.

Proposition 1.3.3. Sei Y ein endlicher, k -regulärer Graph. Dann gilt:

- (i) $\text{Spec}(Y) \subseteq [-k, +k]$ und der Eigenwert k wird angenommen.
- (ii) Die Vielfachheit des Eigenwerts k in $\text{Spec}(Y)$ stimmt mit der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von Y überein.
- (iii) Y ist genau dann bipartit, wenn $-k \in \text{Spec}(Y)$ ist.

Definition 1.3.4. Sei Y ein endlicher Graph. Das *Laplace-Spektrum* $\text{Spec}_L(Y)$ ist definiert als das Spektrum des Laplace - Operators $\Delta = (Q + I) - A$.

Für das Laplace-Spektrum gelten ähnliche Aussagen wie für das gewöhnliche Spektrum. Für die Elemente von $\text{Spec}_L(Y)$ gilt etwa

$$0 = \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n \leq 2 \cdot \max\{\deg(v) : v \in VY\}.$$

Ist Y k -regulär, so ist $\lambda \in \text{Spec}(Y)$ genau dann, wenn $k - \lambda \in \text{Spec}_L(Y)$. Die Aussagen in Proposition 1.3.3 lassen sich dann direkt übertragen.

Das Spektrum $\text{Spec}(Y)$ enthält insbesondere Informationen über die Expansion des Graphen: Zu einer Teilmenge $S \subseteq VY$ definieren wir die *Nachbarmenge von S* als

$$N(S) := \{\partial_1(e) \mid e \in EY \text{ mit } \partial_0(e) \in S\}.$$

Definition 1.3.5. Sei $c \in \mathbb{R}, c \geq 0$. Der endliche Graph Y hat c -Expansion, wenn

$$\#(N(S) - S) \geq c \cdot \#(S)$$

für alle Teilmengen $S \subseteq VY$ gilt mit $\#S \leq \frac{1}{2}\#VY$.

Der vollständige Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch genau eine Kante verbunden ist, hat offensichtlich eine c -Expansion mit $c = 1$. Da Graphen mit guten Expansionseigenschaften wichtig sind für Anwendungen in der Netzwerktheorie (vgl. [Lu],[Ch]), so stellen sich zwei Fragen:

- Gegeben ein beliebiger endlicher Graph. Wie gut ist seine Expansion? Wie kann man die Expansion abschätzen?
- Konstruiere Graphen mit guter Expansion.

Die erste Frage beantwortet folgender Satz.

Satz 1.3.6. ([Al, Th. 2.5]) Sei Y ein zusammenhängender, endlicher und kombinatorischer Graph mit maximalem Knotengrad k .