

Zetafunktionen arithmetisch definierter Graphen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von
Ortwin Scheja

Saarbrücken
1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Grundlagen	11
1.1 Graphen und Wege	11
1.2 Operatoren auf Graphen	17
1.3 Spektren von Graphen und Expansion	20
1.4 Formale Potenzreihenringe	23
1.5 Gruppenoperationen auf Graphen	25
2 Die Zetafunktion von Graphen	28
2.1 Erzeugende Funktionen	28
2.2 Die Zetafunktion	31
3 Die L-Funktion von Graphen	38
3.1 Graphen von Gruppen	38
3.2 Die universelle Überlagerung von \mathbb{Y}	40
3.3 G -äquivariante Funktionen auf X	42
3.4 Die L -Funktion $L(X, G, \rho; \mathbf{u})$	45
3.5 Rationalität der L -Funktion	50
3.6 Der Zusammenhang mit dem Laplace-Operator	52
4 Arithmetische Graphen	55
4.1 Gruppenoperationen auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T}	55
4.2 Kongruenzgraphen	58
4.3 Die Darstellungen der Gruppe $G(n)$ für irreduzibles n	65
5 Zetafunktionen der endlichen Hauptkongruenzgraphen	72
5.1 Berechnungsgraphen	73
5.2 Berechnungsgraphen der Hauptserie	74
5.3 Berechnungsgraphen zu supercuspidalen Darstellungen	84
5.4 Explizite Formeln und Anwendungen	87
6 Zetafunktionen der vollen Hauptkongruenzgraphen	95
6.1 Grundlegende Eigenschaften	95
6.2 Hauptkongruenzgraphen	101
6.3 Beschluß	104
Index	108
Symbolverzeichnis	110
Literatur	112

Tag des Kolloquiums: 19.2.1999

Dekan: Prof. Dr. Th. Eicher

Berichterstatter: Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Prof. Dr. R. Schulze-Pillot

Einleitung

Die Fundamentalgruppe $\Gamma = \pi(Y, v_0)$ und die universelle Überlagerung \tilde{Y} eines endlichen, zusammenhängenden Graphen Y mit Aufpunkt v_0 kann man vollständig durch den Graphen selbst beschreiben. Die Knoten von \tilde{Y} entsprechen den reduzierten Wegen mit Anfangsknoten v_0 , die Elemente von Γ den *geschlossenen* reduzierten Wegen mit Anfangsknoten v_0 . Es ist nicht ausgeschlossen, daß die erste und die letzte Kante eines solchen Weges invers zueinander sind. Kürzt man sukzessive die erste und die letzte Kante, solange dies der Fall ist, erhält man einen geschlossenen, *stark* reduzierten Weg (mit eventuell geändertem Anfangsknoten). Die geschlossenen, stark reduzierten Wege $SG(Y)$ sind also dadurch charakterisiert, daß jede Rotation dieser Wege wieder reduziert ist. Die nichttrivialen Konjugationsklassen von Γ entsprechen dann gerade den Äquivalenzklassen geschlossener, stark reduzierter Wege modulo Rotation — den reduzierten Zykeln $\mathcal{RZ}(Y)$ von Y . Dem Zykel P , und damit der zugehörigen Konjugationsklasse $\langle P \rangle$ in Γ , wird durch $\deg(\langle P \rangle) := \deg(P) := l(P)$ die Länge eines zugrundeliegenden stark reduzierten Weges zugewiesen.

Die Zetafunktion $Z_Y(u)$ von Y ist dann definiert als die formale Potenzreihe

$$Z_Y(u) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{RZ}(Y) \\ P \text{ primitiv}}} (1 - u^{\deg(P)})^{-1} = \exp \sum_{W \in SG(Y)} \frac{u^{l(W)}}{l(W)}.$$

Primitive Zyklen sind dabei solche, die sich nicht als echte Potenzen kleinerer Zyklen schreiben lassen; der Bruch $(1 - u^{\deg(P)})^{-1}$ ist der Eulerfaktor zu P . Die multiplikative und die additive Schreibweise lassen sich leicht ineinander überführen.

Ist $\rho : \Gamma \rightarrow U_n(V_\rho)$ eine n -dimensionale, unitäre Darstellung von Γ , so erhält man als Verallgemeinerung von $Z_Y(u)$ die L -Funktion

$$L_Y(\rho; u) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{RZ}(Y) \\ P \text{ primitiv}}} \det(I - \rho(\langle P \rangle) u^{\deg(P)})^{-1} = \exp \sum_{W \in SG(Y)} \frac{\text{tr} \rho(\langle W \rangle)}{l(W)} u^{l(W)}.$$

Im Fall $\rho = 1$ ist $Z_Y(u) = L_Y(1; u)$.

Die Zetafunktion von Graphen wurde das erste Mal von Ihara in [Ih] untersucht, dort allerdings als Zetafunktion $Z_\Gamma(u)$ endlich erzeugter freier Untergruppen $\Gamma \subseteq PGL_2(K_\nu)$, wobei K_ν ein diskret bewerteter, vollständiger Körper ist. Die Konjugationsklassen γ^σ von $\Gamma \subseteq PGL_2(K_\nu)$ besitzen eine natürliche Gradstruktur, die durch die Arithmetik vorgegeben ist. Die Gruppe $PGL_2(K_\nu)$ läßt sich durch Übergang zum Quotienten $PGL_2(K_\nu)/PGL_2(O_\nu)$ (O_ν bezeichne

noch die Eulerfaktoren der primitiven „hyperbolischen Elemente“ von G berücksichtigt. Die hyperbolischen Elemente, die ein Ende des Baumes X festhalten, werden dabei gemittelt. Auch für diese L -Funktionen gelten die grundlegenden Rationalitätsformeln

$$L(X, G, \rho; u)^{-1} = \det(I - T_\rho u) = (1 - u^2)^{-x_\rho} \det(\Delta_\rho(u)).$$

Bass beschreibt als eine weitere wichtige Eigenschaft der L -Funktion von Graphen ihr Verhalten in Überlagerungen; dies ist eine Verallgemeinerung eines Resultats aus [H2]: Ist $G' \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index, so gilt

$$L(X, G', \rho; u) = L(X, G, \text{ind}_{G'}^G \rho; u).$$

Ist G' insbesondere normal in G , so zerlegt sich

$$L(X, G', 1; u) = \prod_{\rho \in \overline{G/G'}} L(X, G, \rho; u)^{\text{deg}(\rho)}$$

in das Produkt der L -Funktionen der Überlagerung $G' \backslash X \xrightarrow{G/G'} G \backslash X$. (Ist allgemein H eine endliche Gruppe, so bezeichnet \hat{H} die Menge der irreduziblen komplexen Darstellungen von H .) Für die Beweise benötigt Bass allerdings die Theorie nichtkommutativer Determinanten von Operatoren über projektiven $\mathbb{C}[G]$ -Moduln, die er selbst entwickelt (loc. cit.).

Ist G keine freie Gruppe, so besitzt die Überlagerung $G' \backslash X \xrightarrow{G/G'} G \backslash X$ im allgemeinen Verzweigungspunkte. In [H3] verallgemeinert auch Hashimoto den Begriff der L -Funktion auf diesen Fall, falls ρ eine Darstellung von G ist, die über G' faktorisiert. Von Nachteil an diesem Ansatz ist, daß man statt der globalen Operation auf der universellen Überlagerung Gruppenoperationen auf Zwischenüberlagerungen betrachten muß, die keine Bäume mehr sind.

Wir geben in Kapitel 3 eine neue Definition der L -Funktionen $L(X, G, \rho; u)$, die eine direkte Verallgemeinerung der Definition in [H1] darstellt. Wir benötigen hier über die Kombinatorik hinaus nur den Begriff der Graphen von Gruppen wie er in [Se, Ba2] entwickelt wird. Die Kanten und Knoten des Quotienten $G \backslash X$ werden dabei mit Stabilisatoren der Operation von G auf X versehen; der resultierende Graph von Gruppen $G \backslash X$ trägt die volle Information der Operation von G auf X . Wege in $G \backslash X$ bestehen aus Kanten und Elementen der Knotengruppen; auf diesen Wegen ist noch eine Äquivalenzrelation einzuführen, die die Einbettungen der Kantengruppen G_e in die Knotengruppen $G_{\partial_0(e)}$ berücksichtigt. Die Standardvertreter dieser Äquivalenzrelation sind S -normalisierte Wege, die an jedem Knoten $\partial_0(e)$ des Weges nur Elemente eines fixierten Vertretersystems $G_{\partial_0(e)}/G_e$ zulassen.

In Analogie zur „topologischen Situation“ der freien Operation einer Gruppe auf einem Baum gewinnt man die Gruppe G als „Fundamentalgruppe“ von $G \backslash X$

und den Baum X als Menge der S -normalisierten reduzierten Wege in $G \backslash X$ mit Anfangsknoten v_0 zurück. Die Elemente von G entsprechen dabei den S -normalisierten Wegen mit Anfangsknoten v_0 , die geschlossen und reduziert sind. Die hyperbolischen Konjugationsklassen entsprechen der Menge $C_{\text{redn}^*}(G \backslash X)$ der normierten, S^* -normalisierten, geschlossenen und stark reduzierten Wege modulo Rotation mit beliebigem Anfangsknoten (die S^* -Normalisierung ist nur eine kleine zusätzliche technische Bedingung). Die Normierung ist notwendig, da man mit den Elementen der Gruppe konjugieren kann, die dem Anfangsknoten des Weges zugeordnet ist.

Ist die Menge der reduzierten Wege der Länge l in $G \backslash X$ endlich für alle $l \geq 1$, so definieren wir

$$L(X, G, \rho; u) := \exp \left(\sum_{(d, \tau) \in C_{\text{redn}^*}(G \backslash X)} \frac{1}{l(d)} \text{tr}_{j(d)} \rho(\langle d, \tau \rangle) u^{l(d)} \right).$$

Im Gegensatz zur freien Gruppenoperation ist hier noch eine Mittelung der Spuren über die Fixräume $V_\rho^{G_{e_j}} \subseteq V_\rho$ bestimmter Stabilisatoren nötig, $\langle d, \tau \rangle$ bezeichnet dabei nicht mehr eine Konjugationsklasse, sondern ein bestimmtes Element in G . Wir beweisen die bekannten Rationalitätsformeln, falls der Quotient $G \backslash X$ endlich ist, und somit die Äquivalenz mit den Definitionen in [Ba1, H3].

Für $\rho = 1$ hängt die L -Funktion nur noch von dem gewichteten Graphen $(G \backslash X, i)$ ab. Jeder Kante $e \in V(G \backslash X)$ wird dabei die Anzahl $i(e)$ der Kanten zugeordnet, die in einem Punkt der Überlagerung $X \rightarrow G \backslash X$ über e liegen. Die L -Funktion $L(X, G, 1; u)$ ist dann von der Form

$$Z_{(Y, i)}(u) = L(X, G, 1; u) = \exp \sum_{(d, \tau) \in C_{\text{redn}^*}(G \backslash X)} \frac{u^{l(d)}}{l(d)}$$

mit der erzeugenden Funktion über die normierten, geschlossenen stark reduzierten Wege von $G \backslash X$.

Die nichttrivialen Faktoren der Zetafunktion $Z_{(Y, i)}(u) = L(X, G, 1; u)$ berechnen sich als Determinante des allgemeinen Laplace-Operator auf dem gewichteten Quotienten (Y, i) . Ist $\rho \neq 1$, so ist $\det(\Delta_\rho(u))$ über eine Basiswahl von $H_{\rho, 0}(X)$ zu bestimmen. Es ist sinnvoll, $\Delta_\rho(u)$ als Laplace-Operators eines Graphen zu interpretieren, dessen Knoten die gewählten Basiselemente sind. Die Kanten müssen eventuell mit komplexen Zahlen indiziert werden. Die resultierenden Graphen Y_ρ nennen wir Berechnungsgraphen.

Nach den allgemeinen Untersuchungen zu L -Funktionen von Graphen im ersten Teil, wollen wir im zweiten Teil der Arbeit mit Hilfe dieser Funktionen die Kombinatorik arithmetischer Graphen studieren.

Es bezeichne $K_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ den Körper der formalen Laurentreihen in $1/T$ über dem endlichen Körper \mathbb{F}_q . Dann verstehen wir unter arithmetischen Graphen

Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ des Bruhat-Tits-Baumes \mathcal{T} des lokalen Körpers K_∞ , wobei $\Gamma' \subseteq \Gamma = GL_2(A)$, $A = \mathbb{F}_q[T]$, eine Untergruppe von endlichem Index sei. Γ operiert diskret aber nicht frei auf \mathcal{T} und der Quotient $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ ist eine Halbgerade mit Knotenmenge $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

In Kapitel 4 untersuchen wir die Grobstruktur der Graphen $\Gamma \backslash \mathcal{T}$. Es ist zweckmäßig, diese als Auffaserung

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\Gamma'} \Gamma \backslash \mathcal{T} \longrightarrow \Gamma \backslash \mathcal{T}$$

zu studieren. Insbesondere interessieren uns die Hauptkongruenzgraphen

$$\mathcal{T}(n) = \Gamma(n) \backslash \mathcal{T},$$

die durch die Operation der Hauptkongruenzgruppe

$$\Gamma(n) = \text{Ker}(\Gamma \xrightarrow{\text{red}} GL_2(A/n))$$

von $n \in A$ gebildet werden. Da $\Gamma(n)$ normal ist, wird auch die zweite Überlagerung in der Folge

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\Gamma(n)} \mathcal{T}(n) \xrightarrow{G(n)} \mathcal{T}(1) = \Gamma \backslash \mathcal{T}$$

durch die natürliche Operation der Gruppe $G(n) = \Gamma/\Gamma(n)$ gegeben. Der unendliche Graph zerfällt in einen endlichen Graphen $X(n)$ und endlich viele Halbgeraden, die wir auch als Spitzen bezeichnen. Die Struktur der Hauptkongruenzgraphen ist gegeben durch die Struktur der Gruppe $G(n)$.

In \mathcal{T} zeichnen wir einen Unterbaum X aus, so daß

$$X \xrightarrow{\Theta(n)} X(n) \xrightarrow{\Theta/\Theta(n)} X^{\text{deg}(n)-1}(1)$$

wieder eine Sequenz von Überlagerungen ist, wobei $X^{\text{deg}(n)-1}(1)$ den Untergraphen von $\mathcal{T}(1)$ bezeichnet, der von den Knoten $v_0, \dots, v_{\text{deg}(n)-1}$ induziert wird. Die Gruppen $\Theta, \Theta(n)$ lassen sich explizit durch Stabilisatoren der Operation von Γ auf \mathcal{T} darstellen. Die Situation bleibt bei der Beschränkung auf $X(n)$ insofern stabil, als $\Theta/\Theta(n) \cong G(n)$ wieder als Überlagerungsgruppe von $X(n) \rightarrow X^{\text{deg}(n)-1}(1)$ auftritt. Die Überlagerung $X \xrightarrow{\Theta(n)} X(n)$ ist dabei unverzweigt. Genauer ist $X(n)$ der maximale Untergraph von $\mathcal{T}(n)$, der sich durch \mathcal{T} unverzweigt überdecken läßt; $\Theta(n)$ ist insbesondere die Fundamentalgruppe von $X(n)$. Die Zetafunktion $Z_{X(n)}(u)$ zerfällt in das Produkt

$$Z_{X(n)}(u) = L(X, \Theta(n), 1; u) = \prod_{\rho \in \widehat{G(n)}} L(X, \Theta, \rho; u)^{\text{deg}(\rho)}$$

der L -Funktionen der Überlagerung $X(n) \xrightarrow{G(n)} X^{\text{deg}(n)-1}(1)$, und das Problem der Berechnung von $Z_{X(n)}(u)$ reduziert sich auf die Berechnung von $L(X, \Theta, \rho; u)$.

Die Gruppe $G(n)$,

$$G(n) \cong \mathbb{F}_q^* \ltimes SL_2(A/n),$$

liegt zwischen der $SL_2(A/n)$ und der $GL_2(A/n)$. Ihre Darstellungstheorie ist daher eng verwandt mit der Darstellungstheorie dieser Gruppen. Ist n irreduzibel und vom Grad d , so ist A/n der endliche Körper mit q^d Elementen. Die Darstellungen von $G(n)$ erhält man durch Beschränkung der wohlbekannten Darstellungen von $GL_2(A/n)$. Sie sind von I. Rust in [Ru] inklusive der Angabe der Charaktertafeln genau beschrieben. Die Darstellungen ρ von $G(n)$ unterteilen sich in die Darstellungen ρ_μ der Hauptserie und die supercuspidalen Darstellungen ρ_ν . Die ersten werden durch Charaktere μ der Standard-Borelgruppe $B(A/n)$ induziert, die anderen durch unzerlegbare Charaktere ν der multiplikativen Gruppe L^* der quadratischen Erweiterung L von A/n .

In Kapitel 5 geben wir für beide Familien von Darstellungen die Nachbarschaftsrelationen der Berechnungsgraphen an. Die grundlegenden Räume $H_{\rho,0}(X)$ der G -äquivalenten Funktionen auf X zerfallen in eine direkte Summe

$$H_{\rho,0}(X) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq \text{deg}(n)-1} H_{\rho,0}^{(i)}(X),$$

wobei $H_{\rho,0}^{(i)}(X)$ isomorph ist zu einem Fixraum $V_\rho^{\Gamma_i}$ des Darstellungsraums V_ρ . Hier bezeichnet Γ_i den Stabilisator einer Liftung von $v_i \in V X^{\text{deg}(n)-1}(1)$ auf X . Wir bestimmen dann Basen von $V_\rho^{\Gamma_i}$ und die Relationen zwischen den Basiselementen, die durch A_ρ gegeben werden.

Wir zeigen, daß die resultierenden Berechnungsgraphen Y_{ρ_μ} der Hauptserie eng verbunden sind mit den Hecke-Graphen $\mathcal{T}_0(n) := \Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T}$, die als Quotienten der Hecke-Kongruenzgruppe

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

definiert sind. In Abhängigkeit von μ müssen einige Knoten entfernt werden; außerdem werden bestimmte Kanten mit Ausdrücken in μ indiziert.

Ein Vorteil der Zerlegung in die L -Funktionen besteht darin, daß die Graphen Y_ρ wesentlich kleiner sind als $X(n)$ selbst. Die Größenordnung von Y_ρ ist $q^{\text{deg}(n)}$, die von $X(n)$ ist $q^{3 \cdot \text{deg}(n)}$. Allerdings kommen durch die kombinatorische Vereinfachung partielle Gaußsche Summen ins Spiel. Wir illustrieren die Berechnungen am Beispiel $n = T^3 + T + 1$, $q = 2$. Die invertierte Zetafunktion $Z_{X(n)}(u)^{-1}$ ist hier ein Polynom vom Grad 756. Die Berechnung als charakteristisches Polynom ist sehr langwierig. Die einzelnen L -Funktionen sind hingegen noch (unter Zuhilfenahme eines Computeralgebrasystems) manuell zu berechnen.

Für kleine n sind die Graphen $\mathcal{T}_0(n)$ von uniformer Gestalt, wenn q variiert, vgl. [GN]. Im Fall n irreduzibel und $\text{deg}(n) = 2$ können wir deshalb explizite Formeln für $Z_{X(n)}(u)$ angeben. Daraus gewinnen wir das Spektrum $\text{Spec}(X(n))$, da die Graphen $X(n)$ bipartit und $(q, q+1)$ -semiregulär sind. Für $X(n)$ ergeben

sich dann sehr gute Expansionskonstanten. Für diese Polynome n erhalten wir somit eine Verschärfung der Konstanten, die von M. Morgenstern für allgemeines n bewiesen wurden, siehe [Mol]. Darüber hinaus können wir beweisen, daß die Regularisierungen $X(n)^{[0]}$, $X(n)^{[1]}$ auf beiden Seiten des semiregulären Graphen $X(n)$ Ramanujan-Graphen sind. Am Ende des Kapitels diskutieren wir die Verallgemeinerungsfähigkeit dieser Methode auf Polynome höheren Grades. Diese Ergebnisse über die Graphen $X(n)$ erscheinen auch in [Sch].

Anders als die Definition der L -Funktionen in [Ba1, H3] setzt unsere Definition nicht voraus, daß die Quotienten $G \setminus X$ endlich sind, sondern nur, daß die Mengen $C_{redn}^l(G \setminus X)$ für $l \geq 1$ endlich sind. Bezeichnet $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe von endlichem Index, so ist diese Bedingung für $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ erfüllt, da der Graph von Gruppen in einen endlichen Teil und eine Vereinigung disjunkter Spitzen zerfällt. Die Zetafunktionen sind dann zwar keine invertierten Polynome mehr, aber immer noch rational. Genauer beweisen wir in Kapitel 6 die Rationalitätsformel

$$Z_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(u)^{-1} = \frac{(1-u^2)^{g-1+c}}{(1-qu^2)^c} \cdot P,$$

wobei $g = g(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$ das Geschlecht und $c = c(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$ die Anzahl der Spitzen von $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ bezeichnet. Das Polynom $P = \det \Delta_{\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}}^*(u)$ berechnet sich als die Determinante des Laplace-Operators eines endlichen Teils von $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$, bei dem die Werte in den Ansatzpunkten der Spitzen von $1 - (q-1)u^2$ auf 1 deformiert werden. Die Formeln erhält man durch einen Ausschöpfungsprozeß.

Dieses Ergebnis übertragen wir auf die L -Funktionen der Überlagerung

$$\mathcal{T}(n) \xrightarrow{G(n)} \mathcal{T}(1).$$

Die supercuspidalen Faktoren $L(\mathcal{T}, \Gamma, \rho_\nu; u)$ sind dieselben wie im endlichen Fall. Die Faktoren der Hauptserie vereinfachen sich, wie man am Beispiel $n = T^3 + T + 1$, $q = 2$ sieht. Die zugrundeliegenden Berechnungsgraphen sind Hecke-Graphen $\mathcal{T}_0(n)$. Um dieses Phänomen der Vereinfachung der Zetafunktionen beim Übergang zu den unendlichen Graphen zu verdeutlichen, beenden wir die Arbeit mit der Berechnung der Zetafunktionen $Z_{(\mathcal{T}_0(T^m), i)}(u)$ für kleine m .

Herrn Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler bin ich für die Unterstützung, die er mir zuteil werden ließ, zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dipl.-Math. Max Gebhardt danke ich für die Implementierung von Programmen zur Berechnung von Zetafunktionen und Herrn Dipl.-Math. Volker Priebe für die vielen Kommentare, die den Aufbau dieser Arbeit verbessert haben.

1 Grundlagen

Am Anfang führen wir grundlegende Begriffe und Notationen aus der Graphentheorie ein, wobei wir uns nach [Se] richten. Nach der Definition von Graphen, Wegen und Operatoren gehen wir auf das Spektrum von Graphen ein, das ein wichtiges Bindeglied zwischen der Algebra und der Kombinatorik von Graphen darstellt. Anschließend stellen wir mit je einem Abschnitt über formale Potenzreihen und Gruppenoperationen auf Graphen Hilfsmittel für unsere Untersuchungen zur Verfügung.

1.1 Graphen und Wege

Definition 1.1.1. Unter einem (*ungerichteten*) Graphen X verstehen wir ein Quintupel $(EX, VX, \partial_0, \partial_1, \bar{\cdot})$, das aus der Menge EX von (*gerichteten*) Kanten, der Menge $VX \neq \emptyset$ von Knoten, den Randabbildungen $\partial_0, \partial_1 : EX \rightarrow VX$ und der Inversion $\bar{\cdot}$ von Kanten besteht. Diese Funktionen genügen dabei den Gleichungen $\partial_0(e) = \partial_1(\bar{e})$, $\partial_1(e) = \partial_0(\bar{e})$, $\bar{\bar{e}} = e$ und $\bar{e} \neq e$ für alle Kanten $e \in EX$. Die Knoten $\partial_0(e), \partial_1(e)$ heißen *Randknoten* der Kante e , das Paar $\{e, \bar{e}\}$ heißt *geometrische Kante*.

Wir nennen zwei Knoten v und w *benachbart*, wenn sie die Randknoten einer Kante $e \in EX$ sind. Der *Grad eines Knotens* $v \in VX$ ist

$$\deg(v) := \#\{e \in EX : \partial_0(e) = v\}.$$

Wir setzen grundsätzlich voraus, daß alle Graphen lokal endlich sind, also $\deg(v) < \infty$ für alle $v \in VX$ gilt. Ist $\deg(v) = k$ für alle $v \in VX$, so heißt X ein *k-regulärer Graph*.

In naheliegender Weise sind *Untergraphen* eines Graphen definiert. Sei $V' \subseteq VX$ gegeben, sei

$$E' = \{e \in EX \mid \partial_i(e) \in V' \text{ für } i = 0 \text{ und } 1\}$$

und X' der Untergraph von X , der durch V', E' gebildet wird. Dann heißt X' der von V' induzierte Untergraph von X .

Besondere induzierte Untergraphen sind für $v \in VX$ die Graphen $\text{stern}(v)$: Es ist

$$V(\text{stern}(v)) := \{v\} \cup \{\partial_1(e) \mid \partial_0(e) = v\}$$

und

$$E(\text{stern}(v)) = \{e \in EX \mid \partial_i(e) = v \text{ für } i = 0 \text{ oder } 1\}.$$

Definition 1.1.2. Eine *Orientierung* des Graphen X ist eine Teilmenge $E^+X \subseteq EX$, so daß $EX = E^+X \cup \overline{E^+X}$ und $E^+X \cap \overline{E^+X} = \emptyset$ gilt. Eine solche Orientierung existiert immer. Haben wir für X eine Orientierung ausgezeichnet, so nennen wir X auch einen *orientierten Graphen*.

Zur Beschreibung eines orientierten Graphen reicht es aus, VX , E^+X und die Randabbildung $E^+X \rightarrow VX \times VX$ anzugeben.

Der Graph X heißt *bipartit*, wenn VX sich disjunkt zerlegen läßt in zwei Mengen $V_0(X), V_1(X)$, so daß aus $\partial_0(e) \in V_0(X)$ immer $\partial_1(e) \in V_1(X)$ folgt. Die Randknoten einer jeden Kante liegen also in verschiedenen Mengen.

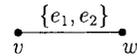
Definition 1.1.3. Ein *Morphismus* $m : X \rightarrow Y$ von Graphen X und Y besteht aus einem Paar von Abbildungen

$$m_V : VX \rightarrow VY, \quad m_E : EX \rightarrow EY,$$

für die $m_V(\partial_0(e)) = \partial_0(m_V(e))$ und $\overline{m_E(e)} = m_E(\bar{e})$ für alle $e \in EX$ gilt.

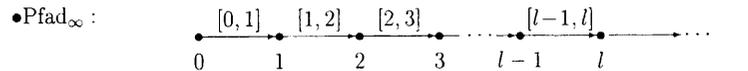
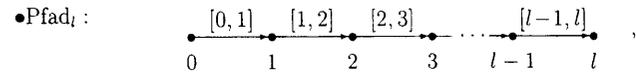
Injektiv, surjektiv bzw. *bijektiv* sind Morphismen von Graphen, wenn sie als Abbildungen auf den entsprechenden Kanten- und Knotenmengen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind. Bijektive Morphismen heißen auch *Isomorphismen*, Isomorphismen eines Graphen auf sich selbst *Automorphismen*; die Gruppe der Automorphismen eines Graphen X wird mit $Aut(X)$ bezeichnet. Haben wir für X eine Orientierung E^+X ausgezeichnet, so bezeichnen wir mit $Aut(X^+)$ diejenigen Automorphismen von X , die E^+X auf sich selbst abbilden.

Endliche Graphen können als Diagramme dargestellt werden, indem jeder Knoten durch einen Punkt und geometrische Kanten durch Verbindungslinien der jeweiligen Endknoten repräsentiert werden. Der Graph X mit $VX = \{v, w\}$ und $EX = \{e_1, e_2\}$ wird somit durch das Bild



repräsentiert.

Ist der Graph orientiert, so macht man die Orientierung durch einen Pfeil deutlich. Eine besondere Familie von orientierten Graphen ist durch $\text{Pfad}_l, l \geq 0$ gegeben:



Definition 1.1.4. Ein *Weg* W (der Länge $l \geq 0$) in einem Graphen X ist ein Morphismus $m : \text{Pfad}_l \rightarrow X$. Der Knoten $m_V(0)$ bzw. $m_V(l)$ heißt *Anfangs-* bzw. *Endknoten* von W . Ist X orientiert, so verlangen wir weiterhin $m_E(E^+\text{Pfad}_l) \subseteq E^+X$. Anschaulich gesprochen folgt ein Weg in einem orientierten Graphen also der vorgegebenen Orientierung.

Ein Weg W verbindet die Knoten $m_V(0)$ und $m_V(l)$; W heißt auch *Weg* von $m_V(0)$ nach $m_V(l)$. Ein Weg W der Länge $l > 0$ wird eindeutig charakterisiert durch eine Folge von Kanten (e_1, \dots, e_l) mit $\partial_1(e_i) = \partial_0(e_{i+1})$ für alle $i = 1, \dots, l-1$, was wir häufig ausnutzen werden.

Definition 1.1.5. Eine *Halbgerade* ist ein Untergraph eines Graphen X , der isomorph ist zu Pfad_∞ . Zwei Halbgeraden X_1, X_2 in einem Graphen X seien äquivalent, wenn EX_1 und EX_2 bis auf endlich viele Kanten übereinstimmen. Äquivalenzklassen von Halbgeraden heißen *Enden*.

Der Begriff von Halbgeraden bzw. Enden ist offensichtlich nur interessant für unendliche Graphen.

Definition 1.1.6. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten des Graphen durch einen Weg verbunden sind. Die maximalen, zusammenhängenden Untergraphen heißen *Zusammenhangskomponenten* des Graphen.

Definition 1.1.7. Sei X ein Graph. Ein *Fluß* von X ist eine Funktion $f : EX \rightarrow \mathbb{C}$, die den folgenden Bedingungen genügt:

- (i) $\forall e \in EX : f(e) = -f(\bar{e})$,
- (ii) $\forall v \in VX : \sum_{\partial_1(e)=v} f(e) = 0$,
- (iii) $f(e) = 0$ für fast alle $e \in EX$.

Die Menge der Flüsse auf X bildet einen \mathbb{C} -Vektorraum, den wir mit $H_1(X, \mathbb{C})$ bezeichnen.

Definition 1.1.8. Sei Y ein endlicher Graph. Dann heißt die Zahl

$$g(Y) := \dim H_1(Y, \mathbb{C})$$

das *Geschlecht* von Y .

Das Geschlecht ist eine wichtige Invariante eines Graphen.

Proposition 1.1.9. (*Euler-Formel*) Es sei Y ein endlicher Graph mit $\#EY = 2m$, $\#VY = n$. Dann ist

$$g(Y) = \dim H_1(Y, \mathbb{C}) = m - n + z,$$

wobei $z = z(Y)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von Y bezeichnet.

Ist Y zusätzlich zusammenhängend, so ist $g(Y) = m - n + 1$.

Definition 1.1.10. Der Weg (e_1, \dots, e_l) heißt *reduziert*, wenn $e_i \neq \bar{e}_{i+1}$ ist für $i = 1, \dots, l-1$ oder wenn er die Länge null hat.

Sind zwei Punkte v nach w in X durch einen Weg verbunden, so gibt es auch einen reduzierten Weg, der v und w verbindet. Dies sieht man induktiv, indem man eventuell auftretende Paare (e_i, \bar{e}_i) sukzessive löscht.

Ein Weg $W = (e_1, \dots, e_l)$ heißt *geschlossen*, wenn $\partial_1(e_l) = \partial_0(e_1)$ ist. Wir nennen e_1 *Aufkante* und e_l *Endkante* von W . Eine *Schleife* ist ein geschlossener Weg der Länge 1.

Definition 1.1.11. Ein Graph X heißt *kombinatorisch*, wenn zu je zwei (nicht notwendig verschiedenen) Knoten v und w höchstens eine Kante e existiert mit $\partial_0(e) = v$ und $\partial_1(e) = w$.

Anschaulich gesprochen ist ein kombinatorischer Graph ein Graph ohne Schleifen und Mehrfachkanten zwischen zwei Knoten. In diesem Fall ist eine Kante e eindeutig durch das Paar $(\partial_0(e), \partial_1(e))$ und analog Wege durch eine Folge von Knoten charakterisiert.

Definition 1.1.12. Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph, der keine reduzierten geschlossenen Wege der Länge > 0 enthält.

Bäume sind genau die zusammenhängenden Graphen vom Geschlecht null.

Ist der Weg $W = (e_0, \dots, e_{l-1})$ geschlossen, so auch der Weg (e_i, \dots, e_{i+l-1}) , wobei die Indizes modulo l gerechnet werden. Wir nennen (e_i, \dots, e_{i+l-1}) auch *Drehung* von W . Die Relation " W_1 ist Drehung von W_2 " ist eine Äquivalenzrelation. Wir nennen die entsprechenden Äquivalenzklassen von geschlossenen Wegen der Länge > 0 *Zykel*. (Insbesondere hat nach dieser Konvention ein Zykel immer eine positive Länge.)

Sind (e_1, \dots, e_l) und (y_1, \dots, y_n) zwei Wege mit $\partial_1(e_l) = \partial_0(y_1)$, so definieren wir die Komposition dieser Wege durch

$$(e_1, \dots, e_l) \circ (y_1, \dots, y_n) = (e_1, \dots, e_l, y_1, \dots, y_n),$$

für die Komposition der gleichen geschlossenen Wege schreiben wir auch $W \circ W = W^2$.

Definition 1.1.13. Ein geschlossener Weg W heißt *primitiv*, wenn er nicht von der Form $W = P^m$ ist mit $m > 1$. Ein Zykel heißt *primitiv*, wenn einer seiner Vertreter (und dann auch alle) primitiv ist. Ist $W = P^m$ eine Darstellung mit maximalem m , so heißt $m = m(W)$ die *Vielfachheit* von W .

Ein Zykel Z besteht aus $\frac{l(Z)}{m(Z)}$ Vertretern. Ein Zykel ist insbesondere genau dann primitiv, wenn er genausoviele Vertreter besitzt wie er lang ist.

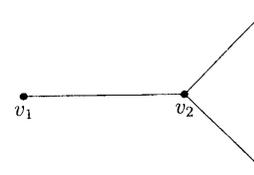


Abbildung 1: Graph X

Definition 1.1.14. Ein Zykel Z heißt *reduziert*, wenn jeder Vertreter von Z reduziert ist.

Diese Bedingung kann man an einem beliebigen Vertreter von Z testen:

Definition 1.1.15. Ein geschlossener Weg $W = (e_1, \dots, e_l)$ der Länge > 0 heißt *stark reduziert*, wenn W und $W \circ W$ reduziert sind.

Anders gesprochen ist ein geschlossener Weg der Länge > 0 genau dann stark reduziert, wenn jede Drehung dieses Weges reduziert ist, bzw. wenn der von diesem Weg induzierte Zykel reduziert ist.

Beispiel 1.1.16. X bezeichne den Graphen in Abbildung 1. Ein geschlossener Weg, der in $v_1 \in VX$ beginnt, ist nicht stark reduziert, selbst wenn er reduziert ist.

Zu einem Graphen X und $v, w \in VX$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(v, w) &:= \mathcal{P}(X, v, w) := \{\text{Wege in } X \text{ von } v \text{ nach } w\} \\ \mathcal{R}(v, w) &:= \mathcal{R}(X, v, w) := \{\text{reduzierte Wege in } X \text{ von } v \text{ nach } w\} \\ \mathcal{G}(X) &:= \{\text{geschlossene Wege in } X\} \\ \mathcal{G}^+(X) &:= \{\text{geschlossene Wege der Länge } > 0 \text{ in } X\} \\ \mathcal{RG}(X) &:= \{\text{geschlossene, reduzierte Wege in } X\} \\ \mathcal{SG}(X) &:= \{\text{geschlossene, stark reduzierte Wege in } X\} \\ \mathcal{Z}(X) &:= \{\text{Zykel in } X\} \\ \mathcal{RZ}(X) &:= \{\text{reduzierte Zykel in } X\} \end{aligned}$$

Ist \mathcal{B} eine dieser Mengen, so sei $\mathcal{B}^l = \mathcal{B} \cap \mathcal{P}^l(X)$, wobei $\mathcal{P}^l(X)$ die Menge der Wege der Länge l in X bezeichnet.

Definition 1.1.17. Sei X ein Graph, der reduzierte, geschlossene Wege enthält. Die Zahl

$$t(X) := \min\{l > 0 \mid \mathcal{RG}^l(X) \neq \emptyset\}$$

heißt *Taille* von X .

Zu einem Graphen X ist der *Kantengraph* X_K assoziiert, der durch

$$\begin{aligned} VX_K &= \{\text{geometrische Kanten von } X\}, \\ EX_K &= \{(\{e_1, \bar{e}_1\}, \{e_2, \bar{e}_2\}) \mid \\ &\quad e_1 \text{ und } e_2 \text{ haben einen gemeinsamen Randpunkt in } X\} \end{aligned}$$

gegeben ist. Die Randoperatoren und die Inversion von Kanten werden auf die natürliche Weise definiert. Der Kantengraph X_K ist genau dann kombinatorisch, wenn X keine Schleifen enthält.

Weiterhin assoziieren wir zu X den *gerichteten Kantengraphen* X_K^+ . Dies sei der gerichtete Graph, der durch

$$VX_K^+ := EX$$

und

$$E^+X_K^+ := \{(e_1, e_2) \mid \partial_1(e_1) = \partial_0(e_2), e_1 \neq \bar{e}_2\}$$

mit den natürlichen Randoperatoren gegeben ist. Auch dieser Graph ist genau dann kombinatorisch, wenn X keine Schleifen enthält. Durch die vorgegebene Orientierung ist aber selbst in diesem Fall jeder Weg in X_K^+ durch eine Folge von Knoten $e_1, \dots, e_l \in VX_K^+ = EX$ charakterisiert.



Abbildung 2: Der Kantengraph X_K und der gerichtete Kantengraph X_K^+ .

Beispiel 1.1.18. In Abbildung 2 sind die Graphen X_K und X_K^+ des Graphen X aus Abbildung 1 angegeben.

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen X und X_K^+ besteht in dem

Lemma 1.1.19. *Sei X ein Graph und X_K^+ der assoziierte gerichtete Kantengraph. Dann entsprechen die geschlossenen, stark reduzierten Wege der Länge $l > 0$ in X kanonisch den geschlossenen Wegen der Länge l in X_K^+ .*

Beweis. Sei (e_1, \dots, e_l) ein geschlossener, stark reduzierter Weg in X . Dann ist auch (e_1, \dots, e_l, e_1) reduziert. Diese Folge von Knoten in X_K^+ charakterisiert einen geschlossenen Weg der Länge l in X_K^+ . Die resultierende kanonische Abbildung zwischen geschlossenen, stark reduzierten Wegen in X und geschlossenen Wegen positiver Länge in X_K^+ ist offensichtlich bijektiv. \square

1.2 Operatoren auf Graphen

Wir führen Operatoren auf Graphen ein und beweisen einige grundlegende Identitäten. Mit X sei immer ein Graph bezeichnet. Grundlegend sind die Räume

$$C_0(X) := \mathbb{C}^{(VX)} \text{ und } C_1(X) := \mathbb{C}^{(EX)}$$

der komplexen Funktionen auf Knoten und Kanten von X mit endlichem Träger. Wir identifizieren die charakteristische Funktion χ_v mit $v \in VX$ und χ_e mit $e \in EX$, die Elemente von $C_0(X)$ bzw. $C_1(X)$ sind dann Linearkombinationen von Knoten bzw. Kanten. Für orientierte Graphen X^+ setzen wir analog

$$C_0(X^+) := \mathbb{C}^{(VX)} \text{ und } C_1(X^+) := \mathbb{C}^{(E^+X)}.$$

Definition 1.2.1. Ein *Operator* auf dem Graphen X ist ein Homomorphismus von $C_i(X)$ nach $C_j(X)$, $i, j \in \{0, 1\}$, der mit der Operation von $Aut(X)$ vertauscht. Ein Operator auf einem orientierten Graphen X^+ ist dagegen ein Homomorphismus von $C_i(X)$ nach $C_j(X)$, $i, j \in \{0, 1\}$, der mit der Operation von $Aut(X^+)$ vertauscht.

Die Randoperatoren etwa sind Operatoren auf Graphen, da für $\phi \in Aut(X)$ gilt:

$$\partial_i(\phi(e)) = \phi(\partial_i(e)).$$

Bemerkung 1.2.2. Durch Fortsetzung der natürlichen Operation von $Aut(X)$ auf X auf die Räume $C_i(X)$ kann man diese als $\mathbb{C}[Aut(X)]$ -Moduln auffassen. Die Operatoren auf X entsprechen dann gerade den $\mathbb{C}[Aut(X)]$ -linearen Abbildungen. Entsprechendes gilt für orientierte Graphen.

Analog definieren wir die Operatoren

$$\sigma_0, \sigma_1 : C_0(X) \rightarrow C_1(X)$$

via

$$\sigma_i(v) = \sum_{\partial_i(e)=v} e.$$

Die Operatoren Q bzw. J auf X seien durch

$$J(e) = \bar{e}, \text{ und } Q(v) = (\deg(v) - 1)v$$

gegeben.

Definition 1.2.3. Wir definieren den *Nachbarschaftsoperator* $A = A_X$ auf X durch

$$A(v) := A_X(v) := \sum_{\partial_0(e)=v} \partial_1(e).$$

Offensichtlich gelten die Beziehungen

$$A^l(v) = \sum_{(e_1, \dots, e_l) \text{ Weg, } \partial_0(e_1)=v} \partial_1(e_l), \quad (1.1)$$

$$\partial_0 \sigma_0 = \partial_1 \sigma_1 = Q + I, \quad (1.2)$$

$$\partial_1 \sigma_0 = \partial_0 \sigma_1 = A. \quad (1.3)$$

Wir setzen nun

$$A_m(v) := \sum_{\substack{(e_1, \dots, e_m) \text{ reduziert,} \\ \partial_0(e_1)=v}} \partial_1(e_m).$$

Es ist $A_0 = I$, und $A = A_1$ ist der Nachbarschaftsoperator von X . Für $l > 1$ stimmen A_l und A^l zwar nicht mehr überein, es gilt aber noch die Rekursion

$$A^2 = A_2 + Q + I \quad (1.4)$$

$$AA_m = A_{m+1} + QA_{m-1} \quad (1.5)$$

Diese beiden Gleichungen kann man zusammenfassen zu

$$(I - Au + Qu^2) \left(\sum A_m u^m \right) = (1 - u^2)I, \quad (1.6)$$

wobei u eine Unbestimmte ist. Wir nennen

$$\Delta(u) := (I - Au + Qu^2) \in \text{End}(C_0(X) \otimes \mathbb{C}[u])$$

den *allgemeinen Laplace-Operator* von X . Für $u = 1$ erhält man den *gewöhnlichen Laplace-Operator*

$$\Delta = \Delta(1) = (I + Q) - A$$

des Graphen X .

Bemerkung 1.2.4. Die Verbindung von $\Delta(u)$ mit den erzeugenden Funktionen der A_m tritt schon in [Se, II, 1.1, ex. 3] auf: Dort werden die Operatoren B_m definiert durch

$$B_m := \sum_{0 \leq i \leq \frac{m}{2}} A_{m-2i}.$$

Daraus ergibt sich dann ganz analog

$$\sum_{m \geq 0} B_m u^m = \frac{1}{\Delta(u)}.$$

Formuliert ist das bei Serre nur für Bäume, in unserer Formulierung beweist man aber auch den allgemeinen Fall wie dort beschrieben.

Definition 1.2.5. Der *Nachbarschaftsoperator auf orientierten Kanten* ist gegeben durch

$$T(e) := T_X(e) := \sum_{(e, e') \text{ reduziert}} e'.$$

Dieser Operator stimmt überein mit dem Nachbarschaftsoperator des orientierten Kantengraphen X_K^+ .

Analog zu (1.1) gilt

$$T^l(e) = \sum_{\substack{(e_0, \dots, e_l) \text{ red.} \\ e=e_0}} e_l.$$

Der Operator T hat den Vorteil, daß man damit die reduzierten Wege in X besser beschreiben kann als mit A . Es gilt

$$A_l = \partial_1 T^{l-1} \sigma_0,$$

was eine Verallgemeinerung von (1.3) ist. Andererseits gilt zwar

$$T = \sigma_0 \partial_1 - J,$$

bzw.

$$T^2 = \sigma_0 A \partial_1 - \sigma_1 \partial_1 - \sigma_0 + I.$$

An der letzten Formel sieht man aber, daß man T^l nicht in einem einfachen Term in A bzw. A_m ausdrücken kann. Auf den Zusammenhang zwischen den Operatoren T und A_l kommen wir im Abschnitt 2.2 zurück.

Ist $Y = X$ ein endlicher Graph mit $VY = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $EY = \{e_1, \dots, e_{2m}\}$, so kann man A bzw. T als Matrizen bezüglich der kanonischen Basen der charakteristischen Funktionen auffassen. Es ist dann

$$A_{j,i} = \#\{e : \partial_0(e) = v_i, \partial_1(e) = v_j\},$$

in der Literatur *Nachbarschafts-* oder *Adjazenzmatrix* genannt. Die Matrix A ist symmetrisch.

Analog gilt

$$T_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \partial_1(e_i) = \partial_0(e_j) \text{ und } e_i \neq \bar{e}_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man achte auf die Reihenfolge der Indizes j, i . Dies ist so eingerichtet, daß die Anwendung von T auf e_i der Matrizenoperation von T auf dem i -ten Element der natürlichen Basis entspricht. Durch Induktion sieht man dann weiterhin

$$A_{j,i}^l = \#(\mathcal{P}^l(Y, v_i, v_j))$$

bzw.

$$T_{j,i}^l = \#(\mathcal{P}^l(Y_K^+, e_i, e_j)).$$

Bemerkung 1.2.6. Die Nachbarschaftsoperatoren A bzw. T werden in der Literatur auch durch

$$\tilde{A}f(v) := \tilde{A}_Y f(v) := \sum_{\partial_0(e)=v} f(\partial_1 e), \quad f \in C_0(Y)$$

und

$$\tilde{T}f(e) := \tilde{T}_Y f(e) := \sum_{(e,e') \text{ red.}} f(e'), \quad f \in C_1(Y)$$

definiert. Identifiziert man wieder Kanten und Knoten mit den entsprechenden charakteristischen Funktionen, so erhält man

$$\tilde{A}v = \sum_{\partial_1(e)=v} \partial_0(e)$$

und

$$\tilde{T}e = \sum_{(e',e) \text{ red.}} e'.$$

Faßt man die Operatoren als Matrizen auf, so sind sie transponiert zu A bzw. T :

$$\tilde{A} = A^t = A, \quad \tilde{T} = T^t.$$

1.3 Spektren von Graphen und Expansion

Definition 1.3.1. Sei Y ein endlicher Graph, A die Nachbarschaftsmatrix von Y . Dann nennen wir das Spektrum

$$\text{Spec}(Y) := \text{Spec}(A)$$

das *Spektrum von Y* . Dabei ist $\text{Spec}(A)$ die Menge der Eigenwerte von A (mit Vielfachheiten).

Das Spektrum kodiert viele Eigenschaften eines Graphen, charakterisiert diesen aber nicht. Es gibt nichtisomorphe Graphen, die dasselbe Spektrum besitzen, siehe [CDS] für eine ausführliche Diskussion. Wir nennen solche Graphen *isospektral*. Da A symmetrisch ist, ist $\text{Spec}(Y)$ reell; wir bezeichnen die Elemente des Spektrums mit

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Wir zählen grundlegende Eigenschaften auf, die elementar zu beweisen sind (siehe etwa [Bi]).

Proposition 1.3.2. Sei Y ein endlicher Graph. Dann gelten

(i) $|\lambda| \leq \max_{v \in VY} \deg(v)$ für alle $\lambda \in \text{Spec}(Y)$.

(ii) Wenn Y bipartit ist, so ist $\text{Spec}(Y)$ symmetrisch um Null.

Proposition 1.3.3. Sei Y ein endlicher, k -regulärer Graph. Dann gilt:

- (i) $\text{Spec}(Y) \subseteq [-k, +k]$ und der Eigenwert k wird angenommen.
- (ii) Die Vielfachheit des Eigenwerts k in $\text{Spec}(Y)$ stimmt mit der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von Y überein.
- (iii) Y ist genau dann bipartit, wenn $-k \in \text{Spec}(Y)$ ist.

Definition 1.3.4. Sei Y ein endlicher Graph. Das *Laplace-Spektrum* $\text{Spec}_L(Y)$ ist definiert als das Spektrum des Laplace - Operators $\Delta = (Q + I) - A$.

Für das Laplace-Spektrum gelten ähnliche Aussagen wie für das gewöhnliche Spektrum. Für die Elemente von $\text{Spec}_L(Y)$ gilt etwa

$$0 = \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n \leq 2 \cdot \max\{\deg(v) : v \in VY\}.$$

Ist Y k -regulär, so ist $\lambda \in \text{Spec}(Y)$ genau dann, wenn $k - \lambda \in \text{Spec}_L(Y)$. Die Aussagen in Proposition 1.3.3 lassen sich dann direkt übertragen.

Das Spektrum $\text{Spec}(Y)$ enthält insbesondere Informationen über die Expansion des Graphen: Zu einer Teilmenge $S \subseteq VY$ definieren wir die *Nachbarmenge von S* als

$$N(S) := \{\partial_1(e) \mid e \in EY \text{ mit } \partial_0(e) \in S\}.$$

Definition 1.3.5. Sei $c \in \mathbb{R}, c \geq 0$. Der endliche Graph Y hat c -Expansion, wenn

$$\#(N(S) - S) \geq c \cdot \#(S)$$

für alle Teilmengen $S \subseteq VY$ gilt mit $\#S \leq \frac{1}{2}\#VY$.

Der vollständige Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch genau eine Kante verbunden ist, hat offensichtlich eine c -Expansion mit $c = 1$. Da Graphen mit guten Expansionseigenschaften wichtig sind für Anwendungen in der Netzwerktheorie (vgl. [Lu],[Ch]), so stellen sich zwei Fragen:

- Gegeben ein beliebiger endlicher Graph. Wie gut ist seine Expansion? Wie kann man die Expansion abschätzen?
- Konstruiere Graphen mit guter Expansion.

Die erste Frage beantwortet folgender Satz.

Satz 1.3.6. ([Al, Th. 2.5]) Sei Y ein zusammenhängender, endlicher und kombinatorischer Graph mit maximalem Knotengrad k .

(i) Y hat eine c -Expansion mit

$$c = \frac{2\tau_2}{k + 2\tau_2}.$$

(ii) Besitzt Y eine c -Expansion, so folgt

$$\tau_2 \geq \frac{c^2}{4 + 2c^2}.$$

Die Expansions-Eigenschaft eines Graphen ist also eng verbunden mit dem Spektrum. Ist Y k -regulär, so setzen wir

$$\lambda(Y) := \max\{|\lambda|, |\lambda| < k\}.$$

Nach dem Satz besitzt ein k -regulärer, kombinatorischer, zusammenhängender Graph die Expansionskonstante

$$c = \frac{2(k - \lambda(Y))}{k + 2(k - \lambda(Y))}.$$

Für eine gute Expansion ist also der Wert $\lambda(Y)$ zu minimieren. Dieses Minimum ist begrenzt, wie von Alon bewiesen (vgl. die Schlufdiskussion von [Al] bzw. [LPS] für einen Beweis).

Satz 1.3.7. Sei $Y_{n,k}$ eine Familie (paarweise verschiedener) k -regulärer, zusammenhängender, endlicher Graphen. Dann ist

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(Y) \geq 2\sqrt{k-1}.$$

Es gibt durchaus Graphen mit $\lambda(Y) < 2\sqrt{k-1}$. Asymptotisch bleibt man aber nie unterhalb dieser Grenze.

Definition 1.3.8. Sei Y ein endlicher, k -regulärer Graph. Y heißt *Ramanujan-Graph*, falls $\lambda(Y) \leq 2\sqrt{k-1}$ gilt.

Ramanujan-Graphen sind die Graphen, die die besten bekannten Expansionsabschätzungen besitzen, die man mit Hilfe des Spektrums erreichen kann. Die explizite Angabe unendlicher Familien k -regulärer Ramanujan-Graphen für ein festes k ist sehr schwierig (siehe [Lu]) und bis jetzt nur für Primzahlpotenzen bekannt. In Abschnitt 5.4 kommen wir auf Beispiele von Ramanujan-Graphen zurück.

1.4 Formale Potenzreihenringe

Der Ring $\mathbb{C}[[u]]$ der formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten u ist ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung $v(f) = i$ falls $f = \sum_{j \geq i} a_j u^j, a_i \neq 0$. Die Bewertung v induziert durch

$$|f| = \begin{cases} 0 & \text{falls } f = 0 \\ \rho^{v(f)} & \text{sonst} \end{cases}$$

einen nicht-archimedischen Absolutbetrag auf $\mathbb{C}[[u]]$, wobei $0 < \rho < 1$ beliebig aber fest gewählt ist.

Ist $f(u) = \sum a_i u^i, g(u) = \sum g_i u^i \in \mathbb{C}[[u]]$ mit $|g_i| < 1$ gegeben, so konvergiert $f(g)$ wegen $|a_i| \leq 1$ und $|g^i| \rightarrow 0$ in $\mathbb{C}[[u]]$. Da $|g| < 1$ genau dann gilt, wenn $g \in \mathfrak{m} = u\mathbb{C}[[u]]$ liegt, bedeutet dies, daß man in eine Potenzreihe $f(u)$ eine weitere Potenzreihe $g(u)$ einsetzen kann, wenn $g(u)$ kein Absolutglied besitzt.

Wichtige Beispiele sind die beiden Reihen

$$\begin{aligned} \exp(u) &= \sum_{i \geq 0} \frac{u^i}{i!} \\ \log(1+u) &= \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{u^i}{i}. \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\exp(\log(1+u)) = 1+u$$

und

$$\log(\exp(u)) = \log(1 - (1 - \exp(u))) = u.$$

Weiterhin ist für $f, g \in \mathbb{C}[[u]]$

$$\exp(f+g) = \exp(f)\exp(g),$$

wenn die Ausdrücke definiert sind.

Definition 1.4.1. Die Abbildung $\frac{d}{du} \log : \mathbb{C}[[u]] \rightarrow \mathbb{C}[[u]]$, die durch

$$\left(\frac{d}{du} \log\right) f := \frac{f'}{f}$$

definiert ist, wobei f' die formale Ableitung von f nach u bezeichne, heißt *logarithmische Ableitung*.

Die logarithmische Ableitung ist additiv:

$$\left(\frac{d}{du} \log\right) (fg) = \left(\frac{d}{du} \log\right) f + \left(\frac{d}{du} \log\right) g.$$

Ist $|f| < 1$, so ist

$$\left(\frac{d}{du} \log\right) (f) = (\log f)'$$

Lemma 1.4.2. (Newton-Lemma) Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Dann gilt

$$\log(\det(I - uA)) = \text{tr}(\log(I - uA)).$$

Beweis. Für $n = 1$ ist das trivial. Beide Seiten der Gleichung sind additiv in kurzen exakten Sequenzen, woraus mit Induktion die Aussage folgt. \square

Die Aussage bleibt richtig, wenn man \mathbb{C} durch einen kommutativen Ring (mit 1) der Charakteristik 0 ersetzt.

Allgemeiner benötigen wir auch Potenzreihenringe in mehreren Veränderlichen. Seien u_1, \dots, u_n Unbestimmte, so bezeichne

$$\mathbb{C}[[\mathbf{u}]] := \mathbb{C}[[u_1, \dots, u_n]]$$

den Potenzreihenring in n Unbestimmten. Für $0 \neq f(\mathbf{u}) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} a_{\mu} \mathbf{u}^{\mu}$ mit $\mathbf{u}^{\mu} = u_1^{\mu_1} \cdots u_n^{\mu_n}$ wird durch

$$\nu_{\mathbf{u}}(f) := \inf\{\mu_1 + \cdots + \mu_n \mid a_{(\mu_1, \dots, \mu_n)} \neq 0\}$$

eine Abbildung auf $\mathbb{C}[[\mathbf{u}]]$ definiert, die sich zu einer diskreten Bewertung des Quotientenkörpers von $\mathbb{C}[[\mathbf{u}]]$ fortsetzt. Wiederum definiert

$$|f| = \begin{cases} 0 & \text{falls } f = 0 \\ \rho^{\nu(f)} & \text{sonst} \end{cases}$$

einen nicht-archimedischen Absolutbetrag, und $\mathbb{C}[[\mathbf{u}]]$ ist vollständig bezüglich dieses Betrags. Allerdings ist $\mathbb{C}[[\mathbf{u}]]$ kein diskreter Bewertungsring: Zum Beispiel hat das Element $u_1 + u_2^{-1}$ aus dem Quotientenkörper die Bewertung null, ist aber offensichtlich keine Potenzreihe. Deswegen ist auch $\{f \in \mathbb{C}[[\mathbf{u}]] \mid \nu(f) > 0\}$ kein Hauptideal.

Sei $A_{\mathbf{u}} = (A_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}[[\mathbf{u}]])$ mit $\nu_{\mathbf{u}}(A_{ij}) \geq 1$. Dann ist $\nu_{\mathbf{u}}(A_{ij}^l) \geq l$ für alle $l \geq 1$. Insbesondere konvergiert dann die Reihe

$$\text{tr}(\log(I - A_{\mathbf{u}})).$$

Das Newton-Lemma verallgemeinert sich zu

Lemma 1.4.3. Sei $A_{\mathbf{u}} = (A_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}[[\mathbf{u}]])$ mit $\nu_{\mathbf{u}}(A_{ij}) \geq 1$ für $1 \leq i, j \leq n$. Dann gilt

$$\log(\det(I - A_{\mathbf{u}})) = \text{tr}(\log(I - A_{\mathbf{u}})).$$

Beweis. Es sei x eine neue Unbestimmte. Das Newton-Lemma angewandt auf den Fall $R = \mathbb{C}[[\mathbf{u}]]$ besagt dann

$$\log(\det(I - xA_{\mathbf{u}})) = \text{tr}(\log(I - xA_{\mathbf{u}})).$$

Nach der Voraussetzung an $A_{\mathbf{u}}$ konvergiert die rechte Seite der Gleichung für $x = 1$ in $\mathbb{C}[[\mathbf{u}]]$ (bezüglich der Bewertung $\nu_{\mathbf{u}}$). Dann muß dort auch die linke Seite konvergieren und gleich sein. \square

1.5 Gruppenoperationen auf Graphen

Definition 1.5.1. Eine Operation einer Gruppe G auf einem Graphen X ist ein Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}(X)$. Wir notieren die Operation eines Elementes $g \in G$ auf $v \in VX$ bzw. $e \in EX$, das heißt die Anwendung des Bildes von g unter dieser Abbildung auf v bzw. e mit $g \cdot v$ bzw. $g \cdot e$.

Insbesondere operiert G auf der Knoten- und der Kantenmenge. Die Bahnen dieser Operation werden mit Gv bzw. Ge , die Stabilisatoren mit G_v bzw. G_e bezeichnet. Es gilt

$$G_e = G_{\bar{e}} \subseteq G_{\partial_0(e)} \cap G_{\partial_1(e)}.$$

Ist X ein kombinatorischer Graph, so gilt sogar die Gleichheit

$$G_e = G_{\bar{e}} = G_{\partial_0(e)} \cap G_{\partial_1(e)}.$$

Eine Gruppe G operiert *frei* bzw. *treu* auf einem Graphen X , wenn sie auf VX und EX frei bzw. treu operiert. Sind die Stabilisatoren G_v für alle $v \in VX$ endlich, so operiert G *diskret* auf X . In dem Falle sind natürlich auch alle Stabilisatoren G_e von Kanten endlich.

Definition 1.5.2. Operiert eine Gruppe G auf dem Graphen X , so daß $g \cdot e \neq \bar{e}$ ist für alle $e \in EX$, so sagt man, daß G *inversionsfrei* auf X operiere.

Operiert eine Gruppe G inversionsfrei auf X , so definieren wir den *Quotientengraphen* $G \backslash X$ als den Graphen der Bahnen unter dieser Operation, die ihre Nachbarschaftsrelationen von X erben:

$$\begin{aligned} V(G \backslash X) &:= \{Gv \mid v \in VX\} \\ E(G \backslash X) &:= \{Ge \mid e \in EX\} \end{aligned}$$

Die durch $\partial_i(Ge) := G(\partial_i e)$, $i = 0, 1$ gegebenen Randoperatoren sind wohldefiniert und $\overline{Ge} := G\bar{e}$ ist eine zulässige Inversion von Kanten, die alle Graphaxiome erfüllt. (Die Inversionsfreiheit der Operation von G auf X impliziert gerade $Ge \neq \overline{Ge} = G\bar{e}$, ist also notwendig.)

Definition 1.5.3. Sei $p : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Graphen. Dann heißt X *Überlagerung* von Y , wenn p selbst und für alle $v \in VX$ die Einschränkung $\text{stern}(v) \rightarrow \text{stern}(p(v))$ surjektiv ist. Die Überlagerung $p : X \rightarrow Y$ heißt *unverzweigt*, falls die Einschränkung $p : \text{stern}(v) \rightarrow \text{stern}(p(v))$ für alle $v \in VX$ sogar bijektiv ist.

Bemerkung 1.5.4. Unverzweigte Überlagerungen sind also surjektive, lokal bijektive Morphismen. Sie entsprechen dem Überlagerungsbegriff aus der Algebraischen Topologie.

Operiert G (inversionsfrei) auf X , so induziert die Quotientenabbildung eine Überlagerung $X \rightarrow Y := G \backslash X$.

Definition 1.5.5. Überlagerungen der Form $X \rightarrow Y := G \backslash X$ nennen wir *galoisch* und bezeichnen sie auch mit

$$X \xrightarrow{G} Y.$$

Die Gruppe G ist nicht wohlbestimmt, wenn sie nicht treu operiert.

Proposition 1.5.6. *Die Gruppe G operiere treu auf dem zusammenhängenden Graphen X . Dann ist die Überlagerung $X \xrightarrow{G} Y := G \backslash X$ genau dann unverzweigt, wenn G frei auf X operiert.*

Beweis. G operiere frei auf X , $v \in VX$ sei ein beliebiger Knoten. Sind e, e' Kanten mit $\partial_0(e) = \partial_0(e') = v$, mit $ge = e'$, $g \in G$, so ist $gv = v$ und es muß nach Voraussetzung $g = 1$ gelten. Die Überlagerung ist also unverzweigt.

Sei umgekehrt die Überlagerung $X \xrightarrow{G} Y$ unverzweigt und $v \in VX$ ein beliebiger Knoten in X mit Stabilisator G_v . Dann ist $ge = e$ für alle $e \in EX$ mit $\partial_0(e) = v$ und alle $g \in G_v$, da die Überlagerung unverzweigt ist. Daraus folgt $G_v \subseteq G_w$ für alle zu v benachbarten Knoten w . Da X zusammenhängend ist, folgt daraus $G_v \subseteq G_w$ für alle $w \in VX$. Da die Operation von G als treu vorausgesetzt war ist G_v trivial, die Operation von G auf X damit frei. \square

Proposition 1.5.7. (Hurwitz-Formel) *Sei X ein endlicher Graph und G eine endliche Gruppe, die auf X operiere mit Quotient $Y := G \backslash X$. Es seien $VV \subseteq VX$ und $VE \subseteq EX$ Vertretersysteme der Operation von G auf den Knoten und den geometrischen Kanten ($e \in VE$ stehe für die geometrische Kante $\{e, \bar{e}\}$). Dann gilt*

$$1 - g(X) = \#G \cdot (1 - g(Y)) + \#G \cdot \left(\sum_{v \in VV} \left(\frac{1}{\#G_v} - 1 \right) - \sum_{e \in VE} \left(\frac{1}{\#G_e} - 1 \right) \right).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} 1 - g(X) &= \#VX - \frac{1}{2} \#EX \\ &= \sum_{v \in VV} \frac{\#G}{\#G_v} - \sum_{e \in VE} \frac{\#G}{\#G_e} \\ &= \#G(1 - g(Y)) + \#G \left(\sum_{v \in VV} \left(\frac{1}{\#G_v} - 1 \right) - \sum_{e \in VE} \left(\frac{1}{\#G_e} - 1 \right) \right), \end{aligned}$$

da $1 - g(Y) = \#VV - \#VE$ gilt. \square

Definition 1.5.8. Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei auf dem Graphen X operiere. Ein *Fundamentbereich von X modulo G* ist ein Untergraph Y von X mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung der natürlichen Quotientenabbildung $Y \rightarrow G \backslash X$ ein Isomorphismus ist.

Ist X ein Baum, so existiert ein Fundamentbereich der Operation von G auf X genau dann, wenn $G \backslash X$ wieder ein Baum ist (siehe [Se, I,4.1]).

2 Die Zetafunktion von Graphen

Ein zentrales Hilfsmittel der Kombinatorik sind erzeugende Funktionen, bei Graphen insbesondere solche über Wege verschiedener Arten, die wir im ersten Abschnitt studieren. Wir richten uns dabei hauptsächlich nach [Ka]. Anschließend führen wir die Zetafunktion eines endlichen Graphen Y als erzeugende Funktion der geschlossenen Wege des assoziierten orientierten Kantengraphen Y_K^+ ein. Die wichtigsten Eigenschaften der Zetafunktion folgen aus einem Dualitätssatz, der den allgemeinen Laplace-Operator $\Delta(u)$ von Y in Beziehung setzt zu dem Nachbarschaftsoperator von Y_K^+ .

2.1 Erzeugende Funktionen

Definition 2.1.1. Sei a_n eine Folge von natürlichen Zahlen. Die formalen Potenzreihen

$$\exp\left(\sum_{n>0} \frac{a_n}{n} u^n\right) \text{ und } \sum_{n \geq 0} a_n u^n$$

heißen *erzeugende Funktionen* der a_n .

Bemerkung 2.1.2. In der Literatur wird meist die Potenzreihe $\sum a_n u^n$ als erzeugende Funktion eingeführt. Wenn wir zwischen den beiden Potenzreihen explizit unterscheiden wollen, nennen wir die erste Reihe auch *exponentielle erzeugende Funktion*.

Die beiden Potenzreihen sind gewissermaßen gleichwertig. Ist etwa die Reihe $\exp(\sum_{n>0} \frac{a_n}{n} u^n)$ bekannt, so kann man $\sum a_n u^n$ mit Hilfe der logarithmischen Ableitung berechnen:

$$u \cdot \frac{d}{du} \log \exp\left(\sum_{n>0} \frac{a_n}{n} u^n\right) = u \cdot \frac{d}{du} \sum_{n>0} \frac{a_n}{n} u^n = \sum_{n>0} a_n u^n.$$

Wichtige Beispiele sind die die beiden erzeugenden Funktionen

$$\Gamma(v, w; u) := \sum_{n \geq 0} \#\mathcal{P}^n(v, w) u^n, \quad (2.1)$$

$$\Gamma'(v, w; u) := \sum_{n \geq 0} \#\mathcal{R}^n(v, w) u^n. \quad (2.2)$$

Nach unserer generellen Voraussetzung ist X lokal endlich, diese Potenzreihen sind also wohldefiniert.

Sei $Y = X$ wieder ein endlicher Graph mit $VY = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $EY = \{e_1, \dots, e_{2m}\}$. In Abschnitt 1.2 hatten wir erste Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Wegeoperatoren studiert. Die Gleichungen (2.1), (2.2) übersetzen sich dann in

$$\Gamma(v_j, v_i; u) = \sum_{n \geq 0} (A^n)_{i,j} u^n, \quad (2.3)$$

$$\Gamma'(v_j, v_i; u) = \sum_{n \geq 0} (A_n)_{i,j} u^n. \quad (2.4)$$

Die Identität (1.6) läßt sich auch schreiben als

$$\sum_{m \geq 0} A_m u^m = (1 - u^2) (\Delta(u))^{-1}.$$

Insbesondere ist also

$$\Gamma'(v_j, v_i; u) = (1 - u^2) (\Delta(u)^{-1})_{i,j}.$$

Für die Wege, die nicht notwendig reduziert sind, gilt nach der Cramerschen Regel

$$\Gamma(v_j, v_i; u) = \sum_{n \geq 0} (A^n)_{i,j} u^n = [(I - uA)^{-1}]_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} \det(I^{(j,i)} - uA^{(j,i)})}{\det(I - uA)},$$

wobei $I^{(j,i)}, A^{(j,i)}$ die Matrizen sind, die aus I und A durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte entstehen.

Die Determinante $\det(I - uA)$ hat noch eine andere wichtige Bedeutung. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \log \det(I - uA) &= \text{tr} \log(I - uA) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{m>0} \frac{(A^m)_{i,i} u^m}{m} \\ &= - \sum_{m>0} \frac{\#\mathcal{G}^m(Y) u^m}{m}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Man erhält also als (exponentielle) erzeugende Funktion der geschlossenen Wege auf Y gerade

$$\exp\left(\sum_{m>0} \frac{\#\mathcal{G}^m(Y)}{m} u^m\right) = \det(I - uA)^{-1}.$$

Für eine weitere wichtige Interpretation von $\det(I - uA)$ zählen wir Zyklen, die ja nach Definition geschlossene Wege (der Länge > 0) modulo Drehung in eine Richtung sind. Wir erinnern daran, daß jeder geschlossene Weg W positiver Länge

eine eindeutige Darstellung $W = P^m$ hat, wobei P ein primitiver Weg ist und m die Vielfachheit des Zyklus definiert war, der von W induziert ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \log \det(I - uA) &= - \sum_{W \in \mathcal{G}^+(Y)} \frac{u^{l(W)}}{l(W)} \\ &= - \sum_{Z \in \mathcal{Z}(Y)} \frac{1}{l(Z)} \frac{l(Z)}{m(Z)} u^{l(Z)}. \end{aligned}$$

Aus der eindeutigen Darstellung $W = P^m$, P primitiv, folgt dann

$$\begin{aligned} \log \det(I - uA) &= - \sum_{Z \in \mathcal{Z}(Y)} \frac{1}{m(Z)} u^{l(W)} \\ &= - \sum_{Z \in \mathcal{Z}(Y), Z \text{ primitiv}} \left(u^{l(Z)} + \frac{1}{2} (u^{l(Z)})^2 + \frac{1}{3} (u^{l(Z)})^3 + \dots \right) \\ &= \sum_{Z \in \mathcal{Z}(Y), Z \text{ primitiv}} \log(1 - u^{l(Z)}). \end{aligned}$$

Exponentiation ergibt

$$\det(I - uA) = \prod_{Z \in \mathcal{Z}(Y), Z \text{ primitiv}} (1 - u^{l(Z)}). \quad (2.6)$$

Die Wegfunktionen lassen sich noch verallgemeinern. Wir indizieren die Kanten e_1, \dots, e_{2m} mit den Unbestimmten u_1, \dots, u_{2m} mit der Regel $\mathbf{u}(e_j) := u_j$. Der Nachbarschaftsoperator induziert dann einen neuen Operator $A_{\mathbf{u}} \in \text{End}(C_0(Y) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{u}])$ durch

$$A_{\mathbf{u}}(x) := \sum_{\partial_0(e)=x} \partial_1(e) \mathbf{u}(e).$$

Setzt man durch $\mathbf{u}(e_1, \dots, e_l) := \prod_{j=1}^l \mathbf{u}(e_j)$ die Funktion \mathbf{u} auf Wege der Länge > 0 fort, so ergibt sich als Verallgemeinerung von (1.1)

$$A_{\mathbf{u}}^l(v) = \sum_{(e_1, \dots, e_l) \text{ Weg}, \partial_0(e_1)=v} \partial_1(e_l) \mathbf{u}(e_1, \dots, e_l).$$

Proposition 2.1.3. *Sei Y ein endlicher Graph. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \det(I - A_{\mathbf{u}}) &= \exp \left(- \sum_{W \in \mathcal{G}^+(Y)} \frac{\mathbf{u}(W)}{l(W)} \right) \\ &= \prod_{Z \in \mathcal{Z}(Y), Z \text{ primitiv}} (1 - \mathbf{u}(Z)). \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis läuft analog wie in dem Fall, daß die Unbestimmten alle auf eine Unbestimmte u gesetzt werden. Die Gleichung

$$\log \det(I - A_{\mathbf{u}}) = \text{tr} \log(I - A_{\mathbf{u}})$$

folgt aus dem verallgemeinerten Newton-Lemma 1.4.3. \square

2.2 Die Zetafunktion

Wir bestimmen nun die Wegfunktion auf dem gerichteten Kantengraphen Y_K^+ des endlichen Graphen Y . Der Operator T , den wir in Definition 1.2.5 eingeführt haben, ist der Nachbarschaftsoperator auf Y_K^+ . Die Rechnungen im letzten Abschnitt hingen nicht davon ab, daß der Graph Y ungerichtet ist. Für die Potenzreihe

$$\Gamma''(e_1, e_2; u) := \sum_{n \geq 0} \# \mathcal{P}^n(Y_K^+, e_1, e_2) u^n, \quad (2.7)$$

die wir zu Wegen in Y_K^+ bilden, ergibt sich deswegen analog

$$\Gamma''(e_j, e_i; u) = \sum_{n \geq 0} (T^n)_{i,j} u^n = [(I - uT)^{-1}]_{i,j} = \frac{\det(I^{(j,i)} - uT^{(j,i)})}{\det(I - uT)}.$$

Genauso bestimmt man die erzeugende Funktion der geschlossenen Wege auf dem gerichteten Graphen Y_K^+ :

$$\exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{\# \mathcal{G}^m(Y_K^+)}{m} u^m \right) = \det(I - uT)^{-1}.$$

Lemma 3.2.3 impliziert, daß wir dies auch als erzeugende Funktion von geschlossenen, stark reduzierten Wegen in Y auffassen können:

$$\exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{\# S\mathcal{G}^m(Y)}{m} u^m \right) = \det(I - uT)^{-1}.$$

Diese erzeugende Funktion und ihre Eigenschaften werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit studieren. Wie im vorigen Abschnitt werden wir allgemeiner auch den Operator

$$T_{\mathbf{u}}(e) := \sum_{(e, e') \text{ reduziert}} \mathbf{u}(e') e'$$

betrachten, wobei $\mathbf{u} = u_1 \dots, u_{2m}$ wieder eine Variablenbelegung der $2m$ Kanten von Y ist. Interpretieren wir T als Nachbarschaftsoperator auf Y_K^+ , so versehen wir im Unterschied zum letzten Abschnitt nicht die Kanten, sondern die Knoten des Graphen Y_K^+ mit Unbestimmten. Dennoch kann man dadurch Wege in Y_K^+ differenzieren: Ein Weg in Y_K^+ ist wohlbestimmt durch die Angabe der Knoten, durch die er führt, selbst in dem Fall, daß Y und damit Y_K^+ Schleifen enthält.

Definition 2.2.1. Sei Y ein endlicher Graph. Dann heißt die erzeugende Funktion

$$Z_Y(u) := \exp\left(\sum_{m>0} \frac{\#SG^m(Y)u^m}{m}\right)$$

Zetafunktion von Y . Die Potenzreihe in mehreren Unbestimmten

$$Z_Y(\mathbf{u}) := \exp\left(\sum_{W \in SG(Y)} \frac{\mathbf{u}(W)}{l(W)}\right)$$

heißt die Zetafunktion von Y in mehreren Unbestimmten.

Ist kein Mißverständnis zu befürchten, so nennen wir sowohl $Z_Y(u)$ als auch $Z_Y(\mathbf{u})$ einfach „Zetafunktion von Y “. Zwischen diesen beiden Funktionen gilt die einfache Relation $Z_Y(u) = Z_Y(\mathbf{u})|_{\mathbf{u}=(u,\dots,u)}$.

Lemma 2.2.2. Sei Y ein endlicher Graph und Y' der Graph, der aus Y entsteht, indem ein Knoten v vom Grad 1 und die Kanten $e_1 := e, e_2 := \bar{e}$ mit $\partial_0(e) = v$ gelöscht werden. Dann enthält die Funktion $Z_Y(\mathbf{u})$ keine der Unbestimmten $\mathbf{u}(e_1), \mathbf{u}(e_2)$. Insbesondere gilt

$$Z_Y(u) = Z_{Y'}(u).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition der Zetafunktion, da kein geschlossener, stark reduzierter Weg durch die Kanten e_1, e_2 laufen kann. Somit gilt $SG^l(Y) = SG^l(Y')$. \square

Sind Y_1, \dots, Y_r die Zusammenhangskomponenten von Y , so ist $SG^l(Y) = \bigcup_{i=1}^r SG^l(Y_i)$, was

$$Z_Y(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^r Z_{Y_i}(\mathbf{u})$$

bedeutet. Ohne Einschränkung studieren wir deswegen im weiteren nur noch Zetafunktionen zusammenhängender Graphen.

Definition 2.2.3. Sei $W \in SG(Y)$. Dann heißt

$$\frac{1}{1 - \mathbf{u}(W)}$$

der Eulerfaktor zu W .

Satz 2.2.4. Sei Y ein endlicher Graph. Dann ist

$$Z_Y(\mathbf{u}) = \det(I - T_{\mathbf{u}})^{-1} = \prod_{Z \in \mathcal{RZ}(Y), Z \text{ primitiv}} \frac{1}{1 - \mathbf{u}(Z)}.$$

Beweis. Dieser Satz wird auf dieselbe Art bewiesen wie Proposition 2.1.3, indem man T als Nachbarschaftsoperator des gerichteten Kantengraphen Y_K^+ interpretiert. \square

Korollar 2.2.5. Sei Y ein endlicher Graph mit $g(Y) \geq 1$ und $Z_Y(u)^{-1} = \sum_i a_i u^i$ seine invertierte Zetafunktion. Dann wird die Taille von Y durch

$$t(Y) = \min\{i > 0 \mid a_i \neq 0\}$$

gegeben.

Wir bezeichnen mit Y_l den Kreis der Länge l . Die Knoten und Kanten von Y_l sind gegeben durch

$$VY_l := \{v_0, \dots, v_{l-1}\}, \quad EY_l := \{e_0, \bar{e}_0, \dots, e_{l-1}, \bar{e}_{l-1}\},$$

wobei alle v_i bzw. alle e_j paarweise verschieden seien. Die Randoperatoren sind gegeben durch

$$\partial_0(e_j) = v_j, \quad \partial_1(e_j) = v_{j+1 \text{ modulo } l}.$$

Korollar 2.2.6. Für den Kreis der Länge $l \geq 1$ gilt

$$Z_{Y_l}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(1 - u_1 \cdots u_l)(1 - u_{l+1} \cdots u_{2l})},$$

wobei u_1, \dots, u_l die Variablenbelegung der Kanten e_1, \dots, e_l von Y_l und entsprechend u_{l+1}, \dots, u_{2l} die von $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_l$ sei.

Sei Y ein endlicher Graph vom Geschlecht 1. Dann ist

$$Z_Y(u)^{-1} = (1 - u^l)^2$$

wobei $l = t(Y)$ die Taille von Y sei.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus Satz 2.2.4, da in Y_l nur die beiden reduzierten Primzykel existieren, die durch Y_l selbst gegeben sind, jeweils in eine Richtung orientiert.

Für die zweite Aussage können wir uns auf einen zusammenhängenden Graphen Y beschränken, da die Zetafunktion von endlichen Bäumen trivial ist. Nach Lemma 2.2.2 reicht es sogar, die Graphen Y_l zu betrachten. Die Aussage folgt dann aus der ersten. \square

Kombinatorisch interessanter als die Zetafunktion in mehreren Veränderlichen ist die Funktion in einer Veränderlichen.

Satz 2.2.7. ([Ih], [Ba1]) Sei Y ein zusammenhängender, endlicher Graph. Dann ist

$$Z_Y(u)^{-1} = \det(I - uT) = (1 - u^2)^{g(Y)-1} \det(\Delta(u)).$$

Die erste Gleichung folgt direkt aus Satz 2.2.4. Die zweite Gleichung ist ein Analogon zu dem bekannten Zusammenhang der Spektren von Graphen und ihrer Kantengraphen (siehe [Bi, Th. 3.8]) und kann mit derselben Idee bewiesen werden. Diese Idee läßt sich auf L -Funktionen übertragen, so daß wir den Beweis nur dort führen (siehe Satz 3.6.1). Andere kombinatorische Beweise der zweiten Gleichung findet man in [No], [ST].

Der Satz 2.2.7 hat einige wichtige Folgerungen.

Korollar 2.2.8. *Sei Y ein zusammenhängender, endlicher Graph mit*

$$q_v := \deg(v) - 1 \geq 1$$

für alle $v \in VY$. Dann ist

$$\deg(Z_Y(u)^{-1}) = \#EY$$

und der Leitkoeffizient ist von der Gestalt $\prod_{v \in VY} q_v$.

Beweis. Es ist $Q = \text{diag}(q_v)$, wobei $\text{diag}(q_v)$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $q_v = \deg(v) - 1$, $v \in VY$ bezeichne. Ist kein Knoten vom Grad 1, so sind die q_v alle ungleich Null. Deswegen ist $\det(\Delta(u))$ ein Polynom vom Grad $2 \cdot \#VY$ mit Leitkoeffizient $\prod_{v \in VY} q_v$. \square

Ein Maß für die Komplexität eines Graphen Y ist die Zahl

$$\kappa(Y) := \#\{\text{spannende Bäume von } Y\}$$

der aufspannenden Bäume von Y . Wir nennen $\kappa(Y)$ deswegen die *Komplexität* von Y .

Korollar 2.2.9. *Sei Y ein zusammenhängender, endlicher Graph mit Geschlecht $g(Y) > 1$. Dann ist*

$$(1-u)^{-g(Y)} \cdot Z_Y(u)^{-1}|_{u=1} = 2^{g(Y)} \chi(Y) \kappa(Y),$$

wobei $\kappa(Y)$ die Komplexität von Y und $\chi(Y) := 1 - g(Y)$ die Eulerzahl von Y bezeichnet. Insbesondere ist die Vielfachheit des Faktors $(1-u)$ in $Z_Y(u)^{-1}$ genau $g(Y)$.

Beweis. Der Operator $\Delta = \Delta(1)$, den wir bezüglich der Standardbasis als Matrix auffassen, ist singulär, da der Vektor $(1, \dots, 1)$ im Kern liegt. Nach Satz 2.2.7 ist $(1-u)$ demnach ein Faktor von $Z_Y(u)^{-1}$ mit Vielfachheit $\geq g(Y)$.

Es bezeichne $\Delta^{(i,j)}$ die Untermatrix von $\Delta = \Delta(1)$, die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht. Klassisch ist dann das Resultat

$$\kappa(Y) = (-1)^{i+j} \det(\Delta^{(i,j)})$$

für jedes Paar (i, j) (siehe [Bi, Kap. 6]). Nach Satz 2.2.7 reicht es nun zu zeigen, daß

$$\frac{\det \Delta(u)}{(u-1)}|_{u=1} = -2\chi(Y) \det(\Delta^{(1,1)}) \quad (2.8)$$

für das Paar $(i, j) = (1, 1)$ gilt. Die linke Seite entspricht aber gerade $(\det \Delta(u))'|_{u=1}$.

Es ist

$$\Delta(u) = (\Delta_1(u), \dots, \Delta_n(u))^t,$$

wobei $\Delta_i(u)$ die i -te Zeile von $\Delta(u)$ bezeichne. Setzt man

$$\Delta'_i(u) := (\Delta'(u)_{i1}, \dots, \Delta'(u)_{in}),$$

so gilt

$$\det \Delta'(u) = \sum_{i=1}^n \det(\Delta_1(u), \dots, \Delta'_i(u), \dots, \Delta_n(u)).$$

Weiterhin ist

$$\Delta'_i(u) = -A_i + 2Q_i u,$$

wobei A_i, Q_i jeweils die i -ten Zeilen bezeichnen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \det \Delta'(1) &= \sum_{i=1}^n \det(\Delta(1)) - (1 - q(v_i)) \det(\Delta(1)^{(i,i)}) \\ &= \sum_{i=1}^n (q(v_i) + 1 - 2) \det(\Delta(1)^{(1,1)}) \\ &= (2m - 2n) \det(\Delta(1)^{(1,1)}) = -2\chi(Y) \det(\Delta(1)^{(1,1)}), \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu (2.8).

Der Nachsatz folgt aus (2.8) und der Voraussetzung $\chi(Y) = 1 - g(Y) < 0$. \square

Die nächsten Korollare geben weitere Eigenschaften der Zetafunktion für reguläre Graphen an. In diesem Fall ist die Kenntnis von $Z_Y(u)$ äquivalent zu der Kenntnis des Spektrums von Y : Ist Y ein $q+1$ -regulärer Graph, so gilt

$$\Delta(u) = ((qu^2 + 1)I - uA)$$

und damit

$$\det(\Delta(u)) = \prod_{\lambda \in \text{Spec}(Y)} (1 - \lambda u + qu^2). \quad (2.9)$$

Korollar 2.2.10. *(Funktionalgleichung) Sei Y ein $q+1$ -regulärer und endlicher, zusammenhängender Graph mit $\#VY = n$, $\#EY = 2m$. Dann ist*

$$Z_Y\left(\frac{1}{qu}\right) = \left(\frac{1-u^2}{q^2u^2-1}\right)^{m-n} q^{2m-n} u^{2m} Z_Y(u).$$

Beweis. Wegen der Regularität von Y ist $Q = q \cdot I$, und der Beweis folgt mit $g(Y) - 1 = m - n$ aus der Gleichungskette

$$\begin{aligned} Z_Y\left(\frac{1}{qu}\right)^{-1} &= \left(1 - \frac{1}{q^2u^2}\right)^{g(Y)-1} \det\left(I - A \frac{1}{qu} + q \cdot \frac{1}{q^2u^2}\right) \\ &= (q^2u^2)^{-(g(Y)-1)} (q^2u^2 - 1)^{g(Y)-1} (qu^2)^{-n} \det(q \cdot Iu^2 - Au + I) \\ &= (q^2u^2 - 1)^{g(Y)-1} q^{2n-2m-n} (u^2)^{n-m-n} (1 - u^2)^{-(g(Y)-1)} Z_Y(u)^{-1} \\ &= \left(\frac{1 - u^2}{q^2u^2 - 1}\right)^{n-m} q^{n-2m} u^{-2m} Z_Y(u)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Ist Y $q + 1$ -regulär, so können wir zudem $Z_Y(u)$ als Funktion in einer komplexen Variablen auffassen, indem wir

$$\zeta_Y(s) := Z_Y(q^{-s}) = \sum_{m>0} \frac{\#SG^m(Y)q^{-sm}}{m}$$

setzen. Diese Reihe konvergiert zumindest für $Re(s) > 1$ und läßt sich wegen der Rationalität von $Z_Y(u)$ meromorph auf die ganze Ebene fortsetzen. Die Funktionalgleichung von $\zeta_Y(s)$ hat die Form

$$\zeta_Y(1-s) = \left(\frac{1 - q^{-2s}}{q^{2(1-s)} - 1}\right)^{m-n} q^{2m-n} q^{-2ms} \zeta_Y(s),$$

da nach Korollar 2.2.10 gilt:

$$\begin{aligned} \zeta_Y(1-s) &= Z_Y((qu)^{-1})|_{u=q^{-s}} \\ &= \left(\frac{1 - q^{-2s}}{q^{2(1-s)} - 1}\right)^{m-n} q^{2m-n} q^{-2ms} \zeta_Y(s). \end{aligned}$$

Definition 2.2.11. Wir sagen „ $\zeta_Y(s)$ erfüllt die Riemannsche Vermutung“, wenn alle Pole von $\zeta_Y(s)$ im kritischen Streifen $0 < Re(s) < 1$ auf der Geraden $Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen.

Das folgende Korollar zeigt, daß die technische Definition 1.3.8 von Ramanujan-Graphen über Extremalbedingungen der Eigenwerte eine sehr natürliche Auszeichnung bestimmter Graphen ist.

Korollar 2.2.12. ([Su]) *Sei Y ein regulärer, zusammenhängender endlicher Graph. Dann erfüllt $\zeta_Y(s)$ genau dann die Riemannsche Vermutung, wenn Y ein Ramanujan-Graph ist.*

Beweis. Bezeichnet $\Phi := (Iu - A)$ das charakteristische Polynom des Nachbarschaftsoperators A von Y , so ist nach Satz 2.2.7

$$Z_Y(u)^{-1} = (1 - u^2)^{g(Y)-1} u^n \Phi\left(\frac{1 + qu^2}{u}\right),$$

mit $n := \#VY$. Wir fassen u als komplexe Variable auf.

Für $u \neq 0$ ist $z = \frac{1+qu^2}{u}$ äquivalent zu $qu^2 - zu + 1 = 0$ oder $u = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4q}}{2q}$. Eigenwerte $\pm(q+1)$ von A entsprechen also den Polstellen $u = \pm 1, \pm \frac{1}{q}$ von $Z_Y(u)$. Wegen $q^{-s} = u$ folgt hieraus $Re(s) = 0$ oder $Re(s) = 1$ für die entsprechenden Pole von $\zeta_Y(s)$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ gegeben mit $\Phi(z) = 0$ und $z \neq \pm(q+1)$. Es bleibt zu zeigen, daß das diesem z entsprechende u dann eine Gleichung $q^{-s} = u$ mit $Re(s) = \frac{1}{2}$ erfüllt. Da A symmetrisch ist, muß z reell sein. Damit ist wegen $1 + qu^2 = zu$ auch

$$\frac{z\bar{u}}{\bar{u}} = \frac{(1 + qu^2)\bar{u}}{u\bar{u}} = \frac{\bar{u} + q|u|^2u}{|u|^2}$$

reell. Das heißt aber $q|u|^2 = 1$ oder anders $|u| = q^{-\frac{1}{2}}$. □

3 Die L -Funktion von Graphen

Einem zusammenhängenden Graphen Y und einem Knoten $v_0 \in VY$ kann man einen Baum X und eine freie Gruppe $\pi(Y, v_0)$, die auf X operiert, zuordnen, so daß

$$X \xrightarrow{\pi(Y, v_0)} Y$$

eine unverzweigte Überlagerung ist. X ist bis auf Isomorphie eindeutig und heißt universelle Überlagerung von Y mit der Fundamentalgruppe $\pi(Y, v_0)$.

Dieses Überlagerungskonzept aus der Algebraischen Topologie läßt sich bei Graphen so verallgemeinern, daß man damit auch nichtfreie Gruppenoperationen auf Bäumen charakterisieren kann. In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels stellen wir das Konzept von Graphen von Gruppen vor, das von H. Bass und J.-P. Serre entwickelt wurde (siehe [Ba2, Se]).

Anschließend ordnen wir einem Graphen von Gruppen mit bestimmten Endlichkeitsbedingungen und einer Darstellung ρ der universellen Überlagerungsgruppe eine formale Potenzreihe zu und nennen sie L -Funktion. Wir beweisen die Rationalitätsformeln und diskutieren den Fall $\rho = 1$. Die L -Funktion läßt sich dann als eine erzeugende Funktion von Wegen auf einem kantengewichteten Graphen auffassen.

3.1 Graphen von Gruppen

Ein Graph von Gruppen $\mathbb{Y} = (Y, \mathcal{Y})$ besteht aus einem zusammenhängenden Graphen Y und Familien $\mathcal{Y}_e, e \in EY$ und $\mathcal{Y}_v, v \in VY$ von Gruppen mit $\mathcal{Y}_e = \mathcal{Y}_{\bar{e}}$ und einer Einbettung $\mathcal{Y}_e \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\partial_1(e)}, a \mapsto a^e$, für alle $e \in EY$. Das Bild unter dieser Einbettung wird mit \mathcal{Y}_e^e bezeichnet. Die *Weggruppe* $F(\mathbb{Y}) = F(Y, \mathcal{Y})$ sei die Gruppe, die von den Gruppen $\mathcal{Y}_v, v \in VY$ und den Elementen von EY erzeugt wird und den Relationen

$$\bar{e} = e^{-1} \quad \text{und} \quad a^e e^{-1} = a^{\bar{e}}$$

für alle $e \in EY, a \in \mathcal{Y}_e$ genügt. Sei $c = (e_1, \dots, e_n)$ ein Weg in Y der Länge ≥ 0 mit Anfangspunkt v_0 . Setze weiterhin $v_i := t(e_i), i = 1, \dots, n$.

Definition 3.1.1. Ein *Weg der Länge l in einem Graph von Gruppen $\mathbb{Y} = (Y, \mathcal{Y})$* ist ein Paar (c, μ) , wobei c ein Weg der Länge l in Y mit Anfangspunkt v_0 und $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n)$ eine Folge von Elementen $\mu_i \in \mathcal{Y}_{v_i}$ ist. Das Wort

$$|c, \mu| := \mu_0 e_1 \mu_1 e_2 \cdots e_n \mu_n \text{ in } F(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$$

heißt assoziiert zu (c, μ) . Der Weg (c, μ) heißt *reduziert*, falls $\mu_i \notin \mathcal{Y}_{e_i}^{e_i}$ für alle Indizes i , für die $e_i = \bar{e}_{i+1}$ gilt, bzw. wenn $\mu_0 \neq 1$ im Fall $n = 0$ ist.

Die Menge der Wege der Länge l in \mathbb{Y} bezeichnen wir mit $\mathcal{P}^l(\mathbb{Y})$.

Im Fall $n = 0$ ist $|c, \mu| = \mu_0$. Die Begriffe Länge, Anfangspunkt, geschlossen etc. übertragen sich vom Weg c in Y direkt auf den Weg (c, μ) in \mathbb{Y} . Ebenso verwenden wir die Notation $(c, \mu)(c', \mu')$ für die Komposition von Wegen und $(c, \mu)^{-1} := ((\bar{e}_n, \dots, \bar{e}_1), (\mu_n^{-1}, \dots, \mu_0^{-1}))$ für die Invertierung. Offensichtlich ist $|(c, \mu)| \cdot |(c, \mu)^{-1}| = 1$ in $F(\mathbb{Y})$.

Sei $v_0 \in VY$ fest. Wir definieren die *Fundamentalgruppe* von \mathbb{Y} mit Anfangspunkt v_0 als

$$\pi(\mathbb{Y}, v_0) := \{|c, \mu| \mid (c, \mu) \text{ geschlossener Weg von } (\mathbb{Y}) \text{ mit Anfangspunkt } v_0\}.$$

Im Fall $G_v = \{1\}$ für alle $v \in VY$ kann man \mathbb{Y} mit dem Graphen Y und $\pi(\mathbb{Y}, v_0)$ mit der gewöhnlichen Fundamentalgruppe von Y identifizieren.

Definition 3.1.2. Sei $\mu' = (\mu'_0, \dots, \mu'_n)$ eine weitere Folge von Elementen $\mu'_i \in G_{v_i}$. Dann heißen die Wege (c, μ) und (c, μ') äquivalent, falls eine Folge (a_1, \dots, a_n) von Elementen $a_i \in G_{e_i}$ existiert, so daß

$$\mu'_0 = \mu_0 a_1^{\bar{e}_1}, \quad a_i^{\bar{e}_i} \mu'_i = \mu_i a_{i+1}^{\bar{e}_{i+1}} \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{und} \quad a_n^{\bar{e}_n} \mu'_n = \mu_n$$

gilt. (Offensichtlich definiert dies eine Äquivalenzrelation.)

Lemma 3.1.3. ([Se]) *Sind die Wege (c, μ) und (c, μ') äquivalent, so gilt $|c, \mu| = |c, \mu'|$ in $F(\mathbb{Y})$. Ist umgekehrt $|c, \mu| = |c', \mu'|$ für die Wege (c, μ) und (c', μ') und sind diese Wege reduziert, so ist $c = c'$ und (c, μ) und (c, μ') sind äquivalent.*

Die Äquivalenzklassen reduzierter geschlossener Wege mit Anfangspunkt v_0 entsprechen genau den nichttrivialen Elementen der Fundamentalgruppe $\pi(\mathbb{Y}, v_0)$. Dieses Lemma erlaubt es uns insbesondere, die Begriffe *geschlossen*, *reduziert*, *Aufkante* etc. auch auf die assoziierten Wörter $|c, \mu|$ anzuwenden.

Für jede Kante $e \in EY$ wählen wir ein Vertretersystem S_e für die Menge der Nebenklassen $\mathcal{Y}_{\partial_0(e)}/\mathcal{Y}_e^e$ aus, in dem die Klasse $1 \cdot \mathcal{Y}_e^e$ durch die 1 dargestellt sei. Wir nennen einen Weg (c, μ) dann *S-normalisiert*, wenn $\mu_i \in S_{e_{i+1}}$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt. Dadurch haben wir Standardvertreter der Äquivalenzklassen der (c, μ) festgelegt. Ist zusätzlich $\mu_n \in S_{e_n}$, so nennen wir (c, μ) *S*-normalisiert*.

Definition 3.1.4. Ein geschlossener Weg (c, μ) in \mathbb{Y} heißt *stark reduziert*, wenn die Länge $l(c) \geq 1$ ist und sowohl (c, μ) als auch $(c, \mu)^2$ reduziert sind. Weiterhin ist ein Weg (c, μ) *normiert*, wenn μ_0 in $\mathcal{Y}_{e_1}^{\bar{e}_1}$ liegt, bzw. wenn $\mu_0 = 1$ ist im Fall, daß (c, μ) schon S -normalisiert ist. Wir setzen:

$$\begin{aligned} C_{red}(\mathbb{Y}) &:= \{\text{geschlossene, stark reduzierte, } S\text{-normalisierte Wege in } \mathbb{Y}\}, \\ C_{redn}(\mathbb{Y}) &:= \{(c, \mu) \in C_{red}(\mathbb{Y}) \mid (c, \mu) \text{ normiert}\}, \\ C_{redn*}(\mathbb{Y}) &:= \{(c, \mu) \in C_{redn}(\mathbb{Y}) \mid (c, \mu) \text{ } S^*\text{-normalisiert}\}. \end{aligned}$$

Ist eine Menge \mathcal{B} von Wegen in \mathbb{Y} gegeben, so schreiben wir wie bei Graphen $\mathcal{B}^l := \mathcal{B} \cap \mathcal{P}^l(\mathbb{Y})$ für die Untermenge der entsprechenden Wege der Länge l .

3.2 Die universelle Überlagerung von \mathbb{Y}

Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei auf einem Baum X operiere, mit der Projektion $p : X \rightarrow Y = G \backslash X$. Seien $X_V \subseteq X_E \subseteq X$ Unterbäume, wobei X_V die Liftung eines spannenden Baumes von Y auf X und die eingeschränkten Projektionen $p_E : X_E \rightarrow Y$ bijektiv auf Kanten und $p_V : X_V \rightarrow Y$ bijektiv auf Knoten ist. Zusätzlich verlangen wir, daß für jede Kante $e \in EX_E$ mindestens einer der Knoten $\partial_0(e)$, $\partial_1(e)$ in VX_V liegt. (Ist der Quotient Y kombinatorisch, so ist die letzte Bedingung wegen $X_V \subseteq X_E$ automatisch erfüllt.) Zu jedem $v \in VX_E$ wählen wir ein $g_v \in G$, so daß $g_v \cdot v \in VX_V$ gilt und $g_v = 1$, falls schon $v \in VX_V$ ist. Durch

$$G \backslash \backslash X := (Y, \mathcal{Y})$$

mit den Stabilisatoren $\mathcal{Y}_v := G_{p_V^{-1}(v)}$ und $\mathcal{Y}_e := G_{p_E^{-1}(e)}$ wird ein Graph von Gruppen definiert. Die Einbettung $\mathcal{Y}_e \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\partial_1(e)}$ wird dabei durch

$$a \mapsto g_{\partial_1(e)} a g_{\partial_1(e)}^{-1}$$

definiert. $G \backslash \backslash X$ ist sowohl von der Wahl der Graphen $X_V \subseteq X_E$ als auch von der Wahl der Elemente g_v abhängig.

Umgekehrt konstruieren wir zu einem gegebenen Graphen von Gruppen $\mathbb{Y} = (Y, \mathcal{Y})$ einen Baum \tilde{Y} , der in Verbindung mit der Gruppe $\pi(\mathbb{Y}, v_0)$ die „universelle Überlagerung“ von \mathbb{Y} darstellt. Für zwei Knoten $v_1, v_2 \in V\tilde{Y}$ bezeichnen wir mit $F[v_1, v_2]$ die Menge derjenigen Elemente von $F(\mathbb{Y})$, die durch Wege (c, μ) dargestellt werden, wobei c ein Weg in Y ist, der v_1 und v_2 verbindet. Mit dieser Konvention gilt $\pi(\mathbb{Y}, v_0) = F[v_0, v_0]$.

Wir definieren

$$V\tilde{Y} := \bigcup_{v \in VY} F[v_0, v] / \mathcal{Y}_v$$

und bezeichnen für ein Element $\gamma \in F[v_0, v]$ mit $[\gamma]_v$ die Nebenklasse $\gamma \mathcal{Y}_v \in V\tilde{Y}$. Für einen Weg (c, μ) in \mathbb{Y} mit Anfangspunkt v_0 und Endpunkt v gilt

$$F[v_0, v] = F[v_0, v_0] \cdot |c, \mu|.$$

Daher ist durch $g \cdot [\gamma]_v = [g\gamma]_v$ eine Operation von $F[v_0, v_0] = \pi(\mathbb{Y}, v_0)$ auf $V\tilde{Y}$ gegeben. Wir definieren weiter

$$E\tilde{Y} := \{([c, \mu]_v, [c', \mu']_w) : v, w \in VY, |(c, \mu)^{-1} \cdot (c', \mu')| = |(e), \nu|\},$$

mit $\partial_0(e) = v, \partial_1(e) = w$. Die beiden Knoten $[c, \mu]_v$ und $[c', \mu']_w$ sind also genau dann durch eine Kante verbunden, wenn $(c, \mu)^{-1} \cdot (c', \mu')$ sich auf einen Weg der Länge 1 reduzieren läßt. Inversion von Kanten und die Funktionen ∂_0 und ∂_1 auf \tilde{Y} sind die natürlichen.

Bemerkung 3.2.1. Die Kanten $\tilde{e} \in V\tilde{Y}$ mit $\partial_0(\tilde{e}) = \tilde{v}$, die vom Ursprung $\mathcal{O} = [1]_{v_0}$ wegweisen, lassen sich durch die Klassen $[\gamma]_e = \gamma \cdot G_e, \gamma \in F[v_0, v]$ darstellen. Allerdings gilt dann i.a. nicht mehr $g \cdot [\gamma]_e = [g\gamma]_e$, weshalb wir in der Definition auf eine solche Parametrisierung nicht zurückgegriffen haben.

Wir zitieren den grundlegenden Satz:

Satz 3.2.2. ([Ba2, Se]) \tilde{Y} ist ein Baum. Rührt \mathbb{Y} von einer Operation einer Gruppe G auf einem Baum X her, so existiert ein Paar von Isomorphismen

$$(m, \phi) : (X, G) \rightarrow (\tilde{Y}, \pi(\mathbb{Y}, v_0))$$

mit $\phi(g)(m(v)) = m(gv)$ und $\phi(g)(m(e)) = m(ge)$ für alle $g \in G, e \in EX, v \in VX$.

Lemma 3.2.3. Seien $[c, \mu]_v$ und $[c', \mu']_w$ zwei verschiedene Knoten in $V\tilde{Y}$. Dann sind sie in \tilde{Y} genau dann durch einen reduzierten Weg der Länge l verbunden, wenn $|(c, \mu)^{-1}(c', \mu')| = |d, \nu|$ ist, wobei (d, ν) ein reduzierter Weg der Länge l in \mathbb{Y} ist.

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch Induktion über die Länge l . Die Definition der Nachbarschaft von Knoten in \tilde{Y} ist der Induktionsanfang.

Seien nun $[c, \mu]_v$ und $[c', \mu']_w$ zwei Elemente von $V\tilde{Y}$, die durch einen Weg der Länge $l + 1$ verbunden sind. Der Knoten $[c'', \mu'']_u$ liege auf diesem Weg und sei benachbart zu $[c', \mu']_w$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$|(c, \mu)^{-1}(c'', \mu'')| = |d, \nu|,$$

wobei (d, ν) ein reduzierter Weg der Länge l ist. Weiterhin ist dann

$$|(c'', \mu'')^{-1}(c', \mu')| = \tau_0 e \tau_1$$

mit $e \in EY$ und

$$|(c, \mu)^{-1}(c', \mu')| = |(d, \nu)((e), \tau)|,$$

wobei $(d, \nu)((e), \tau)$ ein reduzierter Weg der Länge $l + 1$ ist mit $\tau = (\tau_0, \tau_1)$. Würde sich die Kante e gegen die letzte Kante von (d, ν) kürzen lassen, so hätte der Weg, der $[c, \mu]_v$ und $[c', \mu']_w$ verbindet nach Induktionsvoraussetzung die Länge $l - 1$, was der Voraussetzung widerspricht.

Seien andererseits $[c, \mu]_v$ und $[c', \mu']_w$ zwei Elemente von $V\tilde{Y}$, für die

$$|(c, \mu)^{-1}(c', \mu')| = |d, \nu|$$

gilt und (d, ν) ein reduzierter Weg der Länge $l + 1$ ist. Sei

$$(c', \mu') = ((y'_1, \dots, y'_n), (\mu'_0, \dots, \mu'_n)).$$

Indem man eventuell die Rollen von $[c, \mu]_v$ und $[c', \mu']_w$ vertauscht, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß

$$|(c, \mu)^{-1}((y'_1, \dots, y'_{n-1}), (\mu'_0, \dots, \mu'_{n-1}))|$$

der Wert eines reduzierten Weges der Länge l ist. Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann, daß $[c, \mu]_v$ und $[c', \mu']_w$ durch einen reduzierten Weg der Länge $l + 1$ verbunden sind. \square

3.3 G -äquivariante Funktionen auf X

Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei und diskret auf dem Baum X operiere mit endlichem Quotienten $Y = G \backslash X$. Sei

$$\rho : G \longrightarrow U(V_\rho)$$

eine unitäre Darstellung von G , wobei U die unitäre Gruppe des endlichdimensionalen Hilbertraumes V_ρ bezeichne.

Es seien

$$\begin{aligned} H_{\rho,0}(X) := H_\rho(VX) &:= \{f : VX \rightarrow V_\rho \mid f(\gamma v) = \rho(\gamma) \cdot f(v) \forall v \in VX, \gamma \in G\}, \\ H_{\rho,1}(X) := H_\rho(EX) &:= \{f : EX \rightarrow V_\rho \mid f(\gamma e) = \rho(\gamma) \cdot f(e) \forall e \in EX, \gamma \in G\}. \end{aligned}$$

die Räume der G -äquivalenten Funktionen auf Knoten bzw. Kanten von X . Da Y als endlich vorausgesetzt war, sind diese \mathbb{C} -Vektorräume endlichdimensional. Mit $I_{\rho,j}$ bezeichnen wir die Identität auf $H_{\rho,j}(X)$.

Sei α ein Operator auf X , also $\alpha \in \text{Hom}(C_i(X), C_j(X))$, der mit der Operation von $\text{Aut}(X)$ vertauscht. Dann wird durch

$$\alpha_\rho(f) := f \circ \alpha$$

ein Element von $\text{Hom}(H_{\rho,j}(X), H_{\rho,i}(X))$ definiert, $i, j = 0, 1$. Ist $x \in C_i(X)$ und $\alpha(x) \in C_j(X)$, so fassen wir $f \circ \alpha$ als Element von $H_{\rho,i}(X)$ auf, indem f linear fortgesetzt wird auf $\alpha(x)$. Weiterhin gilt

$$(\alpha \circ \beta)_\rho = \beta_\rho \circ \alpha_\rho \quad (3.1)$$

für $\alpha \in \text{Hom}(C_i(X), C_j(X))$, $\beta \in \text{Hom}(C_j(X), C_k(X))$, $i, j, k \in \{0, 1\}$.

So führen zum Beispiel die Operatoren A, Q auf Knoten von X zu den Operatoren

$$A_\rho f(v) = \sum_{\partial_0(e)=v} f(\partial_1(e)), \quad (3.2)$$

$$Q_\rho f(v) = (\deg(v) - 1)f(v). \quad (3.3)$$

Wir definieren noch

$$\Delta_\rho(u) := I_{\rho,1} - A_\rho u + Q_\rho u^2 \in \text{End}(H_{\rho,0}(X) \otimes \mathbb{C}[u]).$$

Analog dazu induzieren Operatoren auf Kanten von X Endomorphismen von $H_\rho(EX)$. So ist etwa $T_\rho \in \text{End}(H_\rho(EX))$ mit

$$T_\rho h(e) := \sum_{(e,e') \text{ reduziert}} h(e'). \quad (3.4)$$

Die gemischten Operatoren σ_i, ∂_i induzieren die Homomorphismen $\sigma_{\rho,i} \in \text{Hom}(H_{\rho,1}(X), H_{\rho,0}(X))$ und $\partial_{\rho,i} \in \text{Hom}(H_{\rho,1}(X), H_{\rho,0}(X))$. Zudem ist nach (3.1)

$$(\sigma_i \circ \partial_j)_\rho = \partial_{\rho,j} \circ \sigma_{\rho,i}.$$

Den Zusammenhang der Operatoren $A_\rho, \Delta_\rho(u)$ und T_ρ mit L -Funktionen von Graphen werden wir in den nächsten Abschnitten studieren.

Im Fall $\rho = 1$ kann man die Räume $H_{\rho,i}(X)$ genau beschreiben: Dies sind dann genau die G -invarianten Funktionen auf X , die wir identifizieren mit den Funktionen auf Y . Es gilt also

$$\begin{aligned} H_{\rho,0}(X) &\cong C_0(Y) = \{f : Y \rightarrow \mathbb{C}\} \\ H_{\rho,1}(X) &\cong C_1(Y) = \{f : EY \rightarrow \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Die Kanten von Y sind in natürlicher Weise mit Gewichten versehen: Sei X_E eine Liftung der Kanten von Y auf X wie im letzten Abschnitt. Jeder Kante $e \in EY$ weisen wir das Gewicht

$$i(e) := [G_{\partial_0(p_E^{-1}(e))} : G_{p_E^{-1}(e)}]$$

zu. Dieser Index ist unabhängig von der Wahl der Liftung, da die entsprechenden Stabilisatoren zueinander konjugiert sind. Im allgemeinen gilt dabei $i(e) \neq i(\bar{e})$. Das Tupel (Y, i) heißt *gewichteter Graph*. Der Nachbarschaftsoperator $A = A_{(Y,i)}$ von (Y, i) sei definiert durch

$$A(v) := A_{(Y,i)}(v) := \sum_{\partial_0(e)=v} i(e)\partial_1(e).$$

Dabei wird also der normale Nachbarschaftsoperator von Y noch mit den Gewichten der involvierten Kanten versehen. Analog definieren wir den Nachbarschaftsoperator $T_{(Y,i)}$ auf orientierten Kanten durch

$$T(e) := T_{(Y,i)}(e) := \left(\sum_{\substack{\partial_0(e')=\partial_1(e) \\ e' \neq \bar{e}}} i(e')e' \right) + (i(\bar{e}) - 1)\bar{e}.$$

Entsprechend verallgemeinern wir die Gradfunktion \deg zu

$$\deg(v) := \deg_{(Y,i)}(v) := \sum_{\partial_0(e)=v} i(e).$$

Jedem Knoten v wird dadurch der Grad eines Knoten \tilde{v} zugewiesen, der in der Überlagerung $X \rightarrow Y$ über v liegt.

Definition 3.3.1. Ein gewichteter Graph (Y, i) heißt k -regulär, falls $\deg_{(Y,i)}(v) = k$ ist für alle $v \in VY$.

Ist (Y, i) durch die Überlagerung $X \xrightarrow{\Gamma} Y$ gegeben, X ein Baum, so ist (Y, i) genau dann k -regulär, wenn auch X k -regulär ist.

Wir setzen noch

$$Q(v) := Q_{(Y,i)}(v) := \left(\sum_{\partial_0(e)=v} i(e) \right) - 1 \cdot v.$$

Die Operatoren auf gewichteten Graphen lassen sich nun mit den Operatoren A_1, T_1 etc. vergleichen. Es ist

$$(Q_1 f)(v) = (Q_1 f)(\tilde{v}) = (\deg(\tilde{v}) - 1)f(\tilde{v}) = (\deg(\tilde{v}) - 1)f(v) = (\deg_{(Y,i)}(v) - 1)f(v).$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (A_1 f)(v) &= (A_1 f)(\tilde{v}) = \sum_{\partial_0(\tilde{e})=\tilde{v}} f(\partial_1(\tilde{e})) \\ &= \sum_{\partial_0(e)=v} \sum_{\tilde{e} \in P_E^{-1}(e)} f(\partial_1(\tilde{e})) \\ &= \sum_{\partial_0(e)=v} i(e) f(\partial_1(e)). \end{aligned}$$

Bezeichnet $f_v, v \in VY$ die Standardbasis von $C_0(Y)$, so folgt

$$A_1 f_v = \sum_{\partial_0(e)=v} i(\tilde{e}) f_{\partial_1(e)}.$$

Analog berechnen wir nun T_1 auf $C_1(Y)$. Es sei $\tilde{v} = \partial_1(\tilde{e})$ in X und $\partial_1(e) = v$ in Y . Dann gilt

$$\begin{aligned} (T_1 h)(e) &= (T_1 h)(\tilde{e}) = \sum_{(\tilde{e}, \tilde{e}_1) \text{ red.}} h(\tilde{e}_1) \\ &= \sum_{\substack{\partial_0(\tilde{e}_1)=\tilde{v} \\ \tilde{e}_1 \neq \tilde{e}}} h(\tilde{e}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{\substack{\partial_0(e_1)=v \\ e_1 \neq \tilde{e}}} \sum_{\tilde{e}_1 \in P_E^{-1}(e_1)} h(\tilde{e}_1) \right) + \sum_{\substack{\tilde{e}_1 \in P_E^{-1}(\tilde{e}) \\ \tilde{e}_1 \neq \tilde{e}}} h(\tilde{e}_1) \\ &= \left(\sum_{\substack{\partial_0(e_1)=v \\ e_1 \neq \tilde{e}}} i(e_1) h(e_1) \right) + (i(\tilde{e}) - 1) h(\tilde{e}). \end{aligned}$$

Bezeichnet $h_e, e \in EY$ die Standardbasis der charakteristischen Funktionen von $C_1(Y)$, so folgt

$$T_1 h_e = \sum_{\substack{\partial_1(e_1)=\partial_0(e) \\ \tilde{e}_1 \neq e}} i(e_1) h_{e_1} + (i(\tilde{e}) - 1) h_{\tilde{e}}.$$

Bemerkung 3.3.2. Faßt man die Operatoren als Matrizen auf, so ergibt sich

$$A_{(Y,i)} = A_1^t \quad \text{und} \quad T_{(Y,i)} = T_1^t,$$

analog zu dem Fall ungewichteter Graphen, vgl. Bemerkung 1.2.6. Anders als im ungewichteten Fall ist $A_{(Y,i)}$ im allgemeinen nicht mehr symmetrisch.

3.4 Die L -Funktion $L(X, G, \rho; \mathbf{u})$

Sei X ein Baum, auf dem die Gruppe G inversionsfrei und diskret operiere mit dem Quotienten $Y = G \backslash X$ mit $EY = \{e_j, j \in J\}$ und $VY = \{v_i, i \in I\}$. Mit $\tilde{e}_j, j \in J$ bezeichnen wir die Kanten eines wie im letzten Abschnitt definierten Teilgraphen X_E von X (X_E ist ein Schnitt der Kanten von Y in X) und mit $G_{\tilde{e}_j} := G_{\tilde{e}_j}$ ihre Stabilisatoren. Weiter schreiben wir $\tilde{v}_i, i \in I$ für die Knoten eines entsprechenden Teilgraphen X_V von X . Nach dem letzten Abschnitt können wir nun X auffassen als die universelle Überlagerung \tilde{Y} des Graphen von Gruppen $\mathbb{Y} := G \backslash X$, der von der Wahl der Schnitte X_E und X_V , der Wahl der Einbettungen der Stabilisatoren $G_{\tilde{e}_j}$ und von der Festlegung eines Ursprungs $v_0 \in VY$ abhängt. Um die Operation der Gruppe G kombinatorisch zu beschreiben, stellen wir jetzt den Zusammenhang zwischen G und $\mathcal{C}_{redn}(\mathbb{Y})$ her.

Mit $\mathcal{R}_j^l(X, G)$ sei die Menge der reduzierten Wege der Länge l in X bezeichnet, deren Aufkante \tilde{e}_j ist und deren letzte Kante in $G \cdot \tilde{e}_j$ liegt. Weiterhin sei

$$\mathcal{R}^l(X, G) := \bigcup_{j \in J} \mathcal{R}_j^l(X, G).$$

Elemente aus G , die \tilde{e}_j auf eine Kante e werfen, die die Schlußkante eines Weges $W \in \mathcal{R}_j^l(X, G)$ ist, bezeichnen wir mit g_W . Eindeutig wird dadurch natürlich nur die Nebenklasse $g_W G_{\tilde{e}_j}$ charakterisiert. Mit $j(W)$ bezeichnen wir den Index j der Aufkante von W .

Es seien in X durch $[c, \mu]_v$ und $[c', \mu']_w$ zwei beliebige benachbarte Knoten gegeben, wobei ohne Einschränkung

$$[c, \mu]_v = [\mu_0 y_1 \cdots \mu_{m-2} y_{m-1}]_v$$

und

$$[c', \mu']_w = [\mu_0 y_1 \cdots \mu_{m-2} y_{m-1} \mu_{m-1} y_m]_w$$

die gekürzte und S -normalisierte Darstellung sei. Die Kante \tilde{e}_j bezeichne im weiteren die Kante $[c, \mu]_v, [c', \mu']_w$ oder die invertierte Kante $([c', \mu']_w, [c, \mu]_v)$. Im ersten Fall ist $p_E(\tilde{e}_j) = y_m$, im zweiten Fall ist $p_E(\tilde{e}_j) = \bar{y}_m$. Der Weg (c, μ') bezeichnet das Wort $\mu_0 y_1 \cdots \mu_{m-2} y_{m-1} \mu_{m-1}$.

Wir setzen

$$\mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X, e_j) := \{(d, \tau) \in \mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X) \mid \text{Aufkante von } d \text{ ist } e_j\}.$$

Weiterhin definieren wir

$$\mathcal{C}_{redn*}^l(G \setminus X, e_j) := \mathcal{C}_{redn*}^l(G \setminus X) \cap \mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X, e_j).$$

Sei $(d, \tau) \in \mathcal{C}_{redn}(G \setminus X, e_j)$ gegeben. Dann wird durch

$$(d, \tau) \mapsto \langle d, \tau \rangle := \begin{cases} (c, \mu') \cdot (d, \tau) \cdot (c, \mu')^{-1} & \text{falls } p_E(\tilde{e}_j) = y_m \\ (c', \mu') \cdot (d, \tau) \cdot (c', \mu')^{-1} & \text{falls } p_E(\tilde{e}_j) = \bar{y}_m \end{cases}$$

eine Abbildung

$$\langle \cdot \rangle : \mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X, e_j) \longrightarrow \bigcup_{W \in \mathcal{R}_j^{l+1}(X, G)} g_W G_{\tilde{e}_j}$$

definiert.

Proposition 3.4.1. *Die Abbildung*

$$\langle \cdot \rangle : \mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X, e_j) \longleftrightarrow \bigcup_{W \in \mathcal{R}_j^{l+1}(X, G)} g_W G_{\tilde{e}_j(W)}$$

ist eine Bijektion. Des weiteren wird dadurch eine Bijektion

$$\mathcal{C}_{redn*}^l(G \setminus X, e_j) \longleftrightarrow \bigcup_{W \in \mathcal{R}_j^{l+1}(X, G)} \{g_W G_{\tilde{e}_j(W)}\}$$

induziert.

Beweis. Wir greifen auf die Bezeichnungen zurück, die wir vor der Proposition eingeführt haben. Der Stabilisator von $([c, \mu]_v, [c', \mu']_w)$ bzw. von $([c', \mu']_w, [c, \mu]_v)$ ist $\{(c, \mu') a^{\bar{y}_m} (c, \mu')^{-1} \mid a \in G_{y_m}\}$.

Sei $(d, \tau) \in \mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X)$ gegeben, wobei die Anfangskante von d gerade $e_j := y_m$ sei. Es ist dann $\tilde{e}_j = ([c, \mu]_v, [c', \mu']_w)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \langle d, \tau \rangle \cdot [c, \mu]_v &= [(c, \mu')(d, \tau) \mu_{m-1}^{-1}]_v \\ \langle d, \tau \rangle \cdot [c', \mu']_w &= [(c, \mu')(d, \tau) y_m]_w. \end{aligned}$$

Also ist

$$[c, \mu]^{-1} \langle \langle d, \tau \rangle \cdot [c', \mu'] \rangle = \mu'_m (d, \tau) y_m$$

ein reduzierter Weg der Länge $l+1$, da (d, τ) stark reduziert und normiert und y_m die Anfangskante von d ist. Nach Lemma 3.2.3 ist dann $[c, \mu]_v$ mit $\langle d, \tau \rangle \cdot [c', \mu']_w$ durch einen Weg W der Länge $l+1$ verbunden, was gerade $\langle d, \tau \rangle \in g_W G_{\tilde{e}_j}$ bedeutet.

Die Operation der Bilder von zwei Elementen von $\mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X)$ der Form $(d, \tau), (d, \tau')$ führt genau dann zu derselben Kante, wenn auch die S^* -Normalisierung der beiden Elemente übereinstimmt. Die Elemente von $\mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X)$, die dieselbe S^* -Normalisierung besitzen, entsprechen genau den Elementen von $g_W G_{\tilde{e}_j}$:

$$\langle d, \tau \rangle \cdot (c, \mu') a^{\bar{y}_m} (c, \mu')^{-1} = (c, \mu') (d, \tau) a^{\bar{y}_m} (c, \mu')^{-1} = \langle d, \tau' \rangle,$$

mit $\tau_{m-1} a^{\bar{y}_m} = \tau'_{m-1}$ und $\tau_i = \tau'_i$ für $i \leq m-2$.

Andererseits sei eine Kante $\tilde{e} = g_W \tilde{e}_j$ gegeben mit $W \in \mathcal{C}^{l+1}(\tilde{e}_j)$. Es ist dann

$$\tilde{e} = \{([c, \mu']_w, [c, \mu']_v), [(c, \mu')(d, \tau) y_m]_w\}$$

für ein $(d, \tau) \in \mathcal{C}_{redn}(G \setminus X)$ mit Aufkante e_j , wie man wieder mit Hilfe des Lemmas 3.2.3 sieht.

Sei nun $(d, \tau) \in \mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X)$ mit der Anfangskante $e_j := \bar{y}_m$ gegeben. Es ist dann $\tilde{e}_j = ([c', \mu']_w, [c, \mu]_v)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \langle d, \tau \rangle \cdot [c, \mu]_v &= [(c', \mu')(d, \tau) y_m^{-1} \mu_{m-1}^{-1}]_v \\ \langle d, \tau \rangle \cdot [c', \mu']_w &= [(c', \mu')(d, \tau)]_w. \end{aligned}$$

Dabei ist $y_m^{-1} = \bar{y}_m$ gerade in $G \cdot \tilde{e}_j$. Man argumentiert nun analog zum ersten Fall. Die Verknüpfung mit einem Element des Stabilisators hat hier die Gestalt:

$$\begin{aligned} \langle d, \tau \rangle \cdot (c, \mu') a^{\bar{y}_m} (c, \mu')^{-1} &= (c', \mu') (d, \tau) y_m^{-1} a^{\bar{y}_m} (c, \mu')^{-1} \\ &= (c', \mu') (d, \tau) y_m^{-1} a^{\bar{y}_m} y_m y_m^{-1} (c, \mu')^{-1} \\ &= (c', \mu') (d, \tau) a^{\bar{y}_m} (c, \mu')^{-1}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.4.2. In dem Beweis erkennt man, wieso man nur normierte Elemente (d, τ) betrachtet. Ist etwa $\tilde{e}_j = [(c, \mu]_v, [c', \mu']_w)$ und (d, τ) nicht normiert, so ist $(d, \tau) \cdot [c, \mu]_v = [(c, \mu')(d, \tau)\mu_{m-1}^{-1}]_v$, und die S -normalisierte Form wäre $[(c, \mu')(d, \tau')\mu_{m-1}^{-1}]_v$, wobei μ'' von μ' nur in der letzten Stelle abweicht und (d, τ') normiert ist. Dieser Knoten ist nicht mehr von der Form $g_W[c, \mu]_v$, $W \in \mathcal{R}^l(X, G)$.

Der Quotient $Y = G \backslash X$ sei endlich. Dann bezeichnen wir mit \mathbf{u} eine Variablenbelegung $\mathbf{u} : EX \rightarrow \{u_j \mid j = 1, \dots, 2m\}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{u}(\tilde{e}_j) = \mathbf{u}(g \cdot \tilde{e}_j) = u_j$ für alle $g \in G$. Wir fassen \mathbf{u} mittels $\mathbf{u}(e_j) = u_j$ auch als Funktion auf EY auf und setzen die Funktion durch $\mathbf{u}(y_1, \dots, y_l) := \prod_{j=1, \dots, l} \mathbf{u}(y_j)$ auf Wege (y_1, \dots, y_l) in X bzw. Y fort.

Im weiteren sei ρ immer eine endlich-dimensionale, unitäre Darstellung von G mit Darstellungsraum V_ρ . Wir definieren $\text{tr}_j(\rho(g)) := \text{tr}(\rho(g) \circ \varepsilon_j)$, wobei $\varepsilon_j : V_\rho \rightarrow V_\rho$ die Projektion auf den Unterraum

$$V_\rho^{G\varepsilon_j} := \{x \in V_\rho \mid g \cdot x = x \ \forall g \in G\varepsilon_j\}$$

bezeichnet.

Definition 3.4.3. Der Quotient $Y = G \backslash X$ sei ein endlicher Graph. Dann definieren wir $L(X, G, \rho; \mathbf{u})$ als die formale Potenzreihe

$$L(X, G, \rho; \mathbf{u}) := \exp \left(\sum_{(d, \tau) \in C_{redn^*}(G \backslash X)} \frac{1}{l(d)} \text{tr}_j(d) \rho(\langle d, \tau \rangle) \mathbf{u}(d) \right)$$

und nennen sie *L-Funktion (der Operation von G auf X zur Darstellung ρ)*. Faktorisiert ρ über eine normale Untergruppe $G' \subseteq G$ von endlichem Index, so nennen wir $L(X, G, \rho; \mathbf{u})$ auch *L-Funktion der Überlagerung $G' \backslash X \xrightarrow{G/G'} G \backslash X$* .

Ist $g' = g \cdot a$ für ein $a \in G_j$, so ist $\text{tr}_j(g') = \text{tr}(\rho(g)\rho(a) \circ \varepsilon_j) = \text{tr}(\rho(g) \circ \varepsilon_j)$. Man erhält

$$L(X, G, \rho; \mathbf{u}) = \exp \left(\sum_{(d, \tau) \in C_{redn}(G \backslash X)} \frac{1}{l(d)} \frac{1}{\#G_{\varepsilon_j(d)}} \text{tr}_j(d) \rho(\langle d, \tau \rangle) \mathbf{u}(d) \right).$$

Die Definition der *L-Funktion* ist also unabhängig von der Festlegung der Vertreter von G_v/G_v^e . Daß die Definition auch unabhängig von der Wahl der Schnitte X_E und X_V ist, also nur von der Operation von G auf X abhängt, wird aus Satz 3.5.2 folgen.

Im Fall $\rho = 1$ gilt

$$L(X, G, 1; \mathbf{u}) = \exp \left(\sum_{(d, \tau) \in C_{redn^*}(G \backslash X)} \frac{1}{l(d)} \mathbf{u}(d) \right).$$

Diese Funktion hängt nur noch von dem gewichteten Graphen (Y, i) ab. Wir setzen

$$Z_{(Y, i)}(\mathbf{u}) := L(X, G, 1; \mathbf{u})$$

und nennen $Z_{(Y, i)}(\mathbf{u})$ *Zetafunktion des (gewichteten) Graphen (Y, i)* .

Es sei der Quotient Y wieder ein endlicher Graph und die Operation von G auf X sogar frei. Dann ist der Graph von Gruppen $\mathbb{Y} = G \backslash \backslash X$ ein Graph und $F(\mathbb{Y})$ eine freie Gruppe, erzeugt von den Kanten einer Orientierung von Y . Die Menge der geschlossenen, stark reduzierten Wege von Y ist dann gleich der Menge $C_{redn}(G \backslash \backslash X)$. Der Baum X ist die universelle Überlagerung von Y und $\pi(\mathbb{Y}, v_0)$ die gewöhnliche Fundamentalgruppe $\pi(Y, v_0)$ im Punkt v_0 . Weil die Stabilisatoren alle trivial sind, ist $\text{tr}_j = \text{tr}$ und wir erhalten

$$L(X, G, \rho; \mathbf{u}) = \exp \left(\sum_{C \text{ stark red.}} \frac{1}{l(C)} \text{tr} \rho(\langle C \rangle) \mathbf{u}(C) \right),$$

was der Definition der *L-Funktionen* von Graphen in [H1] entspricht.

Wie bei der Definition 2.2.1 der Zetafunktion ist die *L-Funktion* in einer Variablen die eigentlich interessante Funktion. In diesem Fall läßt sie sich auch etwas allgemeiner formulieren.

Definition 3.4.4. Die Gruppe G operiere diskret und inversionsfrei auf dem Baum X mit dem Quotienten $Y = G \backslash X$. Die Menge $C_{redn}^l(G \backslash \backslash X)$ sei endlich für jedes $l \geq 1$. Dann definieren wir die *L-Funktion $L(X, G, \rho; u)$* in einer Variablen u als die formale Potenzreihe

$$L(X, G, \rho; u) := \exp \left(\sum_{(d, \tau) \in C_{redn^*}(G \backslash X)} \frac{1}{l(d)} \text{tr}_j(d) \rho(\langle d, \tau \rangle) u^{l(d)} \right).$$

Wie bei Zetafunktionen nennen wir beide Potenzreihen *L-Funktionen*, wenn eine Verwechslung nicht zu befürchten ist. Ist Y ein endlicher Graph, so erhält man $L(X, G, \rho; u)$ aus $L(X, G, \rho; \mathbf{u})$, indem man für jede Unbestimmte u_j die gleiche Unbestimmte u einsetzt.

Im Fall $\rho = 1$ erhält man insbesondere

$$Z_{(Y, i)}(u) := L(X, G, 1; u) = \exp \left(\sum_{l > 0} \frac{\#(C_{redn^*}^l(G \backslash \backslash X))}{l} u^l \right).$$

Dies ist die erzeugende Funktion über die geschlossenen, stark reduzierten, S^* -normalisierten und normierten Wege in $G \backslash \backslash X$.

3.5 Rationalität der L -Funktion

In allen folgenden Abschnitten dieses Kapitels setzen wir voraus, daß $Y = G \setminus X$ ein *endlicher* Graph ist.

Mit $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{2m}$ bezeichnen wir wieder die Kanten des wie oben definierten Teilgraphen X_E von X (X_E ist ein Schnitt der Kanten von Y in X) und mit $G_j := G_{\tilde{e}_j}$ ihre Stabilisatoren. Weiter schreiben wir $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ für die Knoten eines entsprechenden Teilgraphen X_V von X . Wir fassen X wieder als die universelle Überlagerung des entsprechenden Graphen von Gruppen $G \setminus X$ auf.

Nun setzen wir

$$H_\rho^{(j)} := H_\rho^{(j)}(EX) := \{f : G \cdot \tilde{e}_j \rightarrow V_\rho \mid f(\gamma e) = \rho(\gamma) \cdot f(e) \forall \gamma \in G\} \subseteq H_\rho(EX).$$

Dann ist

$$\Phi : H_\rho(EX) = \bigoplus_{j=1}^{2m} H_\rho^{(j)} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{2m} V_\rho^{G_j}, \quad f \mapsto (f(\tilde{e}_j))_{j=1, \dots, 2m}$$

ein Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen mit der Umkehrabbildung

$$(v_j)_{j=1, \dots, 2m} \mapsto \bigoplus_{j=1, \dots, 2m} h_{v_j}$$

und $h_{v_j} := \{g \cdot \tilde{e}_j \mapsto \rho(g) \cdot v_j\}$.

Der Operator $T_\rho \in \text{End}(H_\rho(EX))$ induziert mittels

$$(T_{\rho, \mathbf{u}} h)(e) := \sum_{(e, e') \text{ red.}} h(e') \mathbf{u}(e')$$

ein Element $T_{\rho, \mathbf{u}} \in \text{End}_{\mathbb{C}[\mathbf{u}]}(H_\rho(EX) \otimes \mathbb{C}[\mathbf{u}])$. Es gilt damit

$$(T_{\rho, \mathbf{u}}^l h)(e) := \sum_{(e, e'_1, \dots, e'_l) \text{ red.}} h(e'_l) \mathbf{u}(e'_1, \dots, e'_l).$$

Lemma 3.5.1. *Zu $W \in \mathcal{R}^{l+1}(X, G)$ bezeichne wieder $j(W)$ den Index der Anfangskante von W und g_W ein Element von G , so daß die Endkante von W von der Form $g_W \cdot \tilde{e}_j$ ist. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \text{tr } T_{\rho, \mathbf{u}}^l &= \sum_{W \in \mathcal{R}^{l+1}(X, G)} \text{tr}_{j(W)}(\rho(g_W)) \cdot (\mathbf{u}(W)/\mathbf{u}(\tilde{e}_{j(W)})) \\ &= \sum_{(d, \tau) \in C_{\text{redn}}(G \setminus X)} \frac{1}{\#G_{e_j(d)}} \text{tr}_{j(d)}(\rho(\langle d, \tau \rangle)) \mathbf{u}(d). \end{aligned}$$

Beweis. Für diesen Beweis setzen wir $T := T_{\rho, \mathbf{u}}$. Wegen

$$\text{End}_{\mathbb{C}[\mathbf{u}]}(H_\rho(EX) \otimes \mathbb{C}[\mathbf{u}]) \cong \bigoplus_{i,j} (\text{Hom}(V_\rho^{G_i}, V_\rho^{G_j}) \otimes \mathbb{C}[\mathbf{u}])$$

können wir T als eine direkte Summe $\bigoplus_{i,j} T_{i,j}$ schreiben. Es ist dann $\text{tr}(T^l) = \sum_{j=1}^{2m} \text{tr}(T_j^l)$ mit $T_j^l := (T^l)_{j,j}$, und wir können uns im weiteren auf die Bestimmung von $\text{tr}(T_j^l) = \text{tr}(\Phi \circ T_j^l \circ \Phi^{-1})$ beschränken.

Sei nun $v \in V_\rho^{G_j}$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} (\Phi \circ T_j^l \circ \Phi^{-1})(v) &= \Phi(T_j^l h_v) = (T_j^l h_v)(\tilde{e}_j) \\ &= (T^l h_v)(\tilde{e}_j) \\ &= \sum_{W \in \mathcal{R}_j^{l+1}(X, G)} \rho(g_W)(v) \cdot (\mathbf{u}(W)/\mathbf{u}(\tilde{e}_{j(W)})) \in V_\rho^{G_j} \otimes \mathbb{C}[\mathbf{u}]. \end{aligned}$$

Mit $(\Phi \circ T_j^l \circ \Phi^{-1})(v)$ liegt dabei der letzte Term der Gleichungskette in $V_\rho^{G_j} \otimes \mathbb{C}[\mathbf{u}]$. Jedes Element $f \in V_\rho^{G_j} \otimes \mathbb{C}[\mathbf{u}]$ besitzt aber eine eindeutige Darstellung $f = \sum_\alpha f_\alpha \otimes \mathbf{u}^\alpha$, $f_\alpha \in V_\rho^{G_j}$, wobei α durch die Multiindizes läuft. Insbesondere sind die Teilsummen $\sum \rho(g_W)(v)$, die zu einem Monom $(\mathbf{u}(W)/\mathbf{u}(\tilde{e}_{j(W)}))$ gehören, in $V_\rho^{G_j}$ enthalten. Der entsprechende Operator $\sum \rho(g_W)$ läßt sich also auf $V_\rho^{G_j}$ beschränken. Daraus folgt die erste Gleichung.

Die zweite Gleichung ist ein Korollar zu Proposition 3.4.1. \square

Satz 3.5.2. *Es ist*

$$L(X, G, \rho; \mathbf{u})^{-1} = \det(I - T_{\rho, \mathbf{u}}).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus der Gleichungskette

$$\begin{aligned} \log(L(X, G, \rho; \mathbf{u})^{-1}) &= - \sum_{(d, \tau) \in C_{\text{redn}}(G \setminus X)} \frac{1}{l(d) \#G_{e_j(d)}} \text{tr}_{j(d)}(\rho(\langle d, \tau \rangle)) \mathbf{u}(d) \quad (\text{Definition}) \\ &= - \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l} \text{tr } T_{\rho, \mathbf{u}}^l \quad (\text{Lemma 3.5.1}) \\ &= \text{tr } \log(I - T_{\rho, \mathbf{u}}) \\ &= \log(\det(I - T_{\rho, \mathbf{u}})). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der verallgemeinerten Newton-Formel 1.4.3. \square

Da der Operator $T_{\rho, \mathbf{u}}$ nur von dem Baum X , der Operation von G auf X und der Darstellung ρ abhängt, impliziert dieser Satz, daß die Definition der L -Funktion von allen getroffenen Wahlen unabhängig ist. Zudem folgt hieraus, daß unsere Definition der L -Funktion von diskreten Gruppenoperationen auf Bäumen zu den Definitionen in [Ba1, H3] äquivalent ist. Insbesondere können wir einen wichtigen Satz über das Verhalten der L -Funktionen in Überlagerungen zitieren:

Satz 3.5.3. [Ba1, II, Th. 4.6] Sei $G' \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index und ρ' eine endliche, unitäre Darstellung von G' . Dann ist

$$L(X, G', \rho'; u) = L(X, G, \text{ind}_{G'}^G \rho'; u).$$

Als wichtige Folgerung ergibt sich

Korollar 3.5.4. Ist $G' \subseteq G$ eine normale Untergruppe von endlichem Index und (Y, i) der kantenindizierte Quotient der Operation von G' auf X , so gilt

$$Z_{(Y,i)}(u) = L(X, G', 1; u) = \prod_{\rho \in \overline{G'/G'}} L(X, G, \rho; u)^{\deg(\rho)}.$$

Operiert G' insbesondere frei auf X mit $Y = G' \backslash X$, so ist

$$Z_Y(u) = L(X, G', 1; u) = \prod_{\rho \in \overline{G'/G'}} L(X, G, \rho; u)^{\deg(\rho)}.$$

3.6 Der Zusammenhang mit dem Laplace-Operator

Wir verallgemeinern nun Satz 2.2.7 auf L -Funktionen von Graphen. Dieses Ergebnis werden wir einerseits zum expliziten Berechnen von L -Funktionen benutzen. Andererseits werden wir den Satz für Strukturaussagen von L -Funktionen unendlicher Graphen benötigen.

Satz 3.6.1. Sei $Y = G' \backslash X$ ein endlicher Graph. Dann ist

$$L(X, G, \rho; u)^{-1} = (1 - u^2)^{-\chi_\rho} \det(\Delta_\rho(u))$$

mit $-\chi_\rho = \dim H_\rho(EX)/2 - \dim H_\rho(VX)$.

Beweis. Wir folgen dem Beweis von [Ba1, II, Th. 1.5]. Bass rechnet direkt mit Operatoren auf Graphen, wozu er den Begriff einer nichtkommutativen Determinante einführt. Wir rechnen auf den endlichdimensionalen \mathbb{C} -Vektorräumen $H_{\rho,i}(X)$. Wegen der Vertauschungsregel (3.1)

$$(\alpha \circ \beta)_\rho = \beta_\rho \circ \alpha_\rho$$

haben wir einige Umstellungen vorgenommen.

Es sei

$$\partial(u) := \partial_0 u - \partial_1 \quad (3.5)$$

$$\sigma(u) := \sigma_0 u. \quad (3.6)$$

Sei weiter $H := H_\rho(VX) \oplus H_\rho(EX)$, dann ist

$$\text{End}(H) = \begin{pmatrix} \text{End}(H_\rho(VX)) & \text{Hom}(H_\rho(VX), H_\rho(EX)) \\ \text{Hom}(H_\rho(EX), H_\rho(VX)) & \text{End}(H_\rho(EX)) \end{pmatrix}$$

die direkte Summe der entsprechenden Operatorräume. Wir definieren die beiden Operatoren

$$L := \begin{pmatrix} (1 - u^2)I_{\rho,0} & 0 \\ \partial_\rho(u) & I_{\rho,1} \end{pmatrix} \in \text{End}(H) \otimes \mathbb{C}[u]$$

$$M := \begin{pmatrix} I_{\rho,0} & \sigma_\rho(u) \\ -\partial_\rho(u) & (1 - u^2)I_{\rho,1} \end{pmatrix} \in \text{End}(H) \otimes \mathbb{C}[u].$$

Wegen

$$\sigma_0 \partial_1 = T + J, \quad \sigma_0 \partial_0 = TJ + I$$

ist

$$\partial(u)\sigma(u) = \Delta(u) - (1 - u^2)I$$

und

$$\sigma_0 \partial(u) = (T + J)(Ju - I).$$

Einerseits folgt daraus

$$ML = \begin{pmatrix} \Delta_\rho(u) & \sigma_\rho(u) \\ 0 & (1 - u^2)I_{\rho,1} \end{pmatrix}$$

impliziert, andererseits

$$LM = \begin{pmatrix} (1 - u^2)I_{\rho,0} & \sigma_\rho(u)(1 - u^2) \\ 0 & (I_{\rho,1} - J_\rho u)(I_{\rho,1} - T_\rho u) \end{pmatrix};$$

der letzte Eintrag resultiert aus

$$\begin{aligned} \sigma(u)\partial(u) + (1 - u^2)I &= (T + J)(Ju - I)u + (1 - u^2)I \\ &= (TJu^2 - Tu - Ju + Iu^2) + (1 - u^2)I \\ &= I - Tu - Ju + TJu^2 = (I - Tu)(I - Ju). \end{aligned}$$

Der Operator L ist offensichtlich invertierbar über $\mathbb{C}(u)$, woraus

$$ML = L^{-1}(LM)L$$

folgt. LM und ML haben insbesondere dieselbe Determinante:

$$\begin{aligned} (1 - u^2)^{\dim(H_\rho(EX))} \det \Delta_\rho(u) &= \det(ML) = \det(LM) \\ &= (1 - u^2)^{\dim(H_\rho(VX))} \det((I - uT_\rho)(I - J_\rho u)). \end{aligned}$$

Nach Satz 3.5.2 reicht es zu zeigen, daß

$$\det(I - J_\rho u) = (1 - u^2)^{\dim H_\rho(EX)/2}$$

gilt. Dazu zerlegen wir $H_\rho(EX)$ noch weiter: Wir zeichnen eine G -invariante Orientierung E^+X von X aus. Es sei

$$H_\rho(E^+X) := \{f : E^+X \rightarrow V_\rho \mid f(\gamma e) = \rho(\gamma) \cdot f(e) \forall e \in E^+X, \gamma \in G\}.$$

Faßt man in kanonischer Weise $H_\rho(E^+X)$ als Unterraum von $H_\rho(EX)$ auf, so ist

$$H_\rho(EX) = H_\rho(E^+X) \oplus JH_\rho(E^+X).$$

Entsprechend erhält man $\text{End}(H_\rho(EX)) \cong \text{Mat}_2(\text{End}H_\rho(E^+X))$. Es ergibt sich dann die Zerlegung

$$I_{\rho,1} - J_\rho u = \begin{pmatrix} I_{\rho,+} & -I_{\rho,+u} \\ -I_{\rho,+u} & I_{\rho,+} \end{pmatrix}.$$

Nun benutzt man

$$\begin{aligned} \det(I_{\rho,1} - J_\rho u) &= \det \begin{pmatrix} I_{\rho,+} & I_{\rho,+u} \\ 0 & I_{\rho,+} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_{\rho,+} & -I_{\rho,+u} \\ -I_{\rho,+u} & I_{\rho,+} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} (1-u^2)I_{\rho,+} & 0 \\ -I_{\rho,+u} & I_{\rho,+} \end{pmatrix} \\ &= (1-u^2)^{\dim H_\rho(EX)/2}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt dabei wegen

$$\det \begin{pmatrix} I_{\rho,+} & I_{\rho,+u} \\ 0 & I_{\rho,+} \end{pmatrix} = 1.$$

□

4 Arithmetische Graphen

In diesem Kapitel führen wir arithmetische Graphen als Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ des Bruhat-Tits-Baumes \mathcal{T} ein und studieren erste Eigenschaften. Eine besondere Familie bilden dabei die Hauptkongruenzgraphen $\mathcal{T}(n)$. Im letzten Abschnitt stellen wir die Darstellungstheorie der Gruppe $G(n)$ dar, die in natürlicher Weise auf $\mathcal{T}(n)$ operiert.

4.1 Gruppenoperationen auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T}

\mathbb{F}_q bezeichne den endlichen Körper mit q Elementen, $A = \mathbb{F}_q[T]$ sei der Polynomring über \mathbb{F}_q und $K = \mathbb{F}_q(T)$ sein Quotientenkörper. Die Gradbewertung auf K ist durch $v_\infty(f/g) := \deg(g) - \deg(f)$ definiert. Die Vervollständigung von K bezüglich v_∞ ist der formale Laurentreihenkörper $K_\infty = \mathbb{F}_q((\pi))$, wobei $\pi := T^{-1}$ eine Uniformisierende an ∞ ist. K_∞ ist ein lokaler Körper mit Ganzheitsring $O_\infty = \mathbb{F}_q[[\pi]]$.

Wir beschreiben kurz den Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T} des lokalen Körpers K_∞ . Wir definieren dazu

$$\mathcal{K} := GL_2(O_\infty),$$

die *Iwahori-Untergruppe*

$$\mathcal{I} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$$

von \mathcal{K} und das Zentrum $\mathcal{Z} := Z(GL_2(K_\infty))$.

Die Knoten und Kanten von \mathcal{T} sind gegeben durch

$$V\mathcal{T} := GL_2(K_\infty) / \mathcal{K} \cdot \mathcal{Z}$$

$$E\mathcal{T} := GL_2(K_\infty) / \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}$$

Der Anfangsknoten einer Kante ist durch das Bild

$$\partial_0(g\mathcal{I}\mathcal{Z}) := g\mathcal{K}\mathcal{Z}$$

unter der natürlichen Projektion gegeben, die Inversion durch

$$\overline{g\mathcal{I}\mathcal{Z}} := g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \mathcal{I}\mathcal{Z}.$$

Satz 4.1.1. ([Se]) \mathcal{T} ist ein $q+1$ -regulärer Baum.

Die $q + 1$ Nachbarknoten eines Knotens $g\mathcal{KZ}$, $g \in GL_2(K_\infty)$ sind gegeben durch

$$g \begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{KZ} \text{ und } g \begin{pmatrix} \pi & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{KZ}, \beta \in \mathbb{F}_q. \quad (4.1)$$

Bemerkung 4.1.2. In [Se] wird der Baum \mathcal{T} auf eine andere Art eingeführt: Ist W ein zweidimensionaler K_∞ -Vektorraum, so definiere man die Knotenmenge $V\mathcal{T}$ als die Klassen $[L]$ der O_∞ -Gitter L in W , wobei zwei Gitter L, L' genau dann dieselbe Klasse definieren, wenn $L = c \cdot L'$ ist für ein $c \in K_\infty^*$. Zwei Knoten $[L]$ und $[L']$ sind benachbart, wenn es Vertreter L und L' gibt, so daß $L' \subseteq L$ und $\dim_{\mathbb{F}_q} L/L' = 1$ gilt.

Fixiere nun eine Basis f_1, f_2 von V und setze $v_i := \pi^{-i} O_\infty f_1 \oplus O_\infty f_2$. Es operiert $GL_2(K_\infty)$ transitiv auf der Menge der Gitter (via den Koordinaten bzgl. f_1, f_2) und der Stabilisator von v_0 ist gerade \mathcal{KZ} . Daher erhalten wir die Bijektion

$$\begin{aligned} GL_2(K_\infty)/\mathcal{KZ} &\xrightarrow{\cong} V\mathcal{T} \\ g &\mapsto gv_0 \end{aligned}$$

Bezeichnet weiterhin e_0 die Kante mit $\partial_0(e_0) = v_0$, $\partial_1(e_0) = v_1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} GL_2(K_\infty)/\mathcal{IZ} &\xrightarrow{\cong} E\mathcal{T} \\ g &\mapsto ge_0. \end{aligned}$$

Die beiden Definitionen sind also äquivalent.

Die Gruppe

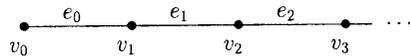
$$\Gamma := GL_2(A) \subseteq GL_2(K_\infty)$$

operiert auf natürliche Weise inversionsfrei von links auf \mathcal{T} .

Definition 4.1.3. Sei $\Gamma' \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ . Dann heißt der Quotientengraph $\Gamma' \backslash \mathcal{T}$ *arithmetischer Graph*.

Den Begriff „arithmetischer Graph“ verwenden wir auch für ausgezeichnete Untergraphen arithmetischer Graphen. Die Operation von Γ besitzt einen Fundamentalbereich von einfacher Gestalt.

Proposition 4.1.4. ([Se, p.87]) Für $i \geq 0$ seien wiederum v_i bzw. e_i die Nebenklassen von $\begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ modulo \mathcal{KZ} bzw. \mathcal{IZ} . Dann kann man $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ unter der Projektion $\mathcal{T} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{T}$ mit dem Untergraphen



von \mathcal{T} identifizieren. Die Gruppe Γ operiert diskret auf Knoten und Kanten mit den Stabilisatoren

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &:= \Gamma_{v_0} = GL_2(\mathbb{F}_q), \\ \Gamma_i &:= \Gamma_{v_i} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{F}_q^*, \deg(b) \leq i \right\} \text{ für } i \geq 1. \end{aligned}$$

Der Stabilisator der (orientierten) Kante e_i ist $\Gamma_{e_i} = \Gamma_i \cap \Gamma_{i+1} = \Gamma_i$ für $i \geq 1$ und $\Gamma_{01} := \Gamma_{e_0} = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ für $i = 0$.

Mit dieser Proposition können wir (4.1) umschreiben.

Lemma 4.1.5. Die Nachbarn eines Knoten γv_i mit $i \geq 1$ und $\gamma \in \Gamma$ sind von der Form $\gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \pi^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_{i-1}$, $\beta \in \mathbb{F}_q$ und γv_{i+1} . Die Nachbarn von γv_0 sind γv_1 und $\gamma \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_1$, $\beta \in \mathbb{F}_q$. \square

Die Knoten in der Bahn Γv_i bzw. die Kanten in Γe_i nennen wir *Knoten bzw. Kanten vom Typ i* .

Bemerkung 4.1.6. Der Fundamentalbereich der Operation von Γ ist eine Halbgerade. Dieser ist gleichzeitig eine Liftung der Knoten und Kanten des Quotientengraphen. Wir können den Graphen von Gruppen $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ also leicht realisieren, indem wir den Fundamentalbereich als zugrundeliegenden Graphen und die Stabilisatoren der Knoten und Kanten als assoziierte Gruppen auffassen. Die Kantengruppen sind durch die Inklusion in die Knotengruppen eingebettet.

Sei nun $\Gamma' \subseteq \Gamma$ wieder eine Untergruppe mit endlichem Index in Γ . Wir erhalten die natürlichen Überlagerungen

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\Gamma'} \Gamma' \backslash \mathcal{T} \longrightarrow \Gamma \backslash \mathcal{T},$$

wobei die letztere genau dann galoissch ist, wenn Γ' normal ist in Γ . In dem Fall ist Γ/Γ' eine Überlagerungsgruppe. Die Fasern von v_i bzw. e_i in $\Gamma' \backslash \mathcal{T}$ sind nach Voraussetzung endlich. Wir nennen auch die Elemente dieser Fasern *Knoten bzw. Kanten vom Typ i* .

Der Schlüssel im Studium der Graphen $\Gamma' \backslash \mathcal{T}$ ist die Bijektion

$$\text{Knoten vom Typ } i \text{ von } \Gamma' \backslash \mathcal{T} \longleftrightarrow \Gamma' \backslash \Gamma / \Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_i \backslash \Gamma / \Gamma' \quad (4.2)$$

Die letztere Bijektion wird definiert durch $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ für $\gamma \in \Gamma$ und ist manchmal sehr zweckdienlich. Entsprechend gilt die Bijektion (4.2) auch für Kanten vom Typ $i \geq 1$. Die Kanten vom Typ 0 entsprechen den Doppelnebenklassen $\Gamma_{01} \backslash \Gamma / \Gamma'$.

Die Stabilisatoren Γ_{e_i} sind eingebettet in die Stabilisatoren der Knoten v_i, v_{i+1} , die Doppelnebenklasse $\Gamma' x \Gamma_{e_i}$ ist somit Teilmenge von $\Gamma' x \Gamma_i$ und $\Gamma' x \Gamma_{i+1}$. Dadurch werden die Randabbildungen charakterisiert.

Proposition 4.1.7. Sei $\Gamma' \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe von endlichem Index. Dann gilt:

- (i) $\Gamma' \setminus \mathcal{T}$ ist bipartit, zusammenhängend und (als gewichteter Graph) $q+1$ -regulär. Jeder Knoten vom Typ $i \geq 1$ besitzt Nachbarn vom Typ $i-1$ und $i+1$ und nur solche. Jeder Knoten vom Typ 0 besitzt nur Nachbarn vom Typ 1.
- (ii) Jeder Knoten vom Typ $i \geq 1$ ist benachbart zu genau einem Knoten vom Typ $i+1$. Insbesondere treten Mehrfachkanten höchstens zwischen Knoten vom Typ 0 und Typ 1 auf.
- (iii) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ (in Abhängigkeit von Γ'), so daß der von allen Knoten vom Typ $\geq r$ induzierte Untergraph von $\Gamma' \setminus \mathcal{T}$ aus einer endlichen Menge von disjunkten Halbgeraden besteht.

Beweis. (i) Als Quotient einer Gruppenoperation auf einem zusammenhängenden Graphen ist $\Gamma' \setminus \mathcal{T}$ wieder zusammenhängend. Die Regularität folgt aus der Regularität von \mathcal{T} , vgl. Abschnitt 3.3. Die Nachbarschaftsbedingungen folgen daraus, daß $\Gamma' \setminus \mathcal{T}$ eine Überlagerung von $\Gamma \setminus \mathcal{T}$ ist. Die Partition der Knoten ist dann die Zerlegung in Mengen von Knoten ungeraden und geraden Typs.

(ii) Folgt aus $\Gamma_{e_i} = \Gamma_{v_i}$ für $i \geq 1$.

(iii) Es gibt nur endlich viele Nebenklassen $\Gamma' \setminus \Gamma$. Wegen $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$, $i \geq 1$, ist die Folge $\#(\Gamma' \setminus \Gamma/\Gamma_i)$, $i \geq 1$ monoton fallend und positiv, also stationär. Die Aussage folgt jetzt aus (i). \square

Bemerkung 4.1.8. Als gewichtete Graphen (vgl. Abschnitt 3.3) sind die Graphen $\Gamma' \setminus \mathcal{T}$ $q+1$ -regulär, da \mathcal{T} $q+1$ -regulär ist.

4.2 Kongruenzgraphen

Besonders wichtig sind die Kongruenzuntergruppen von Γ : Es sei $n \in A$ ein nichtkonstantes Polynom, das wir grundsätzlich als normiert voraussetzen. Dann definieren wir die *Hauptkongruenzuntergruppe*

$$\Gamma(n) := \text{Ker}(GL_2(A) \xrightarrow{\text{red}} GL_2(A/(n)))$$

als Kern der Reduktionsabbildung. Die Untergruppen Γ' mit $\Gamma(n) \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma$ für ein nichtkonstantes $n \in A$ heißen *Kongruenzuntergruppen*. Da $\Gamma(n)$ normal ist in Γ , erhält man für passendes n die galoissche Überlagerung

$$\Gamma(n) \setminus \mathcal{T} \xrightarrow{\Gamma'/\Gamma(n)} \Gamma' \setminus \mathcal{T}.$$

Definition 4.2.1. Sei $n \in A$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann heißt der Graph $\mathcal{T}(n) := \Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$ *Hauptkongruenzgraph* zur Stufe n .

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir die Hauptkongruenzgraphen beschreiben und die Zetafunktionen endlicher Teilgraphen von $\mathcal{T}(n)$ mit L -Funktionen des Graphen $\Gamma \setminus \mathcal{T}$ in Beziehung setzen. Ist $n = \prod_{1 \leq i \leq s} f_i^{r_i}$ die Primfaktorzerlegung, so setze $q_i := q^{\deg(f_i)} = \#(A/f_i)$. Folgende zahlentheoretische Funktionen werden in unseren Untersuchungen auftreten:

$$\begin{aligned} \phi(n) &:= \prod_{1 \leq i \leq s} q_i^{r_i-1} (q_i - 1) = \#(A/n)^* \\ \varepsilon(n) &:= \prod_{1 \leq i \leq s} q_i^{r_i-1} (q_i + 1) = \#\mathbb{P}^1(A/n), \\ \psi(n) &:= \prod_{1 \leq i \leq s} q_i^{3(r_i-1)} (q_i^2 - 1) q_i = \#SL_2(A/n). \end{aligned}$$

Wir setzen $G(n) := \Gamma/\Gamma(n)$. Die Bijektion (4.2) hat dann die Gestalt

$$\text{Knoten vom Typ } i \text{ von } \Gamma(n) \setminus \mathcal{T} \longleftrightarrow \Gamma(n) \setminus \Gamma/\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_i \setminus G(n). \quad (4.3)$$

Dieselbe Bijektion gilt natürlich auch für die (geometrischen) Kanten vom Typ $i \geq 1$, während die Kanten vom Typ 0 den Nebenklassen $\Gamma_{01} \setminus G(n)$ entsprechen.

Die Struktur von $\mathcal{T}(n)$ wird bestimmt durch die Struktur von $G(n)$.

Proposition 4.2.2. Sei $n \in A$, $\deg(n) \geq 1$. Dann ist

$$G(n) = \Gamma/\Gamma(n) \cong \mathbb{F}_q^* \ltimes SL_2(A/n),$$

wobei \mathbb{F}_q^* mittels $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $GL_2(A/n)$ eingebettet ist.

Beweis. Es ist $\mathbb{F}_q^* \cap \Gamma(n) = 1$ und $\Gamma = GL_2(A) = \mathbb{F}_q^* \ltimes SL_2(A)$. Daher reicht es zu zeigen, daß die Sequenz

$$1 \rightarrow \Gamma(n) \hookrightarrow SL_2(A) \xrightarrow{\text{red}} SL_2(A/n) \rightarrow 1$$

exakt ist. Dieser Beweis wird genau so geführt wie im klassischen Fall $A = \mathbb{Z}$, siehe [Sh, Lemma 1.38]. \square

Für die Hauptkongruenzgraphen können wir Proposition 4.1.7 genauer fassen.

Proposition 4.2.3. Sei $n \in A$ mit $d := \deg(n) \geq 1$. Dann ist $\mathcal{T}(n)$ ein kombinatorischer Graph, für den weiterhin gilt:

- (i) Es gibt $\frac{\psi(n)}{(q^2-1)q}$ Knoten vom Typ 0. Jeder dieser Knoten hat genau $q+1$ Nachbarknoten (vom Typ 1).
- (ii) Es gibt $\frac{\psi(n)}{(q-1)q^{i+1}}$ Knoten vom Typ i für $1 \leq i \leq d-1$. Jeder dieser Knoten hat genau q Nachbarn vom Typ $i-1$ und einen Nachbarn vom Typ $i+1$.

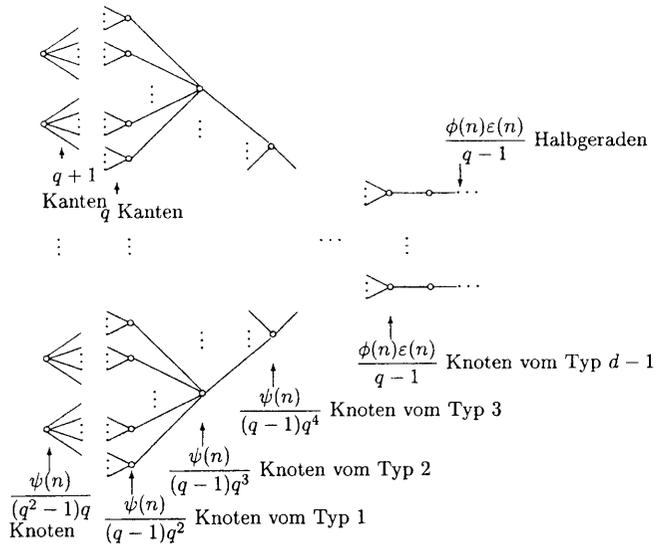


Abbildung 3: Der Graph $\mathcal{T}(n)$

(iii) Für $i \geq d-1$ gibt es $\frac{\psi(n)}{(q-1)q^{d \deg(n)}} = \frac{\phi(n)\varepsilon(n)}{q-1}$ Knoten vom Typ i . Jeder dieser Knoten hat genau einen Nachbarn vom Typ $i-1$ und einen Nachbarn vom Typ $i+1$.

Beweis. Nach Proposition 4.2.2 ist

$$\#G(n) = (q-1) \prod_{1 \leq i \leq s} q_i^{3(r_i-1)} (q_i^2 - 1) q_i (q_i - 1),$$

weiterhin ist $\#\Gamma_i = (q-1)^2 q^{i+1}$, $\#\Gamma_{01} = (q-1)^2 q$ und $\#\Gamma_0 = (q-1)^2 q(q+1)$. Unter der Reduktion betten sich die Gruppen Γ_i für $i \leq d-1$ injektiv in $G(n)$ ein, zudem gilt $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ für $i \geq 1$. Die Punkte (i) und (ii) folgen daher aus den Indexgleichungen $[\Gamma_{i+1} : \Gamma_i] = q$, $i \geq 1$, $[\Gamma_1 : \Gamma_{01}] = q$ und $[\Gamma_0 : \Gamma_{01}] = q+1$.

Punkt (iii) folgt aus der Tatsache, daß das Bild von Γ_i und Γ_{i+1} in $G(n)$ unter der Reduktion modulo n für $i \geq d-1$ gleich ist. Weiter entspricht die Anzahl der Knoten vom Typ $d-1$ der Zahl

$$\frac{(q-1)\psi(n)}{(q-1)^2 q^d} = \frac{\psi(n)}{(q-1)q^d} = \frac{\prod_{1 \leq i \leq s} q_i^{2r_i-3} (q_i^2 - 1) q_i}{(q-1)} = \frac{\phi(n)\varepsilon(n)}{q-1}.$$

$\mathcal{T}(n)$ ist kombinatorisch für Knoten vom Typ $i \geq 1$, da dort $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ gilt. Für den Untergraphen, der von den Knoten vom Typ 0 und 1 erzeugt wird, folgt

das im Fall $\deg(n) \geq 2$ daraus, daß sich Γ_0 und Γ_1 in $G(n)$ einbetten lassen. Im Fall $\deg(n) = 1$ ist die Aussage klar, da es dann nur einen Knoten vom Typ 0 und $q+1$ Knoten vom Typ 1 gibt. \square

Die Graphen $\mathcal{T}(n)$ bestehen also aus einem endlichen Teilgraphen $X(n)$, der von den Knoten vom Typ $i \leq d-1$ induziert wird, und einer endlichen Zahl von Halbgeraden, die an den Knoten vom Typ $d-1$ aufsetzen. Diese Halbgeraden nennen wir auch *Spitzen*. Sie bilden ein natürliches Vertretersystem für die Menge der Enden von $\mathcal{T}(n)$. Die Graphen $X(n)$ nennen wir *endliche Hauptkongruenzgraphen*.

Bemerkung 4.2.4. Der Terminus *Spitzen* rührt von der Tatsache, daß die Enden den Spitzen der Modulkurven $\Gamma' \backslash H$ entsprechen, wobei H die Drinfeldsche obere Halbebene bezeichnet. Für den Zusammenhang zwischen Drinfeldschen Modulkurven und den arithmetischen Graphen verweisen wir auf [GR].

Proposition 4.2.5. Sei $n \in A$, $d := \deg(n) \geq 1$. Dann gilt für das Geschlecht

$$g(X(n)) = 1 + \frac{\phi(n)\varepsilon(n)}{(q^2-1)} (q^d - q - 1)$$

und für die Anzahl der Spitzen

$$\#\{\text{Spitzen von } \mathcal{T}(n)\} = \frac{\phi(n)\varepsilon(n)}{q-1}.$$

Beweis. Die Anzahl der Spitzen entspricht gerade der Anzahl der Knoten vom Typ $d-1$, die Aussage folgt daher aus Proposition 4.2.3. Das Geschlecht von $\mathcal{T}(n)$ entspricht dem Geschlecht von $X(n)$, was sich durch Abzählen der Kanten und Knoten nach derselben Proposition ergibt. \square

Es bezeichne \mathcal{T}^k , $k \geq 0$ den Untergraph von \mathcal{T} , der von allen Knoten vom Typ $i \leq k$ induziert wird; dies ist der Untergraph von \mathcal{T} , der aus allen Knoten vom Typ $i \leq k$ und allen Kanten vom Typ $\leq k-1$ besteht. Dann ist zwar

$$X(n) = \Gamma(n) \backslash \mathcal{T}^{d-1},$$

aber \mathcal{T}^k ist für kein k ein Baum. Für den Mechanismus der L -Funktionen benötigen wir aber gerade eine Darstellung von $X(n)$ als Quotientengraph einer auf einem Baum operierenden Gruppe. Allgemeiner untersuchen wir

$$X^k(n) := \Gamma(n) \backslash \mathcal{T}^k.$$

Dabei setzen wir $\Gamma(1) := \Gamma$. Sei X^k die Zusammenhangskomponente von v_0 in \mathcal{T}^k . Die maximalen Untergruppen $\Theta^k, \Theta^k(n) := \Theta^k \cap \Gamma(n)$ von Γ bzw. $\Gamma(n)$, die auf X^k , bzw. die maximalen Untergruppen $\Theta, \Theta(n) = \Theta \cap \Gamma(n)$, die auf X^{d-1} operieren, sind gut zu beschreiben.

Lemma 4.2.6. Sei $k \geq 0$. Die maximale Untergruppe $\Theta^k \subseteq \Gamma$, die auf der Zusammenhangskomponente X^k operiert, ist

$$\Theta^k = \langle GL_2(\mathbb{F}_q), \Gamma_k \rangle = GL_2(\mathbb{F}_q) \star_{\Gamma_{01}} \Gamma_k.$$

Insbesondere ist

$$\Theta = \langle GL_2(\mathbb{F}_q), \Gamma_{d-1} \rangle = GL_2(\mathbb{F}_q) \star_{\Gamma_{01}} \Gamma_{d-1}.$$

Beweis. Die zweite Gleichung der Aussagen ist klar.

Der Untergraph von X^k , der durch v_0, \dots, v_k induziert wird, ist ein Fundamentalbereich der Operation von Θ^k auf X^k . Insbesondere liegen natürlich die Stabilisatoren $\Gamma_0, \dots, \Gamma_k$ in Θ^k . Nach [Se, I, Lemma 4] ist dann $\Theta^k = \langle \Gamma_0, \dots, \Gamma_k \rangle$. Wegen $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ für $i \geq 1$ entspricht dies $\langle \Gamma_0, \Gamma_k \rangle$. \square

Bemerkung 4.2.7. Struktureller kann man im Beweis von Lemma 4.2.6 über Graphen von Gruppen argumentieren. Der Baum X^k ist die universelle Überlagerung des Graphen von Gruppen, der durch die Knoten v_0, \dots, v_k , versehen mit den entsprechenden Stabilisatoren der Knoten und Kanten, induziert wird. Die Fundamentalgruppe ist isomorph zu dem induktiven Limes, der durch diesen Baum von Gruppen definiert wird (siehe [Se, I, 5.1]). Die für den Limes zu berücksichtigenden Abbildungen sind gerade die Einbettungen der Kanten- in die jeweiligen Knotenstabilisatoren. Der induktive Limes über den Teilbaum, der durch v_1, \dots, v_k induziert wird, ist nur die Vereinigung der Knotengruppen, also Γ_k . Demzufolge ist die Fundamentalgruppe isomorph zu dem Amalgam $\Gamma_0 \star_{\Gamma_{01}} \Gamma_k$.

Lemma 4.2.8. Sei $n \in A$ gegeben mit $\deg(n) \geq 1$. Dann sind äquivalent:

(i) $\Theta^k(n) \backslash X^k = X^k(n)$.

(ii) $X^k(n)$ ist zusammenhängend.

(iii) $G(n) \cong \Theta^k / \Theta^k(n)$.

(iv) $\Gamma = \langle \Gamma_0, \Gamma_k, \Gamma(n) \rangle$.

(v) $SL_2(A/n) = \langle SL_2(\mathbb{F}_q), U_k \rangle$, wobei U_k das Bild der strikten oberen Dreiecksmatrizen in Γ unter der Reduktion bezeichnet, deren Einträge höchstens Grad k haben.

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii): Ist $(\Gamma(n) \backslash X)_k$ zusammenhängend, so wird dieser Graph von X^k überlagert. Da $\Theta^k(n)$ die maximale Untergruppe von $\Gamma(n)$ ist, die auf X^k operiert, folgt daraus $\Theta^k(n) \backslash X^k = (\Gamma(n) \backslash X)_k$. Die Rückrichtung ist trivial, da X^k ein Baum ist.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Es bezeichne $Y^k(n)$ die Zusammenhangskomponente von $X^k(n)$, die durch die Operation von Θ^k auf X^k von X^k überlagert wird. Dann wird $(\Gamma \backslash \mathcal{T})_k$ von $Y^k(n)$ überlagert mit Gruppe $\Theta^k / \Theta^k(n)$:

$$X^k \xrightarrow{\Theta^k} Y^k(n) \xrightarrow{\Theta^k / \Theta^k(n)} X^k(1).$$

Da die Überlagerung

$$X^k(n) \xrightarrow{G(n)} X^k(1)$$

durch die Operation von $G(n)$ gegeben ist, folgt die Behauptung: $G(n)$ operiert genau dann auf $Y^k(n)$, wenn $Y^k(n)$ schon der ganze Graph $X^k(n)$ ist.

(iii) \Leftrightarrow (iv): Da $\Gamma(n)$ normal ist in Γ , gilt

$$\Theta^k / \Theta^k(n) = \Theta^k / (\Theta^k \cap \Gamma(n)) \cong (\Theta^k \cdot \Gamma(n)) / \Gamma(n).$$

Ist nun $G(n) \cong \Theta^k / \Theta^k(n)$, so muß deswegen $\Gamma = \langle \Gamma_0, \Gamma_k, \Gamma(n) \rangle$ sein. Die Rückrichtung ist trivial.

(iv) \Leftrightarrow (v): Die Aussage folgt sofort aus $G(n) \cong \mathbb{F}_q^* \ltimes SL_2(A/n)$. \square

Proposition 4.2.9. Sei $q \geq 4$ und $n \in A$ beliebig oder $q = 3$ und $n \in A$ irreduzibel. Dann ist der Graph $X^k(n)$ zusammenhängend für jedes $k \geq 1$ und

$$\Theta^k / \Theta^k(n) \cong \Gamma / \Gamma(n) = G(n).$$

Beweis. Der Fall $q \geq 4$ ist in [Mo1] bewiesen.

Sei nun $q = 3$ und n irreduzibel. Ist $\deg(n) = 2$, so ist $X^1(n) = X(n)$ zusammenhängend, für $\deg(n) = 1$ ist das trivial. Sei nun $d \geq 3$. Nach Lemma 4.2.8 sind die beiden Aussagen äquivalent dazu, daß die $SL_2(A/n)$ erzeugt wird von Γ_0 und Γ_k für alle $k \geq 1$. Es reicht also zu zeigen, daß

$$SL_2(A/n) = \langle \Gamma_0, \Gamma_1 \rangle$$

gilt. Nach [Go, Th. 2.8.4] ist aber

$$SL_2(A/n) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und damit die Aussage bewiesen. \square

Bemerkung 4.2.10. Die Proposition ist nicht mehr richtig für zusammengesetztes n im Fall $q = 2$. Der Graph $X^1(n)$ etwa zerfällt für $n = T^m$ in $z^1(n)$ viele Zusammenhangskomponenten gemäß der folgenden Tabelle:

n	T^1	T^2	T^3	T^4	T^5	T^6
$z^1(n)$	1	1	4	8	32	64

Ist $X^k(n)$ zusammenhängend, so erhalten wir nach Lemma 4.2.6 und Lemma 4.2.8 die Sequenz

$$X^k \xrightarrow{\Theta^k(n)} X^k(n) \xrightarrow{G(n)} X^k(1)$$

von Überlagerungen. Für $k \leq d-1$ ist die erste Überlagerung unverzweigt, da nach Proposition 4.2.3 jeder Knoten in X^k denselben Grad hat wie der überlagerte Knoten in $X^k(n)$. Wegen

$$\Theta^k(n) \cap \bigcap_{1 \leq i \leq k} \Gamma_i = \Theta^k(n) \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

operiert $\Theta^k(n)$ treu, nach Proposition 1.5.6 also frei, auf dem Baum X^k , $1 \leq k \leq d-1$. Wir erhalten insbesondere

Proposition 4.2.11. *Sei $n \in A$ mit $\deg(n) \geq 1$ und $1 \leq k \leq d-1$. Ist $X^k(n)$ zusammenhängend, so ist $\Theta^k(n)$ die Fundamentalgruppe von $X^k(n)$. Insbesondere ist $\Theta(n)$ eine freie Gruppe vom Rang $1 + \frac{\phi(n)\varepsilon(n)}{(q^2-1)}(q^d - q - 1)$.*

Beweis. Jede Gruppe, die frei auf einem Baum operiert, ist frei. X^k ist insbesondere die universelle Überlagerung von $X^k(n)$. Der Rang der Fundamentalgruppe eines Graphen entspricht dem Geschlecht des Graphen. \square

Diese Aussage ist falsch für $k \geq \deg(n)$, da die Überlagerung in den Knoten der Spitzen verzweigt.

Neben den Hauptkongruenzuntergruppen werden in dieser Arbeit noch die speziellen Gruppen $\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$ auftreten. $\Gamma_0(n)$ heißt *n-te Hecke-Kongruenzuntergruppe*. Wegen

$$\Gamma_0(n) \backslash \Gamma \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1(A/n)$$

mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (c : d)$ ergibt dies die Bijektion

$$\text{Knoten von } \Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T} \text{ vom Typ } i \longleftrightarrow \mathbb{P}^1(A/n) / \Gamma_i. \quad (4.4)$$

Auch für den *Hecke-Graphen* $\mathcal{T}_0(n) := \Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T}$ kann man schärfere Aussagen als für allgemeine Kongruenzgraphen machen (siehe [GN]). So zerfällt $\mathcal{T}_0(n)$ wieder in einen endlichen Teil $X_0(n)$, der von den Knoten vom Typ $< \deg(n)$ erzeugt wird, und einer endlichen Anzahl von Spitzen. Setzt man $\Theta_0(n) := \Theta \cap \Gamma_0(n)$, so erhält man gerade

$$X_0(n) = \Theta_0(n) \backslash X.$$

Analog zur Hauptkongruenzgruppe setzen wir noch allgemeiner

$$X_0^k(n) := \Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T}^k$$

und

$$\Theta_0(n) := \Gamma_0(n) \cap \Theta^k.$$

4.3 Die Darstellungen der Gruppe $G(n)$ für irreduzibles n

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die (komplexe) Darstellungstheorie der Gruppe $G(n)$ zusammenfassen. Wir setzen dabei im weiteren immer voraus, daß n ein irreduzibles Polynom ist vom Grad $d \geq 1$ und zusätzlich $q^d \neq 2$ ist¹. Dann ist A/n ein endlicher Körper mit q^d Elementen. Die Darstellungen von $G(n)$, $SL_2(A/n) \subseteq G(n) \subseteq GL_2(A/n)$, lassen sich als Restriktionen der Darstellungen von $GL_2(A/n)$ gewinnen. Wir geben eine kurze Beschreibung der Darstellungstheorie der $GL_2(A/n)$ (siehe etwa [PS]), da wir eine explizite Beschreibung der Darstellungsräume benötigen. Wir zitieren das Verhalten bei der Beschränkung auf $G(n)$ aus [Ru], wo eine ausführliche Beschreibung zu finden ist.

Wir benutzen im weiteren Abkürzungen für Untergruppen von $GL_2(K)$ für einen beliebigen Körper K :

$$\begin{aligned} B(K) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in K^*, b \in K \right\}, \text{ die Gruppe der Dreiecksmatrizen,} \\ U(K) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in K \right\}, \text{ die Gruppe der strikten Dreiecksmatrizen,} \\ D(K) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in K^* \right\}, \text{ die Diagonalgruppe und} \\ Z(K) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in K^* \right\}, \text{ die Gruppe der zentralen Matrizen.} \end{aligned}$$

Unter einem *Charakter* μ einer Gruppe G verstehen wir eine eindimensionale Darstellung

$$\mu : G \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Die irreduziblen Darstellungen der $GL_2(A/n)$ lassen sich im wesentlichen in die Hauptserie und die supercuspidalen Darstellungen unterteilen.

Die Darstellungen ρ_μ der Hauptserie werden induziert von Charakteren μ von $B(A/n)$. Den Darstellungsraum $V_\mu := V_{\rho_\mu}$ kann man realisieren durch

$$V_\mu = \{ f : GL_2(A/n) \rightarrow \mathbb{C} \mid f(\tau x) = \mu(\tau)f(x) \forall \tau \in B(A/n), x \in GL_2(A/n) \}.$$

Dies ist ein linker $GL_2(A/n)$ -Modul via $g \cdot f(y) = f(yg)$, wobei yg das Produkt der beiden Matrizen y, g bezeichne.

Die Charaktere μ von $B(A/n)$ sind schon bestimmt durch ihre Werte auf $D(A/n)^2$. Wir setzen

$$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} := (\mu_1, \mu_2) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} := \mu_1(ad)\mu_2(d), \quad (4.5)$$

¹Die Darstellungen der Gruppe $G(T)$ für $q = 2$ werden wir für unsere Untersuchungen nicht benötigen.

²Hier geht die Voraussetzung $q^d \neq 2$ ein. Die Gruppe $B(\mathbb{F}_2)$ hat zwei Elemente und besitzt daher 2 verschiedene Charaktere. Die Gruppe $D(\mathbb{F}_2)$ ist hingegen trivial.

wobei μ_1 und μ_2 Charaktere von $(A/n)^*$ sind. (Diese Wahl weicht von der Notation in [PS] ab.)

Die Darstellungen

$$\rho_{(\mu_1, \mu_2)} := \text{ind}_{B(A/n)}^{GL_2(A/n)}(\mu_1, \mu_2)$$

sind irreduzibel (der Dimension $q^d + 1$), falls $\mu_2 \neq 1$. In dem Ausnahmefall zerfällt die induzierte Darstellung in zwei irreduzible Darstellungen

$$\rho_{(\mu_1, 1)} = (\mu_1 \circ \det) \oplus \rho_{(\mu_1)},$$

wobei $\mu_1 \circ \det$ die Dimension 1 und $\rho_{(\mu_1)}$ die Dimension q^d besitzt³. Die irreduziblen Darstellungen $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ bzw. $\rho_{(\mu_1)}$ heißen *Darstellungen der Hauptserie*.

Die supercuspidalen Darstellungen werden durch eine quadratische Körpererweiterung L von A/n beschrieben.

Definition 4.3.1. Es bezeichne L die quadratische Körpererweiterung von A/n . Ein Charakter ν von L^* heißt *unzerlegbar*, falls ν nicht über die Norm $N = N_{A/n}^L : L^* \rightarrow (A/n)^*$ faktorisiert.

Die Darstellungsräume der supercuspidalen Darstellungen ρ_ν werden realisiert durch

$$V_\nu := V_{\rho_\nu} := \{f : (A/n)^* \rightarrow \mathbb{C}\},$$

wobei ν ein unzerlegbarer Charakter von L^* sei. Dazu fixieren wir einen additiven, nichttrivialen Charakter ψ von A/n . Der Vektorraum V_ν wird dann vermöge

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} f \right) (x) := \nu(d) \psi\left(\frac{b}{d}x\right) f\left(\frac{a}{d}x\right)$$

und

$$(wf)(x) := \sum_{y \in (A/n)^*} \nu(-y^{-1}) j(xy) f(-y)$$

zu einem linken $GL_2(A/n)$ -Modul, wobei wir $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ setzen. Die Tatsache, daß durch diese Definition ein $GL_2(A/n)$ -Modul gegeben wird, folgt aus aufwendigen Rechnungen mit Gaußschen Summen, siehe [PS]. Die Funktion $j : (A/n)^* \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$j(x) := -\frac{1}{q^d} \sum_{\substack{\alpha \in L^* \\ N\alpha = x}} \psi(\alpha + \bar{\alpha}) \nu(\alpha),$$

wobei $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ die Konjugation von L über A/n bezeichnet. Die Funktion j hängt zwar von der Wahl des fixierten Charakters $\psi \neq 1$ ab, nicht aber die folgende Aussage: Die Darstellungen ρ_ν sind irreduzibel (der Dimension $q^d - 1$) für

³Diese Bezeichnung weicht ab von der Definition in [Ru]. Dort bezeichnet $\rho_{(\mu_1, 1)}$ die irreduzible Darstellung der Dimension q^d .

jeden unzerlegbaren Charakter ν von L^* , und jede irreduzible Darstellung von $GL_2(A/n)$, die nicht zur Hauptserie gehört oder eindimensional ist, ist eine supercuspidale Darstellung.

Die Konjugationsklassen der $GL_2(A/n)$ lassen sich in 4 Typen einteilen. Sei $\gamma \in GL_2(A/n)$ gegeben. Sind die Eigenwerte von γ in A/n enthalten, so ist die Jordan-Normalform von γ entweder $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in (A/n)^*$ oder $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a \neq b \in (A/n)^*$, und γ ist konjugiert zu genau einer Matrix solcher Form. Liegen die Eigenwerte von γ nicht in A/n , so sind sie in der quadratischen Erweiterung L enthalten und γ ist konjugiert zu $\begin{pmatrix} 0 & -Tr\alpha \\ 1 & N\alpha \end{pmatrix}$, wobei Tr und N die Spur und die Norm bezeichnen und $\alpha \neq \bar{\alpha} \in L$ die Eigenwerte von γ sind.

Wir fassen nun die Darstellungen ρ_μ bzw. ρ_ν durch Beschränkung als Darstellungen von $G(n)$ auf und notieren sie auch wieder mit ρ_μ bzw. ρ_ν . Dabei fallen viele der Darstellungen zusammen. Sind (μ_1, μ_2) und (μ'_1, μ'_2) zwei Charaktere von $B(A/n)$, so ist $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ äquivalent zu $\rho_{(\mu'_1, \mu'_2)}$ genau dann, wenn

$$\mu_1|_{\mathbb{F}_q^*} = \mu'_1|_{\mathbb{F}_q^*} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \mu'_2 \quad (4.6)$$

oder

$$\mu_1|_{\mathbb{F}_q^*} = (\mu'_1 \mu'_2)|_{\mathbb{F}_q^*} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \mu'_2^{-1} \quad (4.7)$$

ist. Die eindimensionalen Darstellungen sind von der Form

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \mu_1(\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}).$$

Auch hier hängt die Äquivalenz der Darstellung nur von der Einschränkung von μ_1 auf \mathbb{F}_q^* ab. Wir nehmen im weiteren deswegen an, daß μ_1 ein Charakter von \mathbb{F}_q^* ist.

Für die Untersuchung der supercuspidalen Darstellungen setzen wir

$$L^{(q)} := \{x \in L \mid N_{A/n}^L x \in \mathbb{F}_q^*\},$$

und

$$L^{(1)} := \text{Kern}(N_{A/n}^L).$$

Die Charaktertafeln zeigen, daß zwei unzerlegbare Charaktere ν, ν' genau dann zwei äquivalente Darstellungen von $G(n)$ definieren, wenn

$$\nu|_{L^{(q)}} = \nu'|_{L^{(q)}} \quad \text{oder} \quad \nu|_{L^{(q)}} = \bar{\nu}'|_{L^{(q)}} \quad (4.8)$$

gilt, wobei $\bar{\nu}$ den zu ν konjugierten Charakter bezeichnet.

Bei der Beschränkung der Darstellungen auf $G(n)$ sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist die Charakteristik gerade, so gilt

$$GL_2(A/n) \cong SL_2(A/n) \times (A/n)^* \quad \text{und} \quad G(n) \cong SL_2(A/n) \times \mathbb{F}_q^*,$$

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & T\tau\alpha \end{pmatrix}$
$\mu_1 \circ \det$	$\mu_1(a)^2$	$\mu_1(a)^2$	$\mu_1(ad)$	$\mu_1(N\alpha)$
$\chi(\mu_1)$	$q^d \mu_1(a)^2$	0	$\mu_1(ad)$	$-\mu_1(N\alpha)$
$\chi_\mu = \chi(\mu_1, \mu_2), \mu_2 \neq 1$	$(q^d + 1)\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	0
$\chi_\nu, \nu _{L^{(1)}} \neq 1$	$(q^d - 1)\nu(a)$	$-\nu(a)$	0	$-(\nu(\alpha) + \nu(\bar{\alpha}))$

Abbildung 4: Die Charaktertafel von $G(n)$ für q gerade oder $\deg(n)$ ungerade.

da dann $SL_2(A/n) \cap Z(A/n) = 1$ gilt. Also ist

$$\langle SL_2(A/n), Z(A/n) \rangle = SL_2(A/n) \times Z(A/n) = GL_2(A/n)$$

und entsprechend

$$\langle SL_2(A/n), Z(\mathbb{F}_q) \rangle = SL_2(A/n) \times Z(\mathbb{F}_q) = G(n).$$

In diesem Fall gleichen sich die Darstellungstheorien der Gruppen $G(n)$ und $GL_2(A/n)$. Insbesondere bleiben alle irreduziblen Darstellungen der $GL_2(A/n)$ bei Beschränkung auf $G(n)$ irreduzibel.

Ist die Charakteristik ungerade und $\deg(n) = d$ ungerade, so bleiben auch hier alle irreduziblen Darstellungen der $GL_2(A/n)$ bei der Beschränkung irreduzibel.

Proposition 4.3.2. ([Ru]) *Sei q gerade oder q und $d = \deg(n)$ ungerade. Dann sind die irreduziblen Darstellungen von $G(n)$ gegeben durch:*

- (i) $(q-1)$ Darstellungen $\mu_1 \circ \det$ der Dimension 1, μ_1 ein Charakter von \mathbb{F}_q^* ,
- (ii) $(q-1)$ Darstellungen $\rho_{(\mu_1)}$ der Dimension q^d , μ_1 ein Charakter von \mathbb{F}_q^* ,
- (iii) $\frac{(q-1)(q^d-2)}{2}$ Darstellungen $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ der Dimension $q^d + 1$, μ_1 ein Charakter von \mathbb{F}_q^* und $1 \neq \mu_2$ ein Charakter von $(A/n)^*$, und
- (iv) $\frac{(q-1)q^d}{2}$ Darstellungen ρ_ν der Dimension $q^d - 1$, ν ein Charakter von $L^{(q)}$, der auf $L^{(1)}$ nichttrivial ist.

Aus der Proposition folgt, daß in diesem Fall die Charaktertafeln der $GL_2(A/n)$ direkt übernommen werden können. Die Charaktere zu ρ_μ bzw. ρ_ν werden mit χ_μ bzw. χ_ν bezeichnet. Die Konjugationsklassen bleiben mit den Darstellungen irreduzibel und sind deswegen von der selben Form wie in $GL_2(A/n)$.

Sei nun q ungerade und $d = \deg(n)$ gerade. In diesem Fall enthält A/n die quadratische Erweiterung $\mathbb{F}_{q^2}^*$ von \mathbb{F}_q^* . Ein Element von $G(n)$ läßt sich also schreiben als Produkt $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{F}_{q^2}^* \subseteq (A/n)^*$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(A/n)$. Die

Darstellungen von $G(n)$ ähneln deswegen in diesem Fall den Darstellungen von $SL_2(A/n)$. Insbesondere zerfallen die Konjugationsklassen $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ wie in $SL_2(A/n)$ auch in $G(n)$ in die beiden Klassen von $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}$, wobei ε einen Erzeuger von $(A/n)^*$ bezeichnet. Die restlichen Konjugationsklassen bleiben bei der Beschränkung irreduzibel.

Mit τ bezeichnen wir die Gaußsche Summe

$$\tau := \sum_{a \in (A/n)^*} \psi(a)\lambda(a),$$

wobei λ der quadratische Charakter von $(A/n)^*$ sei und ψ den schon oben fixierten (nichttrivialen) additiven Charakter von A/n bezeichnet. Im Unterschied zum ersten Fall zerfallen bei der Beschränkung auf $G(n)$ die Darstellungen $\text{ind}(\mu_1, \lambda)$ und die supercuspidalen Darstellungen ρ_ν mit $\nu|_{L^{(1)}} \neq 1, \nu^2|_{L^{(1)}} = 1$ in jeweils 2 Komponenten

$$\rho_{(\mu_1, \lambda)} = \rho_{(\mu_1, \lambda)}^+ \oplus \rho_{(\mu_1, \lambda)}^-, \quad \rho_\nu = \rho_\nu^+ \oplus \rho_\nu^-.$$

(Dies sind genau die Darstellungen von $GL_2(A/n)$, die bei der Beschränkung auf $SL_2(A/n)$ zerfallen.)

Proposition 4.3.3. ([Ru]) *Sei q ungerade und $d = \deg(n)$ gerade. Dann sind die irreduziblen Darstellungen von $G(n)$ gegeben durch:*

- (i) $(q-1)$ Darstellungen $\mu_1 \circ \det$ der Dimension 1, μ_1 ein Charakter von \mathbb{F}_q^* ,
- (ii) $(q-1)$ Darstellungen $\rho_{(\mu_1, 1)}$ der Dimension q^d , μ_1 ein Charakter von \mathbb{F}_q^* ,
- (iii) $\frac{(q-1)(q^d-3)}{2}$ Darstellungen $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ der Dimension $q^d + 1$, μ_1 ein Charakter von \mathbb{F}_q^* und μ_2 ein Charakter von $(A/n)^*$ mit $\mu_2^2 \neq 1$,
- (iv) $(q-1)$ Darstellungen $\rho_{(\mu_1, \lambda)}^+$ und $\rho_{(\mu_1, \lambda)}^-$ jeweils der Dimension $\frac{q^d+1}{2}$.
- (v) $\frac{(q-1)(q^d-1)}{2}$ Darstellungen ρ_ν der Dimension $q^d - 1$, ν ein Charakter von $L^{(q)}$ mit $\nu^2|_{L^{(1)}} \neq 1$.
- (vi) $(q-1)$ Darstellungen der Form jeweils ρ_ν^+ und ρ_ν^- mit Dimension $\frac{q^d-1}{2}$, wobei ν Charaktere von $L^{(q)}$ sind mit $\nu^2|_{L^{(1)}} = 1, \nu|_{L^{(1)}} \neq 1$.

Es läßt sich dann die angegebene Charaktertafel berechnen.

Zur Berechnung von L -Funktionen wird es nötig sein, die Fixräume

$$V_\rho^{\Gamma_i} = \{x \in V_\rho \mid \rho(g)x = x \forall g \in \Gamma_i\}$$

zu bestimmen. Insbesondere sind Darstellungen ρ von $G(n)$ mit

$$\rho|_{Z(\mathbb{F}_q)} \neq 1$$

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}$
$\mu_1 \circ \det$	$\mu_1(a^2)$	$\mu_1(a^2)$	$\mu_1(a^2)$
$\chi_{(\mu_1, 1)}$	$q^d \mu_1(a^2)$	0	0
$\chi_{\mu, \mu_2^2 \neq 1}$	$(q^d + 1)\mu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
$\chi_{\mu^\pm, \mu_2 = \lambda}$	$\frac{q^d + 1}{2}\mu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \frac{1 \pm \mu_2(a)\tau}{2}$	$\mu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \frac{1 \mp \mu_2(a)\tau}{2}$
$\chi_{\nu, \nu^2 _{L^{(1)}} \neq 1}$	$(q^d - 1)\nu(a)$	$-\nu(a)$	$-\nu(a)$
$\chi_{\nu^\pm, \nu _{L^{(1)}} \neq 1, \nu^2 _{L^{(1)}} = 1}$	$\frac{q^d - 1}{2}\nu(a)$	$-\nu(a) \frac{1 \mp \mu_2(a)\tau}{2}$	$-\nu(a) \frac{1 \pm \mu_2(a)\tau}{2}$

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & T\tau\alpha \end{pmatrix}$
$\mu_1 \circ \det$	$\mu_1(ad)$	$\mu_1(N\alpha)$
$\chi_{(\mu_1)}$	$\mu_1(ad)$	$-\mu_1(N\alpha)$
$\chi_{\mu, \mu_2^2 \neq 1}$	$\mu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	0
$\chi_{\mu^\pm, \mu_2 = \lambda}$	$\mu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	0
$\chi_{\nu, \nu^2 _{L^{(1)}} \neq 1}$	0	$-(\nu(\alpha) + \nu(\bar{\alpha}))$
$\chi_{\nu^\pm, \nu _{L^{(1)}} \neq 1, \nu^2 _{L^{(1)}} = 1}$	0	$-\nu(\alpha)$

Abbildung 5: Die Charaktertafel von $G(n)$ für q ungerade und $\deg(n)$ gerade.

uninteressant, da dann

$$\dim V_\rho^{\Gamma_i} = < 1, \chi_\rho >_{\Gamma_i} = 0$$

ist für alle i .

Proposition 4.3.4. Die Bedingung $\rho|_{Z(\mathbb{F}_q)} = 1$ ist im Fall

- (i) $\rho = \det \circ \mu_1$ oder $\rho = \rho_{(\mu_1)}$ äquivalent mit $\mu_1^2 = 1$,
- (ii) $\rho = \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ äquivalent mit $(\mu_1, \mu_2)|_{Z(\mathbb{F}_q)} = 1$, und
- (iii) $\rho = \rho_\nu$ äquivalent mit $\nu|_{\mathbb{F}_q} = 1$.

Wir setzen hierbei nicht voraus, daß $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ bzw. ρ_ν irreduzibel ist.

Beweis. Für $\rho = \rho_\mu$ operiert $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Z(\mathbb{F}_q)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} f = \mu\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) f = \mu_1(a)^2 \mu_2(a) f$$

auf V_μ . Das Bild von $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ unter der eindimensionalen Darstellung $\det \circ \mu_1$ operiert durch Multiplikation mit $\mu_1(a)^2$ auf \mathbb{C} . Zerfällt ρ_μ in die zwei Komponenten $\mu_1 \circ \det$ und $\rho_{(\mu_1)}$, so ist $\rho_\mu|_{Z(\mathbb{F}_q)} = 1$ genau dann, wenn schon $\mu_1 \circ \det|_{Z(\mathbb{F}_q)} = 1$ ist. Daraus folgen (i) und (ii).

Im Fall einer supercuspidalen Darstellung $\rho = \rho_\nu$ operiert $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Z(\mathbb{F}_q)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} f = \nu(a) f$$

auf V_ν , woraus (iii) folgt. \square

5 Zetafunktionen der endlichen Hauptkongruenzgraphen

Nach Proposition 4.2.9 sind die Graphen $X^k(n)$ für fast alle q und n zusammenhängend – Ausnahmen gibt es höchstens für $q = 2, 3$ und $k < \deg(n) - 1 = d - 1$. In diesem Kapitel werden wir eine möglichst genaue Beschreibung der Zetafunktion der gewichteten Graphen $(X^k(n), i)$, n irreduzibel, angeben, die zusammenhängend sind. Den Zusammenhang von $(X^k(n), i)$ benötigen wir, um die Darstellungstheorie der Gruppe $G(n)$ benutzen zu können, die in diesem Fall die Überlagerung

$$X^k(n) \xrightarrow{G(n)} X^k(1)$$

definiert, vgl. Proposition 4.2.8, und setzen ihn grundsätzlich voraus. Da die Darstellungstheorie von $G(T)$ für $q = 2$ in Abschnitt 4.3 nicht mitbehandelt wurde, nehmen wir zusätzlich $q^d > 2$ an.

Gewichtet sind die Kanten von $\mathcal{T}(n)$ erst auf den Spitzen. Insbesondere sind die Untergraphen $X^k(n)$ für $k \leq d - 1$ ungewichtet. Besonderes Augenmerk werden wir auf den Fall $k = d - 1$ richten, $X(n) = X^{d-1}(n)$ ist der maximale Untergraph von $\mathcal{T}(n)$, der ungewichtet ist, d. h. für den alle Kanten vom Gewicht 1 sind.

Wir studieren $Z_{(X^k(n), i)}(u)$ als ein Produkt von L -Funktionen, die zu der galoisschen Überlagerung $X^k(n) \xrightarrow{G(n)} X^k(1)$ gehören. Nach Korollar 3.5.3 ist ja

$$Z_{(X^k(n), i)}(u) = L(X^k, \Theta^k(n), 1; u) = \prod_{\rho \in \widehat{G(n)}} L(X^k, \Theta^k, \rho; u)^{\deg(\rho)}.$$

Da (für $k = d - 1$) die Überlagerung

$$X \xrightarrow{\Theta(n)} X(n)$$

unverzweigt ist, erhalten wir insbesondere

$$Z_{X(n)}(u) = L(X, \Theta(n), 1; u).$$

Zuerst untersuchen wir, wie $L(X^k, \Theta^k(n), \rho; u)$ bzw. der entsprechende Operator $\Delta_\rho(u)$ als Laplace-Operator eines sogenannten Berechnungsgraphen aufgefaßt werden kann. In den beiden folgenden Abschnitten bestimmen wir die Berechnungsgraphen für die Hauptserie und die supercuspidalen Darstellungen von $G(n)$. Daraus folgen im letzten Abschnitt explizite Formeln für kleine n .

5.1 Berechnungsgraphen

Nach Satz 3.6.1 gilt der Zusammenhang

$$L(X^k, \Theta^k, \rho; u)^{-1} = (1 - u^2)^{-\chi_\rho} \det(\Delta_\rho(u))$$

mit dem allgemeinen Laplace-Operator $\Delta_\rho(u)$ auf dem entsprechenden Raum der äquivarianten Funktionen auf X^k . Das Problem der Berechnung von $Z_{(X^k(n), i)}(u)$ reduziert sich also auf die Berechnung der Determinanten der Laplace-Operatoren $\Delta_\rho(u)$, die Bestimmung von χ_ρ ist einfach. Die Darstellung über den Laplace-Operator statt über den Nachbarschaftsoperator T auf Kanten ist vorzuziehen, da der Laplace-Operator auf einem niedriger dimensionierten Raum definiert ist und die Rechnungen daher einfacher sind. Zudem lassen sich so die Spitzen beim Übergang von $X^k(n)$ zu dem unendlichen Graphen $\mathcal{T}(n)$ einfacher integrieren, vgl. Satz 6.1.6.

Wir fassen den Laplace-Operator $\Delta_\rho(u) = I - A_\rho u + Q_\rho u^2$, der definiert ist als abstrakter linearer Operator auf $H_\rho(VX) \otimes \mathbb{C}[u]$, als Laplace-Operator eines Graphen auf. Dazu nehmen wir wieder an, daß die Gruppe G diskret (und inversionsfrei) auf dem Baum X operiere mit endlichem Quotienten $Y = G \backslash X$.

Der Fall $\rho = 1$ verdient besondere Beachtung. Der Raum $H_1(VX)$ entspricht dem Raum der G -invarianten Funktionen auf VX , der isomorph ist zu dem Raum $\{f : VY \rightarrow \mathbb{C}\}$ der Funktionen auf VY (vgl. Abschnitt 3.3). Der Laplace-Operator ist in diesem Fall kombinatorisch zu bestimmen: Wählt man als Basis von $H_1(VX)$ die charakteristischen Funktionen und interpretiert man die Operatoren $A_{(Y, i)}$ und $Q_{(Y, i)}$ als Matrizen, so entspricht A_1 dem transponierten gewichteten Nachbarschaftsoperator $A_{(Y, i)}$ und Q_1 dem gewichteten Gradoperator von (Y, i) . Die Determinante $\det(\Delta_1(u)) = \det(I - A_1 u + Q_1 u^2)$ und damit auch $L(X, G, 1; u)$ läßt sich also rein kombinatorisch berechnen als Determinante des gewichteten Laplace-Operators von (Y, i) .

Für allgemeine ρ gibt es zwar keine direkte Übertragung zur Berechnung von $L(X, G, 1; u)$. Es ist trotzdem noch möglich, $\Delta_\rho(u)$ als Laplace-Operator auf einem Graphen Y_ρ aufzufassen, dessen Kanten allerdings nicht nur mit Gewichten wie im Fall $\rho = 1$, sondern auch mit komplexen Zahlen, genauer mit polynomialen Ausdrücken in Charakterwerten indiziert sind. Auf dem Weg zur Berechnung von $L(X, G, 1; u)$ sind die Graphen Y_ρ konzeptionell sehr hilfreich, wir nennen sie deswegen auch *Berechnungsgraphen*.

Wir geben nun eine Möglichkeit an, die Berechnungsgraphen zu bestimmen und werden das in den nächsten Abschnitten auf die arithmetische Situation von Kongruenzgraphen anwenden.

Sei $\{v_i, i \in I\}$ ein (endliches) Vertretersystem der Operation von G auf VX . Wir können $H_\rho(VX)$ zerlegen in

$$H_\rho(VX) = \bigoplus_{i \in I} H_\rho^{(i)}(VX),$$

wobei wir

$$H_\rho^{(i)}(VX) := \{f : G \cdot v_i \rightarrow V_\rho \mid f(gx) = \rho(g) \cdot f(x) \forall x \in G \cdot v_i, g \in G\}$$

setzen.

Die Knoten von Y_ρ sind gegeben durch eine Basis $\{f_j, j \in J\}$ von $H_\rho(VX)$, die man erhält durch Wahlen von Basen der $H_\rho^{(i)}(VX)$, $i \in I$. Der Fixraum des Darstellungsraums V_ρ unter der Untergruppe $H \subseteq G$ ist definiert durch

$$V_\rho^H := \{x \in V_\rho : \rho(g) \cdot x = x \text{ für alle } g \in H\}.$$

Bezeichnet G_i den Stabilisator von v_i , so wird durch

$$V_\rho^{G_i} \xrightarrow{\cong} H_\rho^{(i)}(VX), v \mapsto h_v,$$

mit $h_v(gv_i) = \rho(g) \cdot v$ ein Isomorphismus von Vektorräumen definiert. Eine Basis von $H_\rho^{(i)}(VX)$ läßt sich also über eine Basis von $V_\rho^{G_i}$ bestimmen. Für $f_j \in H_\rho^{(i)}(VX) \hookrightarrow H_\rho(VX)$ ist $Q_\rho f_j = (\deg(v_i) - 1)f_j$. Gilt $A_\rho f_j = \sum_{k \in J} a_{jk} f_k$, so ziehe eine (orientierte) Kante mit Anfangspunkt f_j und Endpunkt $f_k \in VY_\rho$, falls $a_{jk} \neq 0$, die dann mit a_{jk} indiziert wird. Auf diese Weise wird A_ρ als Nachbarschaftsoperator, bzw. $\Delta_\rho(u)$ als allgemeiner Laplace-Operator von Y_ρ realisiert.

Wie schon in Abschnitt 4.3 erwähnt, interessieren uns nur Darstellungen der $G(n)$, die trivial auf $Z(\mathbb{F}_q) \subseteq G(n)$ sind, da sonst die Fixräume $V_\rho^{\Gamma_i}$ und damit die L -Funktionen trivial sind. Die Darstellungen sind in Proposition 4.3.4 beschrieben.

5.2 Berechnungsgraphen der Hauptserie

Zuerst bestimmen wir die Berechnungsgraphen, die zu Darstellungen ρ_μ der Hauptserie gehören. Dabei gehen wir zunächst von den Darstellungen $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ aus, die nicht notwendig irreduzibel sind (siehe Proposition 4.3.2, 4.3.3).

Zuerst betrachten wir die Darstellung $\rho_{(1,1)}$. In diesem Fall ist der Darstellungsraum von der Gestalt

$$V_{(1,1)} = \{f : GL_2(A/n) \rightarrow \mathbb{C} \mid f(\tau x) = f(x) \forall \tau \in B(A/n), x \in GL_2(A/n)\},$$

der Raum der Funktionen auf $GL_2(A/n)$, die linksinvariant sind unter $B(A/n)$. Mittels $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (c : d)$ ist aber

$$B(A/n) \backslash GL_2(A/n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1(A/n).$$

Somit erhalten wir

$$V_{(1,1)} \cong \{f : \mathbb{P}^1(A/n) \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Für die Einschränkung auf den Typ i gilt dann

$$V_{(1,1)}^{\Gamma_i} \cong \{f : \mathbb{P}^1(A/n)/\Gamma_i \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Vergleicht man das mit der Darstellung (4.4) der Knoten des Heckegraphen $\mathcal{T}_0(n)$, so erhält man die Bijektion

$$\text{Basis von } V_{(1,1)}^{\Gamma_i} \longleftrightarrow \text{Knoten von } \mathcal{T}_0(n) \text{ vom Typ } i.$$

Wir werden in Proposition 5.2.3 zeigen, daß bei richtiger Basiswahl der (gewichtete) Nachbarschaftsoperator von $X_0^k(n)$ dem Operator $A_{(1,1)}$ auf $H_\rho(VX^k)$ entspricht, also $Y_{(1,1)} = X_0^k(n)$ ein Berechnungsgraph für $\rho_{(1,1)}$ ist.

Wir gehen nun zu allgemeinem $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ über, wobei wir uns an dem Fall $\rho_{(1,1)}$ orientieren. Wir bestimmen zuerst eine Basis von V_ρ .

Die Bruhat-Zerlegung

$$GL_2(A/n) = B(A/n) \dot{\cup} B(A/n) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U(A/n)$$

impliziert, daß die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}, x \in A/n \right\} \quad (5.1)$$

ein Vertretersystem für $B(A/n) \backslash GL_2(A/n)$ darstellt. Eine Basis von V_ρ läßt sich also durch $\mathbb{P}^1(A/n)$ parametrisieren. Wir setzen dazu

$$\begin{aligned} f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= 1, f_\infty \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = 0 \\ f_y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= 0, f_y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \delta_{xy} \text{ für } x, y \in A/n. \end{aligned}$$

Die Gruppe Γ operiert von links auf V_μ , indem sie von rechts auf den Argumenten operiert. Wir setzen $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} f_\infty &= \mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} f_\infty \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} f_x &= \mu \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} f_{\frac{ax+b}{d}}, \\ w f_\infty &= f_0, w f_0 = f_\infty \\ w f_x &= \mu_3(x) f_{\frac{1}{x}} \text{ if } x \neq 0 \end{aligned}$$

mit

$$\mu_3(x) := \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ für } x \neq 0.$$

Die Vorzeichen in der Definition (5.1) sind so gewählt worden, daß σf_x und $f_{\sigma x}$ sich nur um eine Konstante unterscheiden, die von μ , x und σ abhängt.

Als nächstes bestimmen wir Basen von $V_\mu^{\Gamma_i}$. Die naheliegende Vorgehensweise wäre es, die natürliche Projektion

$$f_x \mapsto \frac{1}{\#\Gamma_i} \sum_{\sigma \in \Gamma_i} \sigma f_x \quad (5.2)$$

auf den Fixraum zu benutzen. Es stellt sich aber als vorteilhaft heraus, stattdessen Elemente der Form

$$[x]_i^\mu := \sum_{\sigma \in \Gamma_i} \sigma f_x, \quad x \in \mathbb{P}^1(A/n)$$

zu untersuchen, vgl. Bemerkung 5.2.4.

Häufig fassen wir $x \in A/n$ auch als Element $(x : 1) \in \mathbb{P}^1(A/n)$ auf und schreiben einfach $\sigma \cdot x = \sigma x$ für die natürliche (Links-)Operation von $\sigma \in GL_2(A/n)$ auf $(x : 1) \in \mathbb{P}^1(A/n)$. Weiterhin identifizieren wir A/n mit den Vertretern in A vom Grad $\leq d-1$.

Da σf_x und $f_{\sigma x}$ sich nur um eine Konstante unterscheiden, die von μ , x und σ abhängt, unterscheiden sich auch $[x]_i^\mu$ und $[y]_i^\mu$ nur um eine Konstante, falls $x = \sigma \cdot y$ ist. Eine Basis von $V_\mu^{\Gamma_i}$ kann also sogar aus der Menge $\{[x]_i^\mu : x \in R_i\}$ gewählt werden, wobei R_i ein Vertretersystem der Links-Operation von Γ_i auf $\mathbb{P}^1(A/n)$ ist. Die nichtverschwindenden Elemente dieser Menge sind aber linear unabhängig. Zur Konstruktion einer Basis reicht es also aus, diejenigen Elemente von $\{[x]_i^\mu : x \in R_i\}$ zu bestimmen, die ungleich null sind.

Definition 5.2.1. Es sei $f = \sum a_i T^i \in R[T]$ ein Polynom über einem Ring R und $f \neq 0$. Wir sagen, f hat die *Höhe* k , falls k der kleinste Index ist, für den a_k nicht verschwindet. Wir wenden diesen Begriff in naheliegender Weise auch auf das Element $(f : 1) \in \mathbb{P}^1(A/n)$ an.

Wenn $d = \deg(n)$ gerade ist, gilt $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_{q^2} \subseteq A/n$, da n als prim vorausgesetzt ist. Wir definieren

$$C(\mathbb{F}_q) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^q \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_{q^2}^* \right\}$$

und setzen

$$H_C^0 := \begin{cases} \{[y]_0^\mu\} & \text{falls } d \text{ gerade und } \mu|_{C(\mathbb{F}_q)} = 1 \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei y ein normiertes Element in $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^2}) - \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ sei mit Höhe 1. Die Matrix $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ operiert auf $\mathbb{P}^1(A/n)$ durch Inversion, wobei wir formal 0 und ∞ als zueinander invers betrachten. Wir fixieren für den Rest dieses Kapitels ein Vertretersystem R'_0 ,

$$R'_0 := \text{Vertretersystem der Operation von } \Gamma_0 \text{ auf } \mathbb{P}^1(A/n) - \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^2}),$$

wobei jedes Element von R'_0 normiert ist und Höhe ≥ 1 besitze. Ein solches Vertretersystem ist einfach zu berechnen.

Für einen Charakter χ einer Gruppe G und eine Untergruppe $H \subseteq G$ führen wir die Abkürzung

$$\delta(\chi, H) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi \text{ trivial ist auf } H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein. Wir setzen noch

$$H_D^i := \begin{cases} \{[0]_i^\mu, [\infty]_i^\mu\} & \text{falls } \mu|_{D(\mathbb{F}_q)} = 1 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und halten fest:

$$[0]_0^\mu = [\infty]_0^\mu \quad \text{und} \quad [0]_i^\mu \neq [\infty]_i^\mu \quad \text{für } i \geq 1.$$

Proposition 5.2.2. Sei μ ein Charakter von $B(A/n)$, der trivial ist auf $Z(\mathbb{F}_q)$, n irreduzibel vom Grad $d \geq 1$ und $q^d \neq 2$. Dann wird durch

- (i) $\{[x]_0^\mu : x \in R'_0\} \cup H_D^0 \cup H_C^0$ für $i = 0$,
- (ii) $\{[x]_i^\mu : x \in (A/n)^*, x \text{ normiert, Höhe von } x \geq i+1\} \cup H_D^i$ für $1 \leq i \leq d-1$,
- (iii) H_D^i für $i \geq d-1$,

eine Basis von $V_\mu^{\Gamma_i}$ gegeben.

Beweis. Wir beobachten zunächst: Sei $\text{stab}_i(x)$ der Stabilisator von $x \in \mathbb{P}^1(A/n)$ unter der Operation von Γ_i . Ist $\text{stab}_i(x) \subseteq B(A/n)$, so gilt $[x]_i^\mu = 0$ genau dann, wenn μ nichttrivial auf $\text{stab}_i(x)$ ist.

(ii) Die Menge

$$R_i := \{x \in (A/n)^*, x \text{ normiert, Höhe von } x \geq i+1\} \cup \{0, \infty\}$$

ist ein Vertretersystem der Operation von Γ_i auf $\mathbb{P}^1(A/n)$. Die Stabilisatoren $\text{stab}_i(0)$ bzw. $\text{stab}_i(\infty)$ sind $D(\mathbb{F}_q)$ bzw. Γ_i selbst. Also sind $[0]_i^\mu$ bzw. $[\infty]_i^\mu$ null genau dann, wenn μ nichttrivial ist auf $D(\mathbb{F}_q)$. Der Stabilisator auf den anderen Vertretern ist hingegen $Z(\mathbb{F}_q)$, auf dem alle Charaktere nach der Voraussetzung trivial sind. Die Elemente der Menge

$$\{[x]_i^\mu \mid x \in (A/n)^*, x \text{ normiert, Höhe von } x \geq i+1\}$$

sind also alle ungleich null.

(iii) Für $i \geq d-1$ ist

$$R_i := \{0, \infty\}$$

ein Vertretersystem. Man argumentiert wie im Fall (ii).

(i) Ist d ungerade, so ist

$$R_0 := R'_0 \cup \{0\}$$

ein Vertretersystem. Im Fall d gerade wählt man

$$R_0 := R'_0 \cup \{0\} \cup \{y\},$$

wobei y das festgewählte Element in $\mathbb{F}_{q^2} - \mathbb{F}_q$ ist.

Sei $x \in R'_0$ gegeben. Dann ist x ein Fixpunkt von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ genau dann, wenn

$$cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

erfüllt ist. Die Wahl $x \notin \mathbb{F}_{q^2}$ erzwingt nun, daß die Koeffizienten c , $d-a$ und b Null sind, also ist $\text{stab}_0(x) = Z(\mathbb{F}_q)$ für $x \in R'_0$. Wie im Fall (ii) gilt $\text{stab}_0(0) = D(\mathbb{F}_q)$, und wie oben verschwindet keines der Elemente von $\{[x]_0^\mu : x \in R'_0\} \cup H_D^0$. Es bleibt $[y]_0^\mu$ im Fall d gerade zu untersuchen.

Mit Hilfe der Charaktertafeln von $G(n)$ berechnet man

$$\dim V_\rho^{\Gamma_0} = \begin{cases} \frac{q^{d-1}-q}{q^2-1} + \delta(\mu, D(\mathbb{F}_q)) + \delta(\mu, C(\mathbb{F}_q)) & \text{falls } d \text{ gerade ist} \\ \frac{q^{d-1}-1}{q^2-1} + \delta(\mu, D(\mathbb{F}_q)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da für d gerade aber $\#(R'_0) = \frac{q^{d-1}-q}{q^2-1}$ gilt, ist $[y]_0^\mu \neq 0$ genau dann, wenn $\mu|_{C(\mathbb{F}_q)} = 1$ ist. \square

Für $x \in \mathbb{P}^1(A/n)$ sei $n_i(x)$ das Element der Bahn $\Gamma_i \cdot x$, das in dem Vertretersystem R_i liegt, wie im Beweis der letzten Proposition definiert. Wir definieren $c_i(x)$ durch die Gleichung

$$[x]_i^\mu = c_i(x) \cdot [n_i(x)]_i^\mu.$$

Die in der Proposition beschriebenen Basen werden durch den Übergang $[x]_i^\mu \mapsto h_x^i$ mit

$$h_x^i := h_{x,\mu}^i := \{gv_i \mapsto g \cdot [x]_i^\mu\}$$

zu Basen von $H_{\rho_\mu}^{(i)}(VX)$ transformiert.

Als nächsten Schritt bestimmen wir jetzt die Nachbarschaftsrelationen zwischen den h_x^i , die ja die Knoten des Berechnungsgraphen Y_{ρ_μ} darstellen. Formal setzen wir dabei $\frac{a}{q}\infty + b = \infty$ für $a, d \in \mathbb{F}_q^*$, $b \in A/n$.

Proposition 5.2.3. *Sei μ ein Charakter von $B(A/n)$, n irreduzibel vom Grad $d \geq 1$ und $q^d \neq 2$. Dann gilt:*

$$(i) \quad A_{\rho_\mu} h_x^i = \sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} h_{x+\beta T}^{i-1} + h_{n_{i+1}(x)}^{i+1} \quad \text{für } 2 \leq i \leq d-1,$$

$$(ii) \quad A_{\rho_\mu} h_0^i = q \cdot h_0^{i-1} + h_0^{i+1} \quad \text{und} \quad A_{\rho_\mu} h_\infty^i = q \cdot h_\infty^{i-1} + h_\infty^{i+1} \quad \text{für } i \geq d,$$

$$(iii) \quad A_{\rho_\mu} h_x^1 = \sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} c_0(x + \beta T) h_{n_0(x+\beta T)}^0 + h_{n_2(x)}^2,$$

$$(iv) \quad A_{\rho_\mu} h_x^0 = h_{n_1(x)}^1 + \sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} \mu_3(x + \beta) c_1((x + \beta)^{-1}) h_{n_1((x+\beta)^{-1})}^1 \quad \text{für } x \neq \infty, 0,$$

$$(v) \quad A_{\rho_\mu} h_0^0 = q \cdot h_0^1 + h_\infty^1.$$

Beweis. Der Operator $A_\rho := A_{\rho_\mu}$ genügt der Gleichung

$$A_\rho h_x^i(y_1) = \sum_{(y_1, y_2) \in EX} h_x^i(y_2).$$

Somit lebt die Funktion $A_\rho h_x^i$ nur auf Knoten vom Typ $i-1$ und $i+1$. Wir benutzen im Beweis die Beschreibung der Nachbarschaftsbeziehung in \mathcal{T} aus Lemma 4.1.5.

(i) Es ist $A_\rho h_x^i(\gamma v_{i-1}) = h_x^i(\gamma v_i) = \gamma[x]_i^\mu = \sum_\beta \gamma[x + \beta T^i]_{i-1}^\mu$, was die Zerlegung $\Gamma_i = \bigcup_\beta \Gamma_{i-1} \begin{pmatrix} 1 & \beta T^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ widerspiegelt. Analog erhält man $A_\rho h_x^i(\gamma v_{i+1}) = \gamma[x]_{i+1}^\mu$. Ist x in $(A/n)^*$ und ist x normiert, so hat x eventuell eine kleinere Höhe als $i+2$, und wäre damit kein Vertreter in R_{i+1} . In diesem Fall wird die Anpassung auf den Vertreter $n_{i+1}(x)$ durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon T^{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bewirkt, was $c_{i+1}(x) = 1$ bedeutet. Dies ergibt die behauptete Formel.

(ii) Für $i \geq d-1$ ist nach Proposition 5.2.2 das Vertretersystem R_i von der Form

$$R_i = \{0, \infty\}.$$

Wir können $\mu|_{D(\mathbb{F}_q)} = 1$ annehmen, da sonst $\dim H_\rho^{(i)} = 0$ ist. Die Formel folgt dann analog zu (i).

(iii) Der zweite Summand ergibt sich genauso wie in (i). Betrachte nun die Gleichung

$$A_\rho h_x^1(\gamma v_0) = \gamma[x]_1^\mu + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \gamma \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [x]_1^\mu = \sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} [x + \beta T]_0^\mu,$$

die die Bruhat-Zerlegung und $\Gamma_1 = \bigcup_\beta \Gamma_{01} \begin{pmatrix} 1 & \beta T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ widerspiegelt. Die Elemente $[x + \beta T]_0^\mu$ sind dann noch mittels

$$[n_0(x + \beta T)]_0^\mu = c_0(x + \beta T) [x + \beta T]_0^\mu$$

an das Vertretersystem R_0 anzupassen.

(iv) Für $x \in (A/n)^*$ erhalten wir die Gleichung

$$[x]_0^\mu = [x]_{01}^\mu + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{F}_q \\ \beta \neq -x}} \mu_3(x + \beta) [(x + \beta)^{-1}]_{01}^\mu + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{F}_q \\ \beta = -x}} [\infty]_{01}^\mu.$$

Wegen der Voraussetzung $x \notin \mathbb{F}_q$ tritt der letzte Summand nicht auf und wir erhalten die behauptete Formel, indem wir noch die Anpassung an das Vertretersystem R_2 vornehmen.

(v) Im Fall $x = 0$ können wir $\mu|_{D(\mathbb{F}_q)} = 1$ annehmen, da sonst $h_0^0 = 0$ ist. Die Formel ergibt sich dann wie in (iv) durch

$$[0]_0^\mu = [0]_{01}^\mu + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{F}_q \\ \beta \neq -x}} [(0 + \beta)^{-1}]_{01}^\mu + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{F}_q \\ \beta = -x}} [\infty]_{01}^\mu = q \cdot [0]_{01}^\mu + [\infty]_{01}^\mu.$$

□

Bemerkung 5.2.4. Hätten wir in (5.2) $[x]_i^\mu$ auf den Wert von x unter der natürlichen Projektion $V_\mu \rightarrow V_\mu^{\Gamma_i}$ gesetzt, so ergäbe sich im Fall (i) dieser Proposition die Relation

$$A_\rho h_x^i = \frac{1}{q} \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} h_{x+\beta T}^{i-1} + q \cdot h_{n_{i+1}(x)}^{i+1}.$$

Dies entspricht aber sicher nicht dem Nachbarschaftsoperator eines Graphen.

Zur Berechnung von $L(X^k, \Theta^k, \rho_\mu; u)$ bzw. der Determinante des entsprechenden Operators $\Delta_\rho(u)$ muß man noch Q_ρ kennen. Es ist aber einfach

$$Q_\rho h_x^i = \begin{cases} (q-1)h_x^i & \text{falls } i = k, \\ qh_x^i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 5.2.5. Sei μ ein Charakter von $B(A/n)$, der trivial ist auf $Z(\mathbb{F}_q)$, n irreduzibel vom Grad $d \geq 1$ und $q^d \neq 2$. Sei weiter $\rho = \rho_\mu$ die entsprechende Darstellung von $G(n)$ und $k \geq 1$. Ist der Graph $X^k(n)$ zusammenhängend, so ist der gewichtete Graph $(X_0^k(n), i)$ ein Berechnungsgraph für $L(X^k, \Theta^k, \rho_\mu; u)^{-1}$, wobei die Kanten vom Typ 0 mit Ausdrücken in μ versehen sind; in Abhängigkeit von der Wahl von μ werden dabei einige Knoten des Graphen entfernt (siehe Proposition 5.2.2). Insbesondere ist

$$L(X, \Theta, \rho_{(1,1)}; u) = L(X, \Theta_0(n), 1; u) = Z_{(X_0(n), i)}(u).$$

Beweis. Sieht man in Proposition 5.2.3 von den Normierungen ab, so erhält man

$$A_1 h_x^i = \sum h_{\sigma x}^{i-1} + h_x^{i+1},$$

wobei σ durch ein Vertretersystem von $\Gamma_{i-1} \backslash \Gamma_i$, bzw. von $\Gamma_{01} \backslash \Gamma_i$ läuft, der Fall (ii) ist nur ein extra formulierter Spezialfall. Ebenso ergibt sich

$$A_1 h_x^0 = \sum h_{\sigma x}^1$$

mit $\sigma \in \Gamma_0/\Gamma_{01}$ und dem Spezialfall (v). Dabei ist σx die Operation von Γ_i auf $\mathbb{P}^1(A/n)$. Dies entspricht den (gewichteten) Nachbarschaftsbeziehungen von $\mathcal{T}_0(n)$. Der Index $i(e)$ einer Kante in $\mathcal{T}_0(n)$ deren Anfangspunkt $\partial_0(e)$ den Typ i hat, ist ja gerade $\#\{\sigma \in \Gamma \backslash \Gamma_i \mid \sigma x \in \Gamma'x\}$.

Im Fall $\mu \neq (1, 1)$ kommen nur auf Niveau 01 Charakterwerte hinzu, die an die Kante geheftet werden. Da $[x]_i^\mu$ null werden kann für $\mu \neq (1, 1)$, werden die entsprechenden Knoten gelöscht. □

Mit Hilfe von Proposition 5.2.3 können wir nun einfach $L(X, \Theta, \rho_\mu; u)$ bestimmen. Als ein Faktor von $Z_{X(n)}(u)$ taucht diese L -Funktion mit Vielfachheit $\deg(\rho)$ auf, falls ρ irreduzibel ist. Wenn ρ_μ zerlegbar ist, muß man also noch die genaue Zerlegung betrachten und die Faktoren der irreduziblen Komponenten getrennt berechnen. Nach Proposition 4.3.2 und 4.3.3 tritt Zerlegbarkeit nur auf in den Fällen:

- $\rho_{(\mu_1, 1)}$ zerfällt in die eindimensionale Darstellung $\mu_1 \circ \det$ und in die mit μ_1 verschränkte spezielle Darstellung $\rho_{(\mu_1)}$. (Wegen $\rho|_{Z(\mathbb{F}_q)} = 1$ ist dabei $\mu_1^2 = 1$.)
- Ist μ_2 der quadratische Charakter, q ungerade und d gerade, so zerfällt $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ in zwei Komponenten gleichen Grades.

Im zweiten Fall braucht man die Einzelfaktoren also nicht zu berechnen, wenn man nur an $Z_{X(n)}(u)$ interessiert ist, da die Grade der Komponenten dieselben sind.

Die L -Funktionen, die zu den eindimensionalen Darstellungen gehören, lassen sich einfach berechnen. Ist $\mu_1^2 = 1$ und $\mu \neq 1$, so folgt aus den Charaktertafeln von $G(n)$, daß $\dim V_{(\mu_1, 1)}^{\Gamma_i} = 0$ und die L -Funktion deswegen trivial ist. Für den Fall $\mu_1 = 1$ hilft

Proposition 5.2.6. Sei $k \geq 1$. Dann ist

$$L(X^k, \Theta^k, 1, u)^{-1} = \frac{-(q-1)q^k u^{2k} + q^2 u^2 - 1}{qu^2 - 1}.$$

(Der Zähler ist durch $qu^2 - 1$ teilbar.)

Beweis. Es bezeichne $\Delta^k(u)$ den (gewichteten) Laplace-Operator von $X^k(1)$. Nach Lemma 6.1.7 ist für $k \geq 1$

$$\det(\Delta^k(u)) = F_{k-1} \cdot \det \begin{pmatrix} qu^2 + 1 & -(q+1)u \\ -qu & \frac{F_k}{F_{k-1}} \end{pmatrix}$$

mit $F_0 = 1$ und

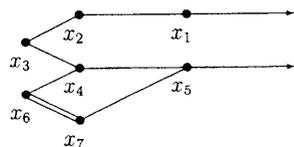
$$F_k = \frac{q^{k+1} u^{2(k+1)} - q^k u^{2(k+1)} + u^2 - 1}{qu^2 - 1}$$

für $k \geq 1$. Da $\det(\Delta^k(u))$ durch $(1 - u^2)$ teilbar ist folgt daraus

$$\frac{\det(\Delta^k(u))}{(1 - u^2)} = \frac{-(q-1)q^k u^{2k} + q^2 u^2 - 1}{qu^2 - 1}.$$

Beim Übergang von der Determinante des Laplace-Operators zur L -Funktion ist aber eben durch $(1 - u^2)$ zu teilen, da das Geschlecht von $\Theta^k \setminus X^k$ null ist. \square

Beispiel 5.2.7. Sei $q = 2$ und $n = T^3 + T + 1$. Der Graph $\mathcal{T}_0(n)$ hat die Gestalt



wobei die Pfeile für die Spitzen stehen und die Knoten von links nach rechts nach Typen geordnet sind. Nach (4.4) entsprechen die Knoten vom Typ i den Bahnen der Operation von Γ_i auf $\mathbb{P}^1(A/n)$, analog gilt das für Kanten. Wir weisen nun den Knoten und Kanten Vertreter dieser Bahnen zu.

Entsprechend der Proposition 5.2.2 wählen wir als Vertretersysteme der Operation der Γ_i auf $\mathbb{P}^1(A/n)$

$$\begin{aligned} R_0 &= \{0, T\} \longleftrightarrow \{x_3, x_6\} \\ R_1 &= \{\infty, 0, T^2\} \longleftrightarrow \{x_2, x_4, x_7\} \\ R_2 &= \{\infty, 0\} \longleftrightarrow \{x_1, x_5\}. \end{aligned}$$

Die Kanten vom Typ 1 entsprechen den Bahnen von Γ_1 , als Vertreter wählen wir dieselben Vertreter wie bei den Knoten vom Typ 1. Die Kanten vom Typ 0 entsprechen von oben nach unten dem Vertretersystem R_{01} der Operation von Γ_{01} ,

$$R_{01} = \{\infty, 0, T, T^2, T^2 + T\}.$$

Dabei ist in $(A/n)^*$ eben $T^{-1} = T^2 + 1$. Die beiden Kanten zwischen x_6 und x_7 werden durch T^2 und $T^2 + T$ parametrisiert.

Da $d = 3$ ungerade ist und $D(\mathbb{F}_q^*) = \{1\}$ ist, müssen wir bei der Berechnung von $\det(\Delta_{(\mu_1, \mu_2)})$ jeweils alle Knoten des Graphen $X_0(n)$ berücksichtigen.

Nach Proposition 5.2.3 gelten für $A_\mu := A_{\rho_\mu}$ die Regeln

$$\begin{aligned} A_\mu h_\infty^1 &= h_0^0 + h_\infty^2, & A_\mu h_\infty^2 &= 2 \cdot h_\infty^1, \\ A_\mu h_0^2 &= h_0^1 + h_{T^2}^1, & A_\mu h_0^1 &= h_0^0 + h_0^0, \quad \text{and } A_\mu h_0^0 &= 2 \cdot h_0^1 + h_\infty^1, \end{aligned}$$

unabhängig von μ . Es bleiben also die Ausdrücke

$$\begin{aligned} A_\mu h_T^0 &= h_0^1 + (\mu_3(T) + \mu_3(T+1)) \cdot h_{T^2}^1, \\ A_\mu h_{T^2}^0 &= (c_0(T^2) + c_0(T^2 + T)) \cdot h_T^0 + h_0^2 \end{aligned}$$

zu bestimmen.

Wir setzen $a := (\mu_3(T) + \mu_3(T+1))$ und $b := (c_0(T^2) + c_0(T^2 + T))$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \det(\Delta_{(\mu_1, \mu_2)}(u)) &= 32u^{14} + (40 - 8ab)u^{12} + (-4a - 4b - 8ab + 28)u^{10} \\ &\quad + (-4ab - 2a + 14 - 2b)u^8 + (6 - 2ab - b - a)u^6 \\ &\quad + (4 - a - b - ab)u^4 + (-ab + 3)u^2 + 1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

In unserem Fall ist

$$\mu_3(x) = \mu_1(-1)\mu_2(x) = \mu_2(x) \quad (5.4)$$

und

$$c_0(T^2) = \mu_3^{-1}(T), \quad c_0(T^2 + T) = \mu_3^{-1}(T+1). \quad (5.5)$$

Neben der Darstellung $\rho_{(1,1)}$ gibt es noch drei weitere paarweise inäquivalente Darstellungen $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$. Dabei sind zwei Darstellungen $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ und $\rho_{(\mu'_1, \mu'_2)}$ genau dann äquivalent, wenn

$$(\mu_1, \mu_2) = (\mu'_1, \mu'_2) \quad \text{oder} \quad (\mu'_1, \mu'_2) = (\mu_1(\mu_2 \mathbb{F}_q^*), \mu_2^{-1})$$

erfüllt ist. Die zweite Bedingung reduziert sich in diesem Fall zu $\mu'_2 = \mu_2^{-1}$.

Mit Hilfe einer primitiven 7-ten Einheitswurzel α können wir alle Charaktere bestimmen, die wir für a und b einzusetzen haben. Wir setzen $\mu_2(T) = \alpha$, $\mu'_2(T) = \alpha^2$, und $\mu''_2(T) = \alpha^3$; diese drei Charaktere sind paarweise nicht invers zueinander und jeder andere neue Charakter $\tilde{\mu}_2$ von \mathbb{F}_8^* ist zu einem dieser Charaktere invers. Wir ermitteln via Gleichung (5.4) und (5.5) die Werte für a und b und erhalten

	μ_2	μ'_2	μ''_2
a	$\alpha + \alpha^5$	$\alpha^2 + \alpha^3$	$\alpha + \alpha^3$
b	$\alpha^6 + \alpha^2$	$\alpha^5 + \alpha^4$	$\alpha^6 + \alpha^4$

Setzen wir diese Werte in (5.3) ein und multiplizieren die resultierenden Determinanten miteinander, so ergibt sich das Polynom

$$\begin{aligned} &32768u^{42} + 81920u^{40} + 116736u^{38} + 125440u^{36} + 110080u^{34} + 88192u^{32} \\ &+ 67328u^{30} + 49344u^{28} + 34144u^{26} + 21792u^{24} + 13012u^{22} + 7388u^{20} + 4041u^{18} \\ &+ 2135u^{16} + 1067u^{14} + 492u^{12} + 211u^{10} + 84u^8 + 33u^6 + 12u^4 + 4u^2 + 1, \end{aligned}$$

das in der Zetafunktion mit der Vielfachheit $\deg(\rho_{(\mu_1, \mu_2)}) = 2^3 + 1 = 9$ auftritt.

Weiterhin ergibt sich

$$\det(\Delta_{(1,1)}) = 32u^{14} + 32u^{12} + 12u^{10} + 6u^8 + 2u^6 + u^4 + 2u^2 + 1.$$

Da

$$\begin{aligned} \det(\Delta_{1 \circ \det}) &= (u^2 - 1) \cdot ((q^3 - q^2)u^4 + (q^2 - q)u^2 - 1) \\ &= (u^2 - 1) \cdot (4u^4 + 2u^2 - 1) \end{aligned}$$

der trivialen Darstellung entspricht, erhalten wir als Faktor der Zetafunktion

$$(u^2 - 1)(4u^4 + 2u^2 - 1) \cdot (8u^8 + 6u^6 + 4u^4 + 2u^2 + 1)^8.$$

Das Beispiel wird im nächsten Abschnitt fortgesetzt.

5.3 Berechnungsgraphen zu supercuspidalen Darstellungen

Im letzten Abschnitt haben wir die L -Funktionen $L(X, \Theta, \rho; u)$ studiert, die zu Darstellungen ρ der Hauptserie gehören. Wir führen dasselbe Programm jetzt für die supercuspidalen Darstellungen ρ_ν durch. Dazu greifen wir auf die Notationen von Abschnitt 4.3 zurück. Dabei war L die quadratische Körpererweiterung von A/n , ν ein unzerlegbarer Charakter von L^* .

Wir erinnern daran, daß wir $\rho_{\nu|Z(\mathbb{F}_q)} = 1$ oder äquivalent $\nu|_{\mathbb{F}_q^*} = 1$ annehmen können, da die L -Funktionen ansonsten trivial sind (vgl. Proposition 4.3.4).

Zuerst bestimmen wir die Basen der Fixräume $V_\nu^{\Gamma_i}$, die die Knoten der Berechnungsgraphen $Y_\nu := Y_{\rho_\nu}$ darstellen.

Die Darstellungsräume V_ν wurden realisiert durch

$$V_\nu := V_{\rho_\nu} := \{f : (A/n)^* \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Die Operation von $GL_2(A/n)$ auf V_ν ist definiert durch

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} f \right) (x) := \nu(d) \psi\left(\frac{b}{d}x\right) f\left(\frac{a}{d}x\right)$$

und

$$(wf)(x) := \sum_{y \in (A/n)^*} \nu(-y^{-1}) j(xy) f(-y).$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} f_x &= \psi\left(x \frac{b}{a}\right) f_{x \frac{a}{d}} \\ wf_x &= \sum_{y \in (A/n)^*} \nu(y^{-1}) j(-xy) f_y. \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 4.3 bemerkt, läßt sich der additive Charakter $\psi \neq 1$ von A/n frei wählen. Wir schränken die Wahl weiter ein, indem wir annehmen, daß ψ trivial sei auf Elementen von A/n vom Grad kleiner als $d-1$.

Wie im letzten Abschnitt definieren wir für $x \in (A/n)^*$

$$[x]_i^\nu := \sum_{\sigma \in \Gamma_i} \sigma f_x.$$

Proposition 5.3.1. Für $1 \leq i \leq d-2$ ist

$$\{[x]_i^\nu : x \text{ normiert, } \deg(x) < d - (i+1)\}$$

eine Basis von $V_\nu^{\Gamma_i}$. Insbesondere ist für $i \geq d-1$ stets $\dim V_\nu^{\Gamma_i} = 0$.

Beweis. Für $i \geq 1$ gilt

$$[x]_i^\nu = \sum_{a,d,b} \psi\left(x \frac{b}{a}\right) f_{x \frac{a}{d}}.$$

Nach der Wahl von ψ ist also $[x]_i^\nu \neq 0$ genau dann, wenn $\deg(x) < d - (i+1)$. In diesem Fall ist ψ auf den entsprechenden Elementen trivial und es gilt

$$[x]_i^\nu = q^{i+1}(q-1) \sum_{d \in \mathbb{F}_q^*} f_{xd}.$$

Insbesondere ist $[x]_i^\nu = [ax]_i^\nu$ für $a \in \mathbb{F}_q^*$. Die angegebenen Elemente sind linear unabhängig und erzeugen $V_\nu^{\Gamma_i}$.

Für $i \geq d-1$ ist $\dim V_\nu^{\Gamma_i} = 0$, da man über Elemente summiert, auf denen ψ nichttrivial ist. \square

Wir können keine Basis von $V_\nu^{\Gamma_0}$ in geschlossener Form angeben. Nichtsdestotrotz kann man die Relationen zwischen den Elementen $h_x^i \in H_\rho^{(i)}(VX)$ ausrechnen, wobei wir wieder

$$h_x^i := h_{x,\nu}^i := \{\gamma v_i \mapsto \gamma \cdot [x]_i^\nu\}$$

definieren.

Proposition 5.3.2. Sei $\rho := \rho_\nu$ eine supercuspidale Darstellung von $G(n)$. Wir erhalten als Relationen der $h_x^i \in H_\rho^{(i)}(VX) \hookrightarrow H_\rho(VX)$:

- (i) $A_\rho h_x^i = q \cdot h_x^{i-1} + h_x^{i+1}$ für $1 \leq i \leq d-1$,
- (ii) $A_\rho h_x^0 = h_x^1 + q \cdot \sum_{\substack{\deg(y) \leq d-3 \\ y \text{ normiert}}} \nu(y^{-1}) \sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} j(yxa) h_y^1.$

Beweis. Wir gehen genauso vor wie im Beweis von Proposition 5.2.3. (i) Es ist $A_\rho h_x^i(\gamma v_{i-1}) = h_x^i(\gamma v_i) = \gamma [x]_i^\mu = (q-1)q^{i+1} \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \gamma f_{ax} = q \cdot h_x^{i-1}(\gamma v_{i-1})$. Falls $i > 1$, wird die behauptete Relation durch die Gleichung

$$A_\rho h_x^i(\gamma v_{i+1}) = \sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} 1 & \beta T^{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [x]_i^\nu = [x]_{i+1}^\nu$$

bewiesen. Im Fall $i = 1$ benutzen wir die Gleichung

$$\begin{aligned} A_\rho h_x^1(\gamma v_0) &= \gamma [x]_1^\mu + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \gamma \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [x]_1^\nu \\ &= q \cdot \left(\gamma [x]_{01}^\nu + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \gamma \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [x]_{01}^\nu \right) = q \cdot [x]_0^\nu, \end{aligned}$$

die die Bruhat-Zerlegung und $\Gamma_1 = \bigcup_\beta \Gamma_{01} \begin{pmatrix} 1 & \beta T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ widerspiegelt.

(ii) Einerseits ist

$$A h_x^0(\gamma v_1) = \sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [x]_0^\nu = [x]_1^\nu + \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \gamma \Gamma_1 w \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_x = [x]_1^\nu + q \cdot \gamma \Gamma_1 w f_x.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_1 w f_x &= \sum_{y \in (A/n)^\times, a, d, b} \nu(y^{-1}) j(-yx) \psi(by) f_{y_d} \\ &= q^2(q-1) \sum_{\deg(y) \leq d-3} \sum_d \nu(y^{-1}) j(-yx) f_{y_d} \\ &= \sum_{\substack{\deg(y) \leq d-3 \\ y \text{ normiert}}} \sum_a \nu(y^{-1}) j(yxa) [y]_1^\nu. \end{aligned}$$

Hier haben wir von der Voraussetzung $\nu|_{\mathbb{F}_q} = 1$ Gebrauch gemacht. \square

Das Element h_x^0 in (ii) muß nicht in der gewählten Basis von $H_{\rho_n, u}^{(0)}$ vorkommen. In dem Fall sind bei der Berechnung der Determinanten des Laplace-Operators die Koordinaten von h_x^0 in eben dieser Basis zu bestimmen.

Beispiel 5.3.3. Wir nehmen das Beispiel $n = T^3 + T + 1$, $q = 2$ aus dem letzten Abschnitt auf. Es sind die supercuspidalen Darstellungen der vier paarweise inäquivalenten Charaktere von

$$L^{(2)} := \{x \in L^* : N(x) \in \mathbb{F}_2^*\}$$

zu betrachten. In diesem Fall gilt einfach

$$L^{(2)} = \{x \in L^* : N(x) = 1\},$$

was ja gerade die Menge der 9-ten Einheitswurzeln über \mathbb{F}_2 ist. Mit Hilfe der Charaktertafeln von $G(n)$ (siehe Kapitel 4) berechnen wir

$$\dim H_{\rho_\nu}^{(0)}(VX) = 1 - \delta(\nu, l^*) \quad \text{und} \quad \dim H_{\rho_\nu}^{(1)}(VX) = 1,$$

wobei $l := \mathbb{F}_4$ die quadratische Erweiterung von \mathbb{F}_2 in L sei. Da $l^* \subseteq L^{(2)}$ gilt, erfüllt genau einer der vier Charaktere die Bedingung $\delta(\nu, l^*) = 1$. Dieser Charakter führt zu dem Faktor

$$1 + 2u^2,$$

da der Berechnungsgraph nur aus einem Punkt besteht und somit nur $I + Q_\rho u^2$ zum Ergebnis beiträgt.

Für die anderen Charaktere bilden die Funktionen h_1^0 und h_1^1 eine Basis des Vektorraumes $H_\rho(VX)$. Der Berechnungsgraph hat also die Form



Die Kanten des Graphen werden gemäß der Vorgaben aus Proposition 5.3.2 indiziert. Für die Kante (h_1^0, h_1^1) resultiert die Indizierung mit $1 + 2 \cdot j(1)$, da 1 das einzige normierte Polynom vom Grad 0 und $\mathbb{F}_2^* = \{1\}$ ist. Die Kante (h_1^1, h_1^0) wird einfach mit $q = 2$ indiziert. Daraus folgt

$$\det(\Delta_{\rho_\nu}(u)) = (1 + 2u^2)^2 - 2(2j(1) + 1)u^2.$$

Die Werte der j -Funktion an der Stelle 1 sind

$$4 \cdot j(1) = -\alpha^5 - \alpha^2 + \alpha, \quad -\alpha^4 + \alpha^2 - \alpha, \quad \text{und} \quad \alpha^5 + \alpha^4$$

für die drei Charaktere. Dabei ist α eine 9-te primitive Einheitswurzel in \mathbb{C} . Das Produkt dieser drei Faktoren ergibt das Polynom

$$64u^{12} + 96u^{10} + 84u^8 + 49u^6 + 21u^4 + 6u^2 + 1.$$

Die Vielfachheiten aller Faktoren der supercuspidalen Darstellungen in $Z_{X(n)}(u)$ ist $q^d - 1 = 7$.

5.4 Explizite Formeln und Anwendungen

Als eine Anwendung der strukturellen Beschreibung der Berechnungsgraphen berechnen wir in diesem Abschnitt die Zetafunktion von $X(n)$ für kleine n . Im Fall $\deg(n) = 1$ besteht der Graph $X(n)$ nur aus einem Punkt und ist deswegen nicht interessant. In diesem Abschnitt sei $n \in A$ immer ein irreduzibles Polynom vom Grad 2.

Wir gewinnen aus den expliziten Formeln das Spektrum verschiedener Familien von Graphen, die mit $X(n)$ zusammenhängen und beweisen dadurch extreme Eigenschaften dieser Graphen.

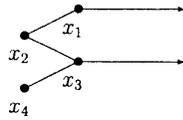
Satz 5.4.1. Sei $n \in A$ irreduzibel vom Grad 2. Dann ist

$$Z_{X(n)}(u)^{-1} = (1 - u^2)^{g(X(n))} (1 - q(q-1)u^2)(q(q-1)u^4 + qu^2 + 1)^{q^2} \\ \times (qu^2 + 1)^{A_q} \left((q(q-1)u^4 - u^2 + 1)((q-1)u^2 + 1) \right)^{B_q}$$

mit $A_q := \frac{(q-2)(q^2+1)}{2}$, $B_q := \frac{q(q^2+1)}{2}$ und dem Geschlecht $g(X(n)) = (q^2 + 1)(q^2 - q - 1) + 1$.

Beweis. Zuerst berechnen wir die Faktoren von $Z_{X(n)}(u)$, die von den Darstellungen der Hauptserie herrühren.

Der Graph $\Gamma_0(n) \setminus \mathcal{T}$ hat die Gestalt



Die Vertretersysteme für die Operation von Γ_1 auf $\mathbb{P}^1(A/n)$ (vgl. Beispiel 5.2.7 und 5.3.3) sind

$$R_0 = \{0, T\} \longleftrightarrow \{x_2, x_4\} \\ R_1 = \{\infty, 0\} \longleftrightarrow \{x_1, x_3\}$$

Die Kanten (x_1, x_2) und (x_2, x_3) sind indiziert mit q , (x_3, x_4) mit $q-1$, (x_4, x_3) mit $q+1$ und alle anderen mit 1, wie man aus Proposition 5.2.3 abliest. Die Spitzen werden abgeschnitten. Für $\det(\Delta_\mu) = \det(\Delta_{\rho_\mu})$ ergibt sich

μ	$\det(\Delta_\mu(u))$
$(1, 1)$	$(u^2 - 1)(q(q-1)u^2 - 1)(q(q-1)u^4 + qu^2 + 1)$
$\mu_2 \neq 1, \mu_{ C(\mathbb{F}_q)} = 1$	$qu^2 + 1$
$\mu_2 \neq 1, \mu_{ D(\mathbb{F}_q)} = 1$	$(q(q-1)u^4 - u^2 + 1)((q-1)u^2 + 1)$

Ist $\mu \neq (1, 1)$, so kann μ nicht gleichzeitig auf $C(\mathbb{F}_q)$ und $D(\mathbb{F}_q)$ trivial sein, da $C(\mathbb{F}_q)$ und $D(\mathbb{F}_q)$ die Untergruppe $D(\mathbb{F}_{q^2}) \cap G(n)$ erzeugen. Ist also $\mu \neq (1, 1)$ trivial auf $C(\mathbb{F}_q)$, so besteht der Berechnungsgraph nur aus dem Knoten x_4 . Ist hingegen $\mu \neq (1, 1)$ trivial auf $D(\mathbb{F}_q)$, so wird nur der Knoten x_4 und die entsprechende Kante aus dem Graphen $X_0(n)$ gelöscht, um den Berechnungsgraphen zu erhalten.

Die triviale Darstellung liefert den Faktor $(u^2 - 1)(q(q-1)u^2 - 1)$. Dies und der Ausgleichsfaktor $(1 - u^2)^{g-1}$ zwischen $\det(\Delta(u))$ und der Zetafunktion (siehe Satz 2.2.7) ergibt den Faktor

$$(1 - u^2)^g (1 - q(q-1)u^2).$$

Das Geschlecht haben wir in Proposition 1.5.7 ausgerechnet. Es bleiben also die Vielfachheiten A_q und B_q zu berechnen. Die Gleichung $\mu_{|C(\mathbb{F}_q)} = 1$ impliziert

$$\mu_2(\bar{\alpha}) = \frac{1}{\mu_1(\alpha\bar{\alpha})} = \frac{1}{\mu_1(N(\alpha))}$$

und μ_2 ist bestimmt schon durch μ_1 . Wegen $\mu_2 \neq 1$ und der Surjektivität der Norm erhalten wir $q-2$ Darstellungen dieser Art. Ist q ungerade, so ist der quadratische Charakter getrennt zu behandeln. Dem quadratischen Charakter entspricht eine Darstellung vom Grad $\frac{q^2+1}{2}$, vgl. Proposition 4.3.3. Jede der anderen Darstellungen ist wegen (4.7) äquivalent zu genau einer der übrigen. Dies ergibt

$$A_q = \begin{cases} \frac{q^2+1}{2} + \frac{(q-3)}{2}(q^2+1) = \frac{(q-2)(q^2+1)}{2}, & \text{falls } q \text{ ungerade} \\ (q-2)\frac{(q^2+1)}{2}, & \text{falls } q \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Gleichung $\mu_{|D(\mathbb{F}_q)} = 1$ ist äquivalent zu $\mu_1 = 1$ und $\mu_2|_{\mathbb{F}_q} = 1$. Für $\mu_2 \neq 1$ gibt es $\frac{q^2-1}{q-1} - 1 = q$ Darstellungen dieses Typs. Mit demselben Argument wie im letzten Fall erhalten wir

$$B_q = \begin{cases} \frac{q^2+1}{2} + \frac{(q-1)}{2}(q^2+1) = \frac{q(q^2+1)}{2}, & \text{falls } q \text{ ungerade} \\ q\frac{(q^2+1)}{2}, & \text{falls } q \text{ gerade.} \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, daß das Produkt aller bisher bestimmten Faktoren (mit ihren Vielfachheiten) bereits die Zetafunktion ergibt. Die Anzahl der Kanten von $X(n)$ ist hier nämlich gerade

$$(2q+1)(q^2+1) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 4q^2 + 2 \cdot A_q + 6 \cdot B_q),$$

vgl. Proposition 4.2.3. Die Faktoren, die von den supercuspidalen Darstellungen herrühren, sind insbesondere alle trivial. \square

Wenden wir Korollar 2.2.9 an, so erhalten wir

Korollar 5.4.2. Sei $n \in A$ irreduzibel vom Grad 2. Die Anzahl der spannenden Bäume von $X(n)$ ist dann

$$(q^2 + 1)^{g^2-1} (q+1)^{A_q} (q^2(q-1))^{B_q}.$$

\square

Der Graph $X(n)$ ist nicht regulär, so daß wir nicht einfach (2.9) anwenden können, um das Spektrum von $X(n)$ zu bestimmen. Wir verwenden Techniken von Hashimoto (siehe [H1, pp. 228]), das Spektrum von $X(n)$ und assoziierter Graphen zu bestimmen.

Sei Y ein kombinatorischer, bipartiter und endlicher Graph mit der Partition $VY = V_0(Y) \cup V_1(Y)$. Es bezeichnen $n_i := \#V_i(Y)$ die Kardinalitäten der Knotenmengen, ohne Einschränkung mit $n_1 \geq n_0$. Wir nehmen weiterhin an, daß Y $(q_0 + 1, q_1 + 1)$ -semiregulär ist, nach Definition also alle Knoten in $V_i(Y)$ den Grad $q_i + 1$, $i = 0, 1$ haben.

Wir definieren die Graphen $Y^{[i]}$, $i = 0, 1$ durch

$$\begin{aligned} VY^{[i]} &:= V_i(Y), \\ EY^{[i]} &:= \{\text{reduzierte Wege der Länge 2 in } Y \text{ mit Anfangspunkt in } V_i(Y)\}. \end{aligned}$$

Eine Kante ist also von der Form (e_1, e_2) mit $\partial_1(e_1) = \partial_0(e_2)$ und $\bar{e}_1 \neq e_2$. Die Inversion der Kanten und die Randabbildungen seien durch $(e_1, e_2) := (\bar{e}_2, \bar{e}_1)$, $\partial_0(e_1, e_2) := \partial_0(e_1)$ und $\partial_1(e_1, e_2) := \partial_1(e_2)$ gegeben.

Die Graphen $Y^{[0]}$ bzw. $Y^{[1]}$ sind regulär vom Grad $q_1(q_0 + 1)$ bzw. $q_0(q_1 + 1)$. Das Spektrum von Y hat die Form

$$\text{Spec}(Y) = \{\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_{n_0}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_1 - n_0}\},$$

mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n_0} \geq 0$, wobei die Vielfachheiten mitgezählt werden. Eine kurze Rechnung zeigt dann

$$\text{Spec}(Y^{[0]}) = \{\lambda_1^2 - (q_0 + 1), \dots, \lambda_{n_0}^2 - (q_0 + 1)\} \quad (5.6)$$

$$\text{Spec}(Y^{[1]}) = \{\lambda_1^2 - (q_1 + 1), \dots, \lambda_{n_0}^2 - (q_1 + 1), \underbrace{-(q_1 + 1), \dots, -(q_1 + 1)}_{n_1 - n_0}\} \quad (5.7)$$

Den Zusammenhang von $Z_Y(u)$ und den Spektren liefert mit den eingeführten Bezeichnungen

Satz 5.4.3. [H1, Th. III] *Sei Y ein endlicher, bipartiter (q_0, q_1) -semiregulärer Graph, der kombinatorisch und zusammenhängend ist. Dann gilt*

$$Z_Y(u)^{-1} = (1 - u^2)^{q(Y)-1} (1 + q_1 u^2)^{n_1 - n_0} \times \prod_{j=1}^{n_0} \{1 - (\lambda_j^2 - q_0 - q_1) u^2 + q_0 q_1 u^4\}.$$

Der Graph $X(n)$ ist nach Proposition 4.2.3 kombinatorisch und bipartit mit der Knotenpartition $V(X(n)) = V_0(X(n)) \cup V_1(X(n))$, wobei die Elemente von $V_i(X(n))$ gerade die Knoten vom Typ i sind. $X(n)$ ist zudem $(q+1, q)$ -semiregulär. Es sei A der Nachbarschaftsoperator von $X(n)$ und $A^{[i]}$ der von $X(n)^{[i]}$. Mit Hilfe von Satz 5.4.3 und der Formel für $Z_{X(n)}(u)$ können wir das Spektrum von A^2 bestimmen:

Vielfachheit	Faktor von $Z_{X(n)}(u)$	Eigenwert λ_j^2 von A^2
1	$(1 - u^2)(1 - q(q-1)u^2)$	$q^2 + q$
q^2	$q(q-1)u^4 + qu^2 + 1$	$q - 1$
B_q	$q(q-1)u^4 - u^2 + 1$	$2q$
A_q	$((q-1)u^2 + 1)(qu^2 + 1)$	0

Damit ergeben sich als Spektren von $X(n)^{[0]}$ und $X(n)^{[1]}$:

Vielfachheit	Eigenwert von $A^{[0]}$	Eigenwert von $A^{[1]}$
1	$q^2 - 1$	q^2
q^2	-2	-1
B_q	$q - 1$	q
A_q	$-(q + 1)$	$-q$
$n_1 - n_0$		$-q$

Hierbei ist $A_q = 0$ für $q = 2$ zu beachten. Aus den Tabellen erhalten wir nun

Korollar 5.4.4. *Sei $n \in A$ irreduzibel vom Grad 2. Dann sind (für jedes q) die Graphen $X(n)^{[0]}$ und $X(n)^{[1]}$ Ramanujan-Graphen.* \square

Die Situation $\deg(n) = 2$ ist in gewisser Hinsicht extremal. Das letzte Resultat läßt sich zum Beispiel nicht einfach auf höhere Grade verallgemeinern, vgl. Proposition 5.4.7.

Als letzte Anwendung der expliziten Formeln für $Z_{X(n)}(u)$ studieren wir die Expansionseigenschaften (vgl. Abschnitt 1.3) von $X(n)$. Sei Y wieder ein beliebiger endlicher, kombinatorischer und bipartiter Graph mit der Partition $VY = V_0(Y) \cup V_1(Y)$, nicht notwendigerweise semiregulär. Wir setzen $\theta := n_0/n_1 < 1$.

Definition 5.4.5. Ein solcher Graph Y heißt (n_1, θ, r, α) -beschränkter Konzentrador, falls $\frac{1}{2} \cdot \#EY \leq r \cdot n_1$ ist und für jede Untermenge $S \subseteq V_1(Y)$ mit $\#S \leq \alpha \#V_1(Y)$ für die Menge der Nachbarn $\#N(S) \geq \#S$ gilt.

In [Mol] wird bewiesen, daß $X^1(n)$ ein $(n_1, \frac{q}{q+1}, q, \frac{q-4}{q-3})$ -beschränkter Konzentrador ist für n beliebig, $q \geq 5$, $\deg(n) \geq 2$ mit der Inputmenge $V_1(X(n))$ und der Outputmenge $V_0(X(n))$. In der Situation $\deg(n) = 2$ ist $X(n) = X^1(n)$ und die genaue Kenntnis des Spektrums führt zu schärferen Konstanten.

Korollar 5.4.6. *Sei $n \in A$ irreduzibel vom Grad 2 und $q \geq 3$, dann ist $X(n)$ ein $(n_1, \frac{q}{q+1}, q, \frac{q-2}{q-1})$ -beschränkter Konzentrador.*

Beweis. Sei $M = (m_{ij})_{i \in V_1, j \in V_0}$ die Matrix mit den Einträgen

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls der Knoten } i \in V_1(X(n)) \text{ benachbart ist mit } j \in V_0(X(n)) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Matrix MM^t ist symmetrisch und positiv semidefinit mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n_1} \geq 0$. Nach Definition gilt gerade

$$MM^t = A^{[1]} + (q_1 + 1)I = A^{[1]} + qI.$$

Sei nun $S \subseteq V_1(X(n))$ mit $\#S \leq \alpha \cdot \#V_1(X(n))$. Die Expansionsformel von Tanner [Ta, Thm. 2.1] (vgl. auch [Ch]) führt zu

$$\frac{\#N(S)}{\#S} \geq \frac{q^2}{\alpha(q(q+1) - \lambda_2) + \lambda_2} = \frac{q^2}{\alpha q(q-1) + 2q},$$

da der zweite Eigenwert λ_2 von $A^{[1]} + qI$ nach den Tafeln oben gerade $2q$ ist. Demnach ist $X(n)$ ein Konzentrador, der durch die behaupteten Konstanten beschränkt wird, falls

$$\frac{q^2}{\alpha q(q-1) + 2q} \geq 1$$

gilt. Dies ist aber zu

$$\alpha \leq \frac{q^2 - 2q}{q(q-1)} = \frac{q-2}{q-1}$$

äquivalent. \square

Für Anwendungen in der Kombinatorik sind Familien von Konzentradoren derselben Regularität von Interesse. Es stellt sich also die Frage, inwieweit sich die Ergebnisse für $X(n) = X^1(n)$, $\deg(n) = 2$ auf $X^1(n)$ für allgemeines n übertragen lassen. Die Graphen $X^1(n)$ sind nach Proposition 4.2.9 zumindest für $q \geq 4$ oder $q = 3$ und n irreduzibel zusammenhängend. Wir folgen dem Beweis von Korollar 5.4.6: Es sei MM^t die Matrix, die analog zu $X^1(n)$ gebildet werde mit den Eigenwerten $\lambda_1(n) \geq \dots \geq \lambda_{n_1}(n) \geq 0$ und $n_1 = \#V_1(X^1(n))$. Da wieder die Gleichung

$$MM^t = A^{[1]} + (q_1 + 1)I = A^{[1]} + qI$$

gilt mit $A^{[1]} = A_{X^1(n)}^{[1]}$, ist

$$\{\lambda_1 - q, \dots, \lambda_{n_1} - q\}$$

das Spektrum von $(X^1(n))^{[1]}$. Wegen (5.6) und (5.7) ist das Spektrum von $(X^1(n))^{[0]}$ dann durch

$$\{\lambda_1 - (q+1), \dots, \lambda_{n_0} - (q+1)\}$$

gegeben. Ist Y ein endlicher Graph, so bezeichnet $\lambda(Y)$ den betragsmäßig zweitgrößten Eigenwert von Y . Es folgt also

$$\Lambda_1(n) := \lambda\left((X^1(n))^{[1]}\right) = \max\{\lambda_2(n) - q, q\}$$

$$\Lambda_0(n) := \lambda\left((X^1(n))^{[0]}\right) = \max\{\lambda_2(n) - q, |\lambda_{n_0} - (q+1)|\}.$$

Nach Satz 1.3.7 liegen die kleinsten möglichen Häufungspunkte für $\Lambda_i(n)$ bei $2\sqrt{q^2 - 1}$ bzw. $2\sqrt{q^2 - 2}$. Ist $\lambda_{n_0} - (q+1) \geq 0$, so gilt auf jeden Fall $\Lambda_0(n) = \lambda_2(n) - (q+1)$. Ist $\lambda_{n_0} - (q+1) < 0$, so ist $|\lambda_{n_0} - (q+1)| \leq q+1$ kleiner als $2\sqrt{q^2 - 1}$. Ebenso ist q kleiner als $2\sqrt{q^2 - 2}$. Somit ist

$$\Lambda_i(n) = \lambda_2(n) - (q_i + 1)$$

für fast alle $n \in A$, wobei $q_0 = q, q_1 = q - 1$ ist.

Insbesondere impliziert das

$$\begin{aligned} \liminf_{n \in A} \lambda_2(n) - (q+1) &\geq 2\sqrt{q^2 - 2} \\ \liminf_{n \in A} \lambda_2(n) - q &\geq 2\sqrt{q^2 - 1}. \end{aligned}$$

Wegen

$$2\sqrt{q^2 - 2} + q + 1 > 2\sqrt{q^2 - 1} + q$$

ist die erste der beiden Ungleichungen schärfer als die zweite. Damit ist auf jeden Fall

$$\liminf_{n \in A} \lambda_2(n) - q > 2\sqrt{q^2 - 1} \quad (5.8)$$

und wir haben bewiesen:

Proposition 5.4.7. *Die Graphen $X^1(n)^{[1]}$ können für jedes q nur für endlich viele n Ramanujan-Graphen sein.* \square

Beispiel 5.4.8. Sei wieder $q = 2$ und $n = T^3 + T + 1$. Der Graph $X^1(n)$ ist zusammenhängend. Nach Lemma 4.2.8 ist dann $X^1 \xrightarrow{G(n)} X^1(n)$ eine Überlagerung und wir können die Zetafunktion $Z_{X^1(n)}(u)$ auf dieselbe Art berechnen wie $Z_{X(n)}(u)$, nur daß in den Berechnungsgraphen der entsprechenden L -Funktionen die Knoten vom Typ 2 gelöscht werden. Analog zu Beispiel 5.2.7 und 5.3.3 ergibt sich so

$$\begin{aligned} Z_{X^1(n)}(u)^{-1} &= (1 - u^2)^{43} (1 + u^2)^{42} (1 - 2u^2) \\ &\quad \times (64u^{24} - 64u^{22} + 64u^{20} - 40u^{18} + 40u^{16} - 22u^{14} + \\ &\quad \quad \quad + 17u^{12} - 11u^{10} + 10u^8 - 5u^6 + 4u^4 - 2u^2 + 1)^9 \\ &\quad \times (2u^4 + 1)^8 (8u^{12} + 12u^{10} + 12u^8 + 9u^6 + 6u^4 + 3u^2 + 1)^7. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 5.4.3 können wir dann wieder das Spektrum von $X^1(n)$ und entsprechend von $(X^1(n))^{[0]}$ und $(X^1(n))^{[1]}$ zumindest approximativ bestimmen. Es stellt sich heraus, daß $(X^1(n))^{[0]}$ wieder ein Ramanujan-Graph ist, $(X^1(n))^{[1]}$ hingegen nicht.

Aus (5.8) folgt, daß wir als bestmögliche obere Schranke für $\lambda_2(n)$ nur

$$\lambda_2(n) \leq 2\sqrt{q^2 - 2} + q + 1$$

für $\deg(n) \rightarrow \infty$ erhalten können. Dies setzte aber schon den besten Fall voraus, daß $(X^1(n))^{[0]}$ ein Ramanujan-Graph wäre für alle $n \in A$. Nehmen wir dies einmal an. Wie im Beweis von Korollar 5.4.6 liefert die Schranke für $\lambda_2(n)$ die Expansion

$$\frac{\#N(S)}{\#S} \geq \frac{q^2}{\alpha(q^2 - 2\sqrt{q^2 - 2} - 1) + 2\sqrt{q^2 - 2} + q + 1}. \quad (5.9)$$

Weiter ist $X^1(n)$ dann ein $(n_1, \frac{q}{q+1}, q, \frac{q^2-q-1-2\sqrt{q^2-2}}{q^2-1-2\sqrt{q^2-2}})$ -beschränkter Konzentratoren. Beschränkte Konzentratoren mit Expansionskonstante $\alpha \geq \frac{1}{2}$ sind ein wichtiger Baustein für andere extremale Graphen wie Super-Konzentratoren (für eine Definition und Konstruktion verweisen wir auf [Lu]). Die für Anwendungen interessantesten Fälle $q = 3$ oder 4 ergeben aber in der Abschätzung (5.9) Expansionskonstanten $< \frac{1}{2}$. Die Expansionsformel von Tanner ist also zu schwach, um eine gute Expansion der Graphen $X^1(n)$ im allgemeinen nachzuweisen, selbst wenn man eine scharfe Abschätzung für $\lambda_2(n)$ hat.

6 Zetafunktionen der vollen Hauptkongruenzgraphen

Im letzten Kapitel wollen wir auf die Zetafunktion der vollen (gewichteten) arithmetischen Graphen $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$ eingehen, die in Abschnitt 4.1 beschrieben wurden. Zuerst verallgemeinern wir grundlegende Aussagen über die Zetafunktion auf diese unendlichen Graphen. Im zweiten Abschnitt untersuchen wir dann Hauptkongruenzgraphen näher. Das Kapitel endet mit einer Beobachtung über Zetafunktionen der (gewichteten) Hecke-Graphen $\mathcal{T}_0(T^m)$ und über die Riemannsche Vermutung, der alle unsere Beispiele genügen.

6.1 Grundlegende Eigenschaften

Sei $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma = GL_2(A)$ eine Untergruppe vom endlichen Index und \mathcal{T} der Bruhat-Tits-Baum. Des weiteren bezeichne ρ wieder eine endlichdimensionale, unitäre Darstellung von $\tilde{\Gamma}$. Die L -Funktion $L(\mathcal{T}, \tilde{\Gamma}, \rho; u)$ ist definiert, falls die Menge $\mathcal{C}_{redn}^l(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$ der geschlossenen, stark reduzierten, S -normalisierten und normierten Wege der Länge l des Graphen von Gruppen $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ endlich ist für alle $l \geq 1$.

Proposition 6.1.1. *Sei $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma = GL_2(A)$ eine Untergruppe vom endlichen Index. Dann ist $\mathcal{C}_{redn}^l(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$ für jedes $l \geq 1$ eine endliche Menge.*

Beweis. Sei $l \geq 1$ gegeben. Es reicht zu zeigen, daß es in $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ nur endlich viele geschlossene, stark reduzierte Wege W der Länge l gibt. Wege dieser Art mit dem Anfangspunkt in dem endlichen Teil des Graphen $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$, der dem Graphen von Gruppe $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ zugrundeliegt, gibt es nur endlich viele, da die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf \mathcal{T} diskret ist.

Es reicht nun zu zeigen, daß jeder geschlossene, stark reduzierte Weg (c, μ) in $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ Knoten enthält, die im endlichen Teil des Graphen $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ liegen. Angenommen $(c, \mu) = ((e_1, \dots, e_l), (\mu_0, \dots, \mu_l))$ sei ein geschlossener, stark reduzierter Weg der Länge l , der nur auf den Spitzen von $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ lebt. Dann ist nach Definition $(c, \mu) \circ (c, \mu)$ ein reduzierter Weg der Länge $2l$ und es gibt eine Kante e_i , $1 < i < 2l$, so daß $\partial_1(e_i)$ minimalen Typ hat. Demnach ist $e_{i+1} = \bar{e}_i$. Da die Kanten aber auf den Spitzen liegen, ist die Knotengruppe, die zu $\partial_1(e_i)$ gehört, gleich der Kantengruppe zu e_{i+1} . Insbesondere ist der Weg $(c, \mu) \circ (c, \mu)$ nicht reduziert. Widerspruch. \square

In Kapitel 3 hatten wir

$$L(\mathcal{T}, \tilde{\Gamma}, \rho; u) := \exp \left(\sum_{(d, \tau) \in \mathcal{C}_{redn}(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})} \frac{1}{l(d)} \text{tr}_{j(d)} \rho(\langle d, \tau \rangle) u^{l(d)} \right)$$

definiert. Der Zusammenhang mit den L -Funktionen der endlichen Teilgraphen von $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$, wie sie im Kapitel 5 für den Fall der endlichen Hauptkongruenzgraphen näher untersucht worden sind, ist einfach: Es bezeichne \mathcal{T}^k wieder den Untergraphen von \mathcal{T} , der von allen Knoten vom Typ $\leq k$ erzeugt wird, X^k die Zusammenhangskomponente des Knoten v_0 in \mathcal{T}^k und Θ^k die Untergruppe von Γ , die von Γ_1 und Γ_k erzeugt wird. Wir setzen noch

$$\tilde{\Theta}^k := \Theta^k \cap \tilde{\Gamma}.$$

Aus Lemma 4.2.6 folgt dann, daß $\tilde{\Theta}^k$ die maximale Untergruppe von $\tilde{\Gamma}$ ist, die auf X^k operiert. Zudem hat man die natürlichen Einbettungen

$$\tilde{\Theta}^k \hookrightarrow \tilde{\Theta}^{k+1}$$

und

$$\mathcal{C}_{redn}(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k) \hookrightarrow \mathcal{C}_{redn}(\tilde{\Theta}^{k+1} \setminus X^{k+1}).$$

Es gilt damit

$$\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{C}_{redn}(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k) = \mathcal{C}_{redn}(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}).$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir

Satz 6.1.2. *Es ist*

$$L(\mathcal{T}, \tilde{\Gamma}, \rho; u) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(X^k, \tilde{\Theta}^k, \rho; u)$$

im Sinne der formalen Konvergenz formaler Potenzreihen.

Beweis. Es sei $r \in \mathbb{N}$ eine Zahl wie in Proposition 4.1.7, so daß der von den Knoten vom Typ $\geq r$ induzierte Untergraph von $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ nur noch aus disjunkten Halbgeraden, also gerade den Spitzen besteht. Für $k \geq r$ haben alle Wege $(c, \mu) \in \mathcal{C}_{redn}(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k)$, die neu zu der Menge $\bigcup_{j < k} \mathcal{C}_{redn}(\tilde{\Theta}^j \setminus X^j)$ hinzukommen, die Länge $\geq k - r$. Für $k \geq r + n$ stimmen die ersten n Koeffizienten von $L(X^k, \tilde{\Theta}^k, \rho; u)$ und $L(\mathcal{T}, \tilde{\Gamma}, \rho; u)$ überein. Insbesondere konvergiert die Folge $(L(X^k, \tilde{\Theta}^k, \rho; u))_k$ formal gegen $L(\mathcal{T}, \tilde{\Gamma}, \rho; u)$. \square

Aus Satz 3.5.3 folgt dann direkt

Korollar 6.1.3. *Sei $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe von endlichem Index und ρ' eine endlichdimensionale, unitäre Darstellung von $\tilde{\Gamma}$. Dann ist*

$$L(\mathcal{T}, \tilde{\Gamma}, \rho'; u) = L(\mathcal{T}, \Gamma, \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^{\Gamma} \rho'; u).$$

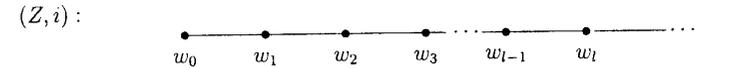
Ist $\tilde{\Gamma}$ dazuhin normal in Γ , so gilt

$$Z_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(u) = L(\mathcal{T}, \tilde{\Gamma}, 1; u) = \prod_{\rho \in \tilde{\Gamma} / \tilde{\Gamma}} L(\mathcal{T}, \Gamma, \rho; u)^{\text{deg}(\rho)}.$$

Die L -Funktionen der allgemeinen arithmetischen Graphen lassen sich theoretisch als Grenzwerte über die Determinanten der Laplace-Operatoren bzw. der Nachbarschaftsoperatoren T_ρ berechnen. Für Zetafunktionen werden wir genauere Aussagen machen. Die Resultate lassen sich zumindest auf die L -Funktionen $L(\mathcal{T}, \Gamma, \rho; u)$ mit Darstellungen ρ übertragen, die über $\Gamma(n)$, n irreduzibel, faktorisieren.

Für die gewichteten Graphen $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$ ist der Begriff der Spitze genauer zu fassen.

Definition 6.1.4. Ein Untergraph von $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$ der Form



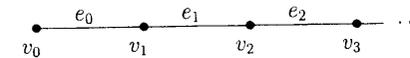
heißt *Spitze des (gewichteten) Graphen $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$* , wenn die Kanten (w_i, w_{i+1}) , $i \geq 0$ mit 1 und die Kanten (w_{i+1}, w_i) , $w_i \geq 0$ mit q gewichtet sind.

Aus der Definition folgt insbesondere, daß die Knoten w_1, w_2, w_3, \dots genau zwei Nachbarn in $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$ besitzen.

Die Spitzen der gewichteten Graphen sind, wenn man die Gewichte der Kanten vergißt, spezielle Vertreter der Enden der ungewichteten Graphen $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$.

Der gewichtete Graph $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$ ist die Vereinigung eines gewichteten endlichen Graphen (Y, i) und endlich vieler Spitzen $(Z_1, i), \dots, (Z_c, i)$, vgl. Proposition 4.1.7. Die Anfangspunkte der Spitzen seien $v_1, \dots, v_c \in VY$, mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$. Diese Darstellung ist nicht eindeutig. Im Fall von $\tilde{\Gamma} = \Gamma(n)$, $\text{deg}(n) \geq 2$ kann man als Anfangspunkte genau die Knoten vom Typ $\text{deg}(n) - 1$ wählen, aber natürlich auch Knoten größeren Typs; vgl. auch Beispiel 6.1.10.

Beispiel 6.1.5. Für $\tilde{\Gamma} = \Gamma = GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ erhält man nach Proposition 4.1.4 den Quotienten



(Zur Erinnerung: Es ist $\partial_0(e_i) = v_i$.) Die Kante e_0 ist mit $q+1$, die Kanten e_i für $i \geq 1$ mit 1 und die Kanten \bar{e}_i für $i \geq 0$ mit q gewichtet. Der ganze (gewichtete) Graph ist *keine* Spitze, da die Gewichte der geometrischen Kante $\{e_0, \bar{e}_0\}$ nicht mit der Gewichtsbedingung in der Definition übereinstimmen. Als Aufsatzpunkte der Spitze sind aber alle Knoten v_i , $i \geq 1$ wählbar.

Wir definieren den Operator $Q^* := Q_{(Y,i)}^*$ auf (Y, i) durch

$$Q_{(Y,i)}^*(v) := \begin{cases} Q_{(Y,i)}(v) & \text{falls } v \neq v_i, i = 1, \dots, c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\Delta^*(u) := \Delta_{(Y,i)}^*(u) := I - A_{(Y,i)}u + Q_{(Y,i)}^*u^2.$$

Dieser Operator wird in [Ti] in einer symmetrisierten Form wesentlich benutzt.

Satz 6.1.6. *Der Graph $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$ sei die bis auf die Aufsatzpunkte der Spitzen disjunkte Vereinigung eines endlichen Graphen (Y, i) mit Spitzen $(Z_1, i), \dots, (Z_c, i)$. Die Aufsatzpunkte v_1, \dots, v_c der Spitzen seien paarweise verschieden. Dann gilt*

$$Z_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(u)^{-1} = \frac{(1 - u^2)^{g-1+c}}{(1 - qu^2)^c} \cdot P,$$

wobei $g = g(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$ das Geschlecht und $c = c(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$ die Anzahl der Spitzen von $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ bezeichnet und weiterhin

$$P = \det \Delta_{(Y,i)}^*(u)$$

ein Polynom vom Grad $\leq 2 \cdot \#VY - c$ ist. Insbesondere hängt $P = \det(\Delta_{(Y,i)}^*(u))$ nicht von der Wahl der Aufsatzpunkte v_1, \dots, v_c bzw. von der Wahl von (Y, i) ab.

Beweis. Nach Satz 6.1.2 ist

$$Z_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_{(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k, i)}(u).$$

Da $\tilde{\Theta}^k \setminus X^k$ ein endlicher Graph ist, folgt aus Satz 3.6.1

$$Z_{(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k, i)}(u)^{-1} = (1 - u^2)^{g(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k) - 1} \det \Delta_{(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k, i)}(u),$$

da die Operatoren $A_{(Y,i)}$ und A_1 zueinander transponiert sind, vgl. auch Bemerkung 3.3.2. Bezüglich der Standardbasis der charakteristischen Funktionen von VY hat dieser Operator auf den Knoten der Spitzen von $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$, die den Typ $\leq k$ haben, eine ganz bestimmte Form: Nichttriviale Einträge gibt es nur auf der Diagonalen und den beiden Nebendiagonalen. Die Determinante $\det(\Delta_{(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k, i)}(u))$ läßt sich daher durch Entwicklung nach Zeilen und Spalten direkt in Verbindung mit $\det(\Delta_{(Y,i)}^*(u))$ bringen. Genauer beschreiben wir die Entwicklung in

Lemma 6.1.7. *Es sei A eine $(n \times n)$ -Matrix über $\mathbb{C}[[u]]$ mit $A_{n,n} = 1 + qu^2$. Des weiteren sei $B^{(r)}$ die $(n+r) \times (n+r)$ -Matrix der Form*

$$B^{(r)} = \left(\begin{array}{c|cccc} A & & & & \\ \hline & -qu & & & \\ -u & 1 + qu^2 & -qu & & \\ & -u & 1 + qu^2 & -qu & \\ & & -u & \ddots & \\ & & & \ddots & -qu \\ & & & -u & 1 + qu^2 & -qu \\ & & & & -u & 1 + (q-1)u^2 \end{array} \right).$$

Alle Einträge außerhalb von A und der Diagonalen und den beiden Nebendiagonalen seien null. Dann ist

$$\det B^{(r)} = F_r \cdot \det(A^{(r)}),$$

wobei die $(n \times n)$ -Matrix $A^{(r)}$ bis auf den den Eintrag $(A^{(r)})_{n,n} := \frac{F_{r+1}}{F_r}$ mit A übereinstimme und

$$F_r := 1 + (q-1)u^2 + (q-1)qu^4 + \dots + (q-1)q^{r-1}u^{2r}$$

sei. Weiterhin ist

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \det(B^{(r)}) = \frac{1 - u^2}{1 - qu^2} \det A^*,$$

wobei die Einträge der $n \times n$ -Matrix A^* mit A bis auf den Eintrag $(A^*)_{n,n} := 1$ übereinstimmen.

Beweis. Man löscht durch Zeilenoperationen sukzessive die Einträge $B_{i,i+1}^{(r)} = -qu$ in der oberen Nebendiagonalen von $B^{(r)}$. Als Diagonaleinträge der dadurch entstehenden Matrix $\widetilde{B}^{(r)}$ erhält man

$$\begin{aligned} \widetilde{B}^{(r)}_{n+r,n+r} &= 1 + (q-1)u^2 = F_1 \\ \widetilde{B}^{(r)}_{n+r-1,n+r-1} &= \frac{1 + (q-1)u^2 + (q-1)qu^4}{1 + (q-1)u^2} = \frac{F_2}{F_1} \\ &\vdots \\ \widetilde{B}^{(r)}_{n,n} &= \frac{F_{r+1}}{F_r}. \end{aligned}$$

Der untere rechte $(r \times r)$ -Block von $\widetilde{B}^{(r)}$ ist dann eine Dreiecksmatrix, der obere rechte Block ist null und wir erhalten

$$\det(B^{(r)}) = \det(\widetilde{B}^{(r)}) = F_1 \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \dots \cdot \frac{F_r}{F_{r-1}} \cdot \det A^{(r)} = F_r \cdot \det A^{(r)}.$$

Die zweite Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} F_r &= (1 + qu^2 + \dots + q^r u^{2r}) - u^2(1 + qu^2 + \dots + q^{r-1} u^{2(r-1)}) \\ &= \frac{q^{r+1} u^{2(r+1)} - 1}{qu^2 - 1} - u^2 \frac{q^r u^{2r} - 1}{qu^2 - 1}. \end{aligned}$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_r = \frac{1 - u^2}{1 - qu^2}.$$

□

Wir fassen nun $\Delta^k(u) := \Delta_{(\tilde{\Theta}^k \setminus X^k)}(u)$ als Matrix bezüglich der Standardbasis der charakteristischen Funktionen auf den Knoten auf. Dabei wählen wir eine solche Aufzählung der Basis, daß alle Knoten einer fixierten Spitze die letzten Basiselemente sind, im Typ aufsteigend geordnet. Die Matrix von $\Delta^k(u)$ hat dann die Form, wie sie im Lemma gefordert wird. Wir können nun die Berechnung der Determinanten auf den Fall zurückführen, in dem alle Knoten der gewählten Spitze gelöscht sind und der Matrixeintrag des Aufpunktes der Spitze wie im Lemma beschrieben auf 1 gesetzt wird. Besitzt der Graph eine zweite Spitze, so führen wir Spalten- und Zeilenvertauschungen durch, so daß jetzt die Basiselemente, die den Knoten der zweiten Spitze entsprechen, am Ende stehen, wieder aufsteigend im Typ geordnet, und führen dasselbe Programm wie für die erste Spitze durch. Mehrfaches Anwenden des Lemmas ergibt den Satz.

Die Diagonaleinträge der Matrix zu $\Delta_{(Y,i)}^*(u)$ sind vom Grad 2 oder konstant in den Aufsatzen der Spitzen, die restlichen Einträge sind 0 oder vom Grad 1. Der Leitern der Determinante ist daher höchstens vom Grad $2 \cdot (\#VY - c) + c = 2 \cdot \#VY - c$. □

Bemerkung 6.1.8. Aus diesem Satz folgt insbesondere, daß es für die Zetafunktionen $Z_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(u)$ keine Funktionalgleichung wie im endlichen Fall gibt, was durch die Einsen in der Hauptdiagonale der Operatoren $\Delta_{(Y,i)}^*(u)$ verhindert wird.

Beispiel 6.1.9. Sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma = GL_2(A)$, vgl. Beispiel 6.1.5. Y sei der von v_0 und v_1 induzierte Untergraph und v_1 der Aufsatzenpunkt der Spitze. Dann ist

$$\det \Delta_{(Y,i)}^*(u) = \det \begin{pmatrix} 1 + qu^2 & -qu \\ -(q+1)u & 1 \end{pmatrix} = 1 - q^2 u^2$$

und

$$Z_{(\Gamma \setminus \mathcal{T}, i)}(u)^{-1} = \frac{(1 - q^2 u^2)}{1 - qu^2},$$

da das Geschlecht null ist und der Graph eine Spitze besitzt.

Die Voraussetzung, daß die Anfangspunkte der Spitzen verschieden sind, ist keine Einschränkung. Man wählt einfach die Nachbarknoten auf den jeweiligen Spitzen als Anfangspunkte. Dies illustriert das nächste

Beispiel 6.1.10. Sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma(T)$ der Hauptkongruenzgraph zum Polynom T . Der Graph $\mathcal{T}(T)$ hat $q+1$ Spitzen, die eigentlich alle am Knoten v_0 beginnen. Um der Voraussetzung zu genügen, setzen wir die Anfangsknoten der Spitzen jeweils einen Knoten weiter fest. Der Berechnungsgraph hat dadurch die Gestalt $\text{stern}(v_0)$ (im Bild für $q = 2$)



die Matrix von $\Delta^*(u)$ hat demnach die Form

$$\begin{pmatrix} 1 + qu^2 & -u & -u & \dots & -u \\ -qu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -qu & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -qu & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Zeilenumformungen folgt daraus

$$\det \Delta^*(u) = 1 - q^2 u^2.$$

Da das Geschlecht von $\Gamma(T) \setminus \mathcal{T}$ null ist und der Graph $q+1$ Spitzen besitzt, ist

$$Z_{(\Gamma(T) \setminus \mathcal{T}, i)}(u)^{-1} = \frac{(1 - u^2)^q (1 - q^2 u^2)}{(1 - qu^2)^{q+1}}.$$

6.2 Hauptkongruenzgraphen

Wir wollen nun an Abschnitt 5.4 anschließen und die Zetafunktionen $Z_{(\mathcal{T}(n), i)}(u)$ für n irreduzibel vom Grad $d = 2$ berechnen. Zuerst verallgemeinern wir Satz 6.1.6. Die supercuspidalen Darstellungen brauchen wir nicht zu behandeln, da die Knoten vom Typ $\geq d - 1$ keinen Beitrag leisten.

Proposition 6.2.1. Sei n irreduzibel vom Grad d und ρ_ν eine supercuspidale Darstellung von $G(n)$. Dann ist

$$L(\mathcal{T}, \Gamma, \rho; u) = L(X^{d-1}, \Theta^{d-1}, \rho; u).$$

Beweis. Es ist einfach zu sehen, daß $\dim V_{\rho_\nu}^{\Gamma_i} = \dim H^{(i)}(VX) = 0$ ist für $i \geq d - 1$ und eine supercuspidale Darstellung ρ_ν von $G(n)$. Die Berechnungsgraphen für $\Delta_p^k(u)$ sind also gleich für alle $k \geq d - 1$. Die Aussage folgt dann aus dem Satz 6.1.2. □

Analog zum Operator Q^* auf (Y, i) definieren wir Q_ρ^* als Operator auf $H_\rho(VX)$ durch $Q_\rho^* f(v) := (Q^*(v))f(v)$ mit

$$Q^*(v) = \begin{cases} q & \text{falls } \deg(v) = q + 1 \\ 0 & \text{falls } \deg(v) = q. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich für die Basiselemente $h_x^i \in H_\rho^{(i)}(VX)$

$$Q_\rho^* h_x^i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = \deg(n) - 1 \\ q h_x^i & \text{sonst} \end{cases},$$

da nur die Knoten von X vom Typ $\deg(n) - 1$ die Wertigkeit q , alle anderen die Wertigkeit $q + 1$ besitzen, vgl. die Bemerkung vor Satz 5.2.5. Weiter setzen wir

$$\Delta_\rho^*(u) := I_\rho - A_\rho u + Q_\rho^* u^2 \in \text{End}_{\mathbb{C}[u]}(H_{\rho,0}(X) \otimes \mathbb{C}[u]).$$

Satz 6.2.2. Sei n ein irreduzibles Polynom vom Grad d , $q^d > 2$ und ρ_μ eine Darstellung von $G(n)$, die von dem Charakter μ von $B(A/n)$ induziert sei. Dann ist

$$L(\mathcal{T}, \Gamma, \rho_\mu; u)^{-1} = \frac{(1 - u^2)^{-\chi_\rho + c_\rho}}{(1 - qu^2)^{c_\rho}} \cdot \det \Delta_\rho^*(u).$$

Dabei sei $\chi_\rho = \#H_{\rho,0}(X) - \#H_{\rho,1}(X)$ und c_ρ die Anzahl der Spitzen eines Berechnungsgraphen von $\Delta_\rho(u)$.

Beweis. Ist $\rho = \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ eine Darstellung induziert von $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, so ist der Berechnungsgraph $\mathcal{T}_0(n)$ mit einigen indizierten Kanten vom Typ 01, wobei eventuell endlich viele Knoten und die Spitzen, die durch 0 und ∞ parametrisiert werden, gelöscht sind. Wir können also auch in dieser Situation das Lemma 6.1.7 anwenden. \square

Satz 6.2.3. Sei $n \in A$ irreduzibel vom Grad 2. Dann ist

$$Z_{(\mathcal{T}(n), i)}(u)^{-1} = \frac{(1 - u^2)^{g(\mathcal{T}(n)) - 1 + c(\mathcal{T}(n))}}{(1 - qu^2)^{c(\mathcal{T}(n))}} (1 - q^2 u^2) (u^2 + 1)^{q^2} (qu^2 + 1)^{A_q} (1 - qu^2)^{B_q}$$

mit $A_q := \frac{(q-2)(q^2+1)}{2}$, $B_q := \frac{q(q^2+1)}{2}$, der Anzahl $c(\mathcal{T}(n)) = \frac{\phi(n)\varepsilon(n)}{q-1}$ der Spitzen von $\mathcal{T}(n)$ und dem Geschlecht $g(\mathcal{T}(n)) = (q^2 + 1)(q^2 - q - 1) + 1$.

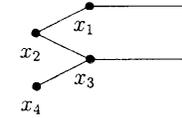
Beweis. Wir benutzen dazu wieder die Zerlegung der Zetafunktion in die Faktoren $L(\mathcal{T}, \Gamma, \rho; u)^{\deg(\rho)}$, wobei ρ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $G(n) = \Gamma/\Gamma(n)$ ist, die auf Γ geliftet wird.

Nach Satz 5.4.1 und Proposition 6.2.1 ist

$$L(\mathcal{T}, \Gamma, \rho_\nu; u) = L(X^1, \Theta^1, \rho_\nu; u) = 1$$

für eine supercuspidale Darstellung ρ_ν von $G(n)$. Wir können uns also auf die Berechnung der L -Funktionen, die zu Darstellungen der Hauptserie gehören, beschränken.

Sei μ ein Charakter der Diagonalgruppe $D(\mathbb{F}_q)$. Die Berechnungsgraphen der Operatoren der entsprechenden L -Funktionen waren nach Satz 5.2.5 endliche Teilgraphen des Hecke-Graphen $\mathcal{T}_0(n)$:



Nach Proposition 5.2.3 sind die Matrizen von $\Delta_{\rho_\mu}(u)$, wenn der Typ gegen unendlich geht, genau von der Form wie in Lemma 6.1.7 benötigt. Die Determinante berechnet sich also im Grenzwert über die Determinante von $\Delta_{\rho_\mu}^*(u)$ und die Ausgleichsfaktoren der Spitzen. Die Matrix des Operators $\Delta_{\rho_\mu}(u)$ unterscheidet sich von der Matrix von $\Delta_{\rho_\mu}^*(u)$ nur in den Diagonaleinträgen. Genauer werden die Einträge $1 + (q - 1)u^2$ an den Knoten x_1 und x_3 durch die Einträge 1 ersetzt. Dadurch ergibt sich folgende Tabelle:

μ	$\det(\Delta_\mu^*(u))$
$(1, 1)$	$(u^2 + 1)(1 - q^2 u^2)$
$\mu_2 \neq 1, \mu _{C(\mathbb{F}_q)} = 1$	$qu^2 + 1$
$\mu_2 \neq 1, \mu _{D(\mathbb{F}_q)} = 1$	$1 - qu^2$

Die triviale Darstellung liefert den Faktor $1 - q^2 u^2$ (siehe Beispiel 6.1.9). Wegen $\rho_{(1,1)} = 1 \oplus \rho_{(1)}$ ergibt dies den Faktor $u^2 + 1$ mit der Vielfachheit $q^2 = \deg \rho_{(1)}$.

Die restlichen Faktoren kann man direkt aus der Tabelle ablesen, die Vielfachheiten A_q und B_q werden berechnet wie in Satz 5.4.1.

Der Spitzenfaktor $\frac{(1-u^2)}{(1-qu^2)}$ tritt mit der Vielfachheit

$$1 + q^2 + 2B_q = 1 + q^2 + q(q^2 + 1) = (q + 1)(q^2 + 1) = \frac{\phi(n)\varepsilon(n)}{q - 1} = c(\mathcal{T}(n))$$

auf, vgl. Abschnitt 4.1. Der Ausgleichsfaktor $(1 - u^2)^{q-1}$ vererbt sich von der Zetafunktion der endlichen Teilgraphen. \square

Beispiel 6.2.4. Wir greifen das Beispiel $n = T^3 + T + 1, q = 2$ aus Kapitel 5 auf. Statt $\det(\Delta_\rho(u))$ haben wir $\det(\Delta_\rho^*(u))$ zu berechnen. Zuerst berechnen wir wieder die Faktoren der Hauptserie.

Für die drei inäquivalenten Darstellungen ρ_μ mit $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ und $\mu_2 \neq 1$ ergibt sich der Faktor

$$-64u^{18} - 32u^{16} + 8u^{12} + 16u^{10} + 4u^8 + u^6 - 3u^4 - 2u^2 + 1,$$

der mit der Vielfachheit $\deg(\rho_{(\mu_1, \mu_2)}) = 9$ auftritt. Weiterhin gilt

$$\det \Delta_{(1,1)}^*(u) = -4u^6 - 3u^4 - 3u^2 + 1 = (1 - 4u^2)(u^4 + u^2 + 1).$$

Da

$$\det \Delta_1^*(u) = 1 - q^2 u^2 = 1 - 4u^2$$

ist, erhalten wir als Faktoren der Zetafunktion damit

$$(1 - 4u^2)(u^4 + u^2 + 1)^8.$$

Der supercuspidale Beitrag ist nach Proposition 6.2.1 derselbe wie für $X(n)$. Insgesamt ergibt sich damit

$$\begin{aligned} Z_{(\Gamma(n) \backslash \mathcal{T}, i)}(u)^{-1} &= \frac{(1 - u^2)^{168}}{(1 - 2u^2)^{63}} (1 - 4u^2)(u^4 + u^2 + 1)^8 \\ &\quad \times (-64u^{18} - 32u^{16} + 8u^{12} + 16u^{10} + 4u^8 + u^6 - 3u^4 - 2u^2 + 1)^9 \\ &\quad \times (1 + 2u^2)^7 (64u^{12} + 96u^{10} + 84u^8 + 49u^6 + 21u^4 + 6u^2 + 1)^7, \end{aligned}$$

da das Geschlecht $g(\mathcal{T}(n)) = 106$ und die Anzahl der Spitzen $c(\mathcal{T}(n)) = 63$ ist.

6.3 Beschluß

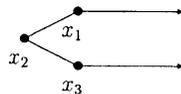
Die Zetafunktion der vollen Graphen $(\mathcal{T}(n), i)$ scheint nach dem Beispiel im letzten Abschnitt von einfacherer Gestalt zu sein als die Zetafunktion (der ungewichteten Graphen) $X(n)$. Die Beiträge der supercuspidalen Darstellungen sind zwar dieselben, aber die Beiträge der Hauptserie vereinfachen sich stark. Da diese Faktoren in sehr engem Zusammenhang mit den Hecke-Graphen $\mathcal{T}_0(n) = \Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T}$ stehen, wollen wir dazu noch die Zetafunktion von $\mathcal{T}_0(T^m)$ für kleine m bestimmen.

Beispiel 6.3.1. Die projektive Gerade $\mathbb{P}^1(A/n)$ ist für primäre Polynome $n = p^r$ von der Form $\mathbb{P}^1(A/n) = \bigcup_{0 \leq h \leq r} \mathbb{P}^1(A/n)(h)$ mit

$$\mathbb{P}^1(A/n)(h) = \{(u : p^h) \mid u \bmod p^{r-h}, (u, p) = 1 \text{ falls } 1 \leq h \leq r-1\}$$

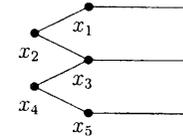
(wir verlangen $u = 1$ für $h = r$). Analog zum primen Fall lassen sich die Vertreter der Operation der Γ_i auf $\mathbb{P}^1(A/n)$ bestimmen, siehe [GN].

Die Gestalt von $\mathcal{T}_0(T)$ ist



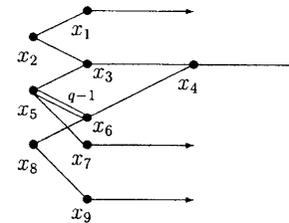
Die Kanten (x_1, x_2) , (x_2, x_3) und (x_3, x_2) sind mit q gewichtet, die Kante (x_2, x_1) mit 1.

$\mathcal{T}_0(T^2)$ ist von der Gestalt



Hier sind die Kanten (x_1, x_2) , (x_2, x_3) und (x_5, x_4) mit q , die Kante (x_3, x_4) mit $q - 1$ und die restlichen Kanten mit 1 gewichtet.

$\mathcal{T}_0(T^3)$ ist von der Gestalt



Die Kanten (x_1, x_2) , (x_2, x_3) , (x_7, x_5) , (x_8, x_6) und (x_9, x_8) mit q , die Kanten (x_4, x_6) (x_3, x_5) mit $q - 1$ und die restlichen mit 1 gewichtet. Zwischen x_5 und x_6 verlaufen $q - 1$ Kanten. Zur Berechnung der Zetafunktion kann man die Knoten x_1, x_2, x_7, x_8 und x_9 weglassen, da sie schon auf den Spitzen liegen. Sie sind hier nur der Übersicht halber aufgeführt.

Daraus ergeben sich die Zetafunktionen

$$Z_{(\mathcal{T}_0(T^m), i)}(u)^{-1} = \frac{(1 - u^2)^{g-1+c}}{(1 - qu^2)^c} (1 - q^2 u^2),$$

wobei das Geschlecht $g = g(\mathcal{T}_0(T^m))$ und die Anzahl der Spitzen $c = c(\mathcal{T}_0(T^m))$ in der folgenden Tabelle aufgeführt wird:

	T	T^2	T^3
$c = c(\mathcal{T}_0(T^m))$	2	3	4
$g = g(\mathcal{T}_0(T^m))$	0	0	$q - 1$

Der einzige nichttriviale Faktor $1 - q^2 u^2$ kommt in allen Funktionen mit der Vielfachheit 1 vor.

Für $m \geq 4$ ist die Gestalt von $\mathcal{T}_0(T^m)$ nicht mehr uniform. Für $q = 2$ haben wir $\mathcal{T}_0(T^4)$ mit den Kantengewichten berechnet. Das Geschlecht ist $g = q^2 - 1 = 3$, die Anzahl der Spitzen ist $c = q + 4 = 6$. Insgesamt erhält man analog zu den Hecke-Graphen mit kleinerem Führer:

$$Z_{(\mathcal{T}_0(T^4), i)}(u)^{-1} = \frac{(1 - u^2)^{g-1+c}}{(1 - 2u^2)^c} (1 - 4u^2).$$

Wir vermuten aus diesen Beispielen, daß allgemein

$$Z_{(\mathcal{T}_0(T^m), i)}(u)^{-1} = \frac{(1 - u^2)^{g-1+c}}{(1 - qu^2)^c} (1 - q^2u^2)$$

gilt. Weiterhin wäre zu untersuchen, ob dieses Phänomen von der besonderen Form des Polynoms $n = T^m$ abhängt oder auch für andere primäre Polynome gilt.

In Abschnitt 3.3 hatten wir gewichtete Graphen eingeführt, indem jeder Kante e des Quotienten $G \setminus X$ der Index

$$i(e) := [G_{\partial_0(p_E^{-1}(e))} : G_{p_E^{-1}(e)}]$$

zugeordnet wurde. Hierbei operiert G diskret und p_E ist eine Einschränkung der Projektion $p : X \rightarrow G \setminus X$ auf einen zusammenhängenden Untergraphen von X , die auf Kanten bijektiv ist. Dieser Index ist ein *relatives* Gewicht.

Sei $v \in V(G \setminus X)$, $\tilde{v} \in VX$ ein Knoten, der über v liegt und $\gamma \in G$ gegeben mit $\gamma v = \tilde{v}$. Dann wird v durch

$$w(v) := (\#\tilde{\Gamma}_{\tilde{v}})^{-1}$$

ein *absolutes* Gewicht zugeordnet, das nicht von der Wahl von \tilde{v} abhängt, da entsprechende Stabilisatoren konjugiert sind. Analog ist das *absolute* Gewicht

$$w(e) := (\#\tilde{\Gamma}_{p_E^{-1}(e)})^{-1}$$

einer Kante e definiert. Der Index $i(e)$ ergibt sich aus den absoluten Gewichten durch

$$i(e) = w(e)/w(\partial_0(e)).$$

Die Operatoren A , T , Q , \deg (und damit die Regularität des Graphen) hängen nur von den Indizes $i(e)$ ab, weswegen wir in Abschnitt 3.3 nicht auf die absoluten Gewichte eingegangen sind. Hier benötigen wir sie für die Definition eines Skalarprodukts.

Der Begriff des Ramanujan-Graphen läßt sich auf gewichtete unendliche Graphen übertragen, die zumindest noch ein endliches Maß besitzen, wie von Morgenstern

in [Mo2] untersucht. Wir beschreiben kurz die Übertragung auf den Spezialfall der Graphen $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$.

Wir setzen

$$\langle f, g \rangle := \sum_{v \in V(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})} f(v) \overline{g(v)} w(v)$$

für zwei komplexwertige Funktionen f, g auf $V(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$. Durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird auf dem Raum

$$L^2(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}) := \{f : V(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C} \mid \langle f, f \rangle < \infty\}$$

ein Skalarprodukt definiert. Die konstante Funktion 1_V ist ein Eigenvektor des (gewöhnlichen) gewichteten Laplace-Operators Δ auf $L^2(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T})$. Da Δ hermitesch ist, läßt sich Δ auf das orthogonale Komplement

$$L_2^0(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}) := \{f \in L_2(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}) \mid \langle f, 1 \rangle = 0\}$$

beschränken. Wir setzen

$$\lambda_\Delta(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}) := \inf \text{Spec}(\Delta|_{L_2^0}).$$

Allgemein gilt für $q + 1$ -reguläre, gewichtete unendliche Graphen

$$\lambda_D \leq q + 1 - 2\sqrt{q},$$

anders als im endlichen Fall kann $\lambda_D > q + 1 - 2\sqrt{q}$ für einzelne Graphen nicht vorkommen⁴ (loc. cit., Th. 2.8). Der Graph $\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}$ heißt *Ramanujansch*, falls

$$\lambda_\Delta(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}) = q + 1 - 2\sqrt{q}$$

ist. Morgenstern ([Mo1, Th. 2.1]) beweist, daß die (gewichteten) Graphen $\mathcal{T}(n)$ Ramanujansch sind für alle nichtkonstanten Polynome $n \in A$.

Wegen der Rationalität der Zetafunktionen der Graphen $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$ kann man wie im endlichen Fall durch

$$\zeta_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(s) := Z_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(q^{-s})$$

eine meromorphe Funktion $\zeta_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(s)$ in $s \in \mathbb{C}$ definieren.

Definition 6.3.2. Der (gewichtete) Graph $(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)$ erfüllt die Riemannsche Vermutung, wenn alle Polstellen von $\zeta_{(\tilde{\Gamma} \setminus \mathcal{T}, i)}(s)$ im kritischen Streifen auf der Geraden $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen.

Es läßt sich nun leicht nachrechnen, daß alle Kongruenzgraphen $\mathcal{T}_0(n)$, bzw. $\mathcal{T}(n)$, deren Zetafunktion wir in diesem Kapitel berechnet haben, der Riemannschen Vermutung genügen. Es liegt nahe, wie im Fall endlicher regulärer Graphen zu vermuten, daß die beiden Definitionen äquivalent sind.

⁴Man beachte, daß wir anders als im endlichen Fall das Spektrum des Laplace-Operators anstatt des Nachbarschaftsoperators betrachten. Dadurch kehren sich die Ungleichungen um.

Index

Adjazenzmatrix, 19
Anfangsknoten eines Weges, 13
äquivariante Funktionen, 42
arithmetischer Graph, 56
Aufkante eines Weges, 14

Baum, 14
benachbarte Knoten, 11
Berechnungsgraph, 73
bipartit, 12
Bruhat-Tits-Baum, 55

Charakter einer Gruppe, 65

Drehung, 14

Enden, 13
Endkante eines Weges, 14
Endknoten eines Weges, 13
erzeugende Funktion, 28
Eulerfaktor, 32
Expansion, 21

Fundamentalebene, 27
Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen, 39

galoissche Überlagerung, 26
geometrische Kante, 11
gerichteter Kantengraph, 16
Geschlecht eines Graphen, 13
geschlossener Weg, 14
Grad eines Knotens, 11
Graph, 11

Höhe eines Polynoms, 76
Halbgerade, 13
Hauptkongruenzgraph zur Stufe n , 58
Hauptkongruenzuntergruppe, 58
Hauptserie, 65
Hecke-Graph, 64
Hecke-Kongruenzuntergruppe, 64

induzierter Untergraph, 11
Inversion von Kanten, 11
inversionsfrei, 25
isospektral, 20

 k -regulärer gewichteter Graph, 44
Kante, 11
Kantengraph, 16
Knoten, 11
kombinatorischer Graph, 14
Komplexität, 34
Konzentrator, 91

 L -Funktion, 48
Laplace-Operator (allgemeiner und gewöhnlicher), 18
Laplace-Spektrum, 21

Morphismus von Graphen, 12

Nachbarmenge, 21
Nachbarschaftsmatrix, 19
Nachbarschaftsoperator, 17
Nachbarschaftsoperator auf orientierten Kanten, 19

Operation einer Gruppe auf einem Graphen, 25
Operator auf einem Graphen, 17
orientierter Graph, 12
Orientierung, 12

primitiver Weg oder Zykel, 14

Quotientengraph, 25

Ramanujan-Graph, 22
Randabbildung, 11
Randknoten, 11
reduzierte Wege in Graphen von Gruppen, 39
reduzierter Weg, 14
reduzierter Zykel, 15

regulärer Graph, 11
Riemannsche Vermutung, 36

 S -normalisiert, S^* -normalisiert, 39
Schleife, 14
Spektrum eines Graphen, 20
Spitze, 61
stark reduzierte Wege in Graphen von Gruppen, 39
stark reduzierter Weg, 15
supercuspidale Darstellungen, 65

Taille eines Graphen, 16
Typ eines Knoten oder einer Kante, 57

Überlagerung, 25
Untergraph, 11
unverzweigte Überlagerung, 25
unzerlegbarer Charakter, 66

Weg, 13
Wege in Graphen von Gruppen, 38
Wegegruppe, 38

Zetafunktion eines gewichteten Graphen, 49
Zetafunktion eines Graphen, 32
zusammenhängend, 13
Zusammenhangskomponente, 13
Zykel, 14

Symbolverzeichnis

$EX, VX, \partial_0, \partial_1, \bar{}$	11
deg	11
stern(v)	11
E^+X	12
$Aut(X), Aut(X^+)$	12
Pfad $_1$, Pfad $_\infty$	12
$g(Y) = \dim H_1(Y, \mathbb{C})$	13
$\mathcal{P}(v, w), \mathcal{R}(v, w), \mathcal{G}(X), \mathcal{G}^+(X), \mathcal{RG}(X), \mathcal{SG}(X), \mathcal{Z}(X), \mathcal{RZ}(X)$	15
$t(X)$	15
X_K, X_K^+	16
$C_0(X), C_1(X)$	17
σ_0, σ_1, J, Q	17
$\Delta(u), \Delta$	18
$T = T_X$	19
Spec(Y)	20
$N(S)$	21
$\mathbb{C}[[u]], \mathbb{C}[[\mathbf{u}]], \exp(u), \log(u)$	23
$X \xrightarrow{\mathcal{G}} Y$	26
$\Gamma(v, w; u), \Gamma'(v, w; u)$	28
$A_{\mathbf{u}}$	30
$\Gamma''(e_1, e_2; u)$	31
$T_{\mathbf{u}}$	31
$Z_Y(u), Z_Y(\mathbf{u})$	32
$\mathbb{Y}, (\mathcal{C}, \mathcal{Y}), \mathcal{Y}_e, \mathcal{Y}_v$	38
$F(\mathbb{Y}), (c, \mu), c, \mu $	38
$\pi(\mathbb{Y}, v_0)$	39
$\mathcal{C}_{red}(\mathbb{Y}), \mathcal{C}_{redn}(\mathbb{Y}), \mathcal{C}_{redn^*}(\mathbb{Y})$	39
$G \setminus X$	40
$F[v, w], [\gamma]_v$	40
$H_{\rho,0}(X), H_{\rho}(VX), H_{\rho,1}(X), H_{\rho}(EX)$	42
$A_{\rho}, Q_{\rho}, \Delta_{\rho}(u), T_{\rho}$	42
$i(e), A_{(Y,i)}, T_{(Y,i)}, \deg_{(Y,i)}, Q_{(Y,i)}$	43
$\mathcal{R}_j^l(X, G), \mathcal{R}^l(X, G), j(W), [c, \mu]_v, \mathcal{C}_{redn}^l(G \setminus X, e_j), \langle d, \tau \rangle$	45
$L(X, G, \rho; \mathbf{u}), Z_{(Y,i)}(\mathbf{u}), L(X, G, \rho; u), Z_{(Y,i)}(u)$	48

$\mathbb{F}_q, A = \mathbb{F}_q[T], \mathcal{T}$	55
$\Gamma = GL_2(A), \Gamma_1, \Gamma_{01}$	56
$\Gamma(n), \mathcal{T}(n), \phi(n), \varepsilon(n), \psi(n), G(n)$	58
$X^k, X^k(n), \Theta, \Theta(n)$	61
$\Gamma_0(n), X_0(n), X_0^k(n), \Theta_0(n)$	64
$B(K), U(K), D(K), Z(K)$	65
$V_{\mu} = V_{\rho_{\mu}}, (\mu_1, \mu_2), \rho_{(\mu_1, \mu_2)}, \rho_{(\mu_1)}$	65
$L, V_{\nu} = V_{\rho_{\nu}}, \psi, w, j(x), \rho_{\nu}$	66
$L^{(q)}, L^{(1)}$	67
$\varepsilon, \tau, \lambda$	69
Y_{ρ}	73
$\mu_3(x)$	75
$[x]_i^{\mu}$	76
$R_i, R_0', \delta(\chi, H)$	76
$h_{x,\mu}^i$	78
$[x]_i^{\nu}, h_{x,\nu}^i$	85
$Y^{[i]}, A^{[i]}$	90
$\lambda_i(n)$	92
$Q^*(v), \Delta^*(u)$	98
$c(Y)$	98

Literatur

- [Al] N. Alon, Eigenvalues and expanders, *Combinatorica* **6** (1986), 83-96.
- [Ba1] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice. *Int. J. Math.* **3** (1992), 717 – 797.
- [Ba2] H. Bass, Covering theory for graphs of groups. *J. Pure Appl. Alg.* **89** (1993), 3 – 47 .
- [Bi] N. Biggs, „Algebraic graph theory”, second edition, Cambridge University Press, 1993.
- [Ch] F.R.K. Chung, „Spectral graph theory”, CBMS No. 92, AMS, Providence.
- [CDS] D. Cvetcovic, M. Doob und H. Sachs, Spectra of graphs, Academic Press London, 1980.
- [GN] E.-U. Gekeler and U. Nonnengardt, Fundamental domains of some arithmetic groups over function fields, *Int. J. Math.* **6** (1995), 689 – 708.
- [GR] E.-U. Gekeler and M. Reversat, Jacobians of Drinfeld modular curves, *J. reine angew. Math.* **476** (1996), 27 – 93.
- [Go] D. Gorenstein, „Finite Groups”, second edition, Chelsea Publishing Company, New York 1980.
- [H1] K. Hashimoto, Zeta functions of finite graphs and representations of p -adic groups, *Adv. Stud. Pure Math.* **15** (1989), 211 – 280.
- [H2] K. Hashimoto, On zeta and L -functions of finite graphs, *Int. J. Math.* **1** (1990), 381 – 396.
- [H3] K. Hashimoto, Artin type L -functions and the density theorem for prime cycles on finite graphs, *Int. J. Math.* **3** (1992), 809 – 826.
- [Ih] Y. Ihara, On discrete subgroups of p -adic projective linear groups of degree two, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 219 – 235.
- [Ka] P. W. Kasteleyn, *Graph theory and crystal physics*, in: F. Harary (ed.), „Graph Theory and Theoretical Physics”, Academic Press, London, 1967.
- [Lu] A. Lubotzky, „Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures”, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.
- [LPS] A. Lubotzky, R. Philips and P. Sarnak, Ramanujan Graphs, *Combinatorica* **8** (1988), 261-277.
- [Mo1] M. Morgenstern, Natural bounded concentrators, *Combinatorica* **15** (1995), 111 – 122.
- [Mo2] M. Morgenstern, Ramanujan Diagrams, *SIAM J. Discrete Math* **7** (1994), 560 – 570.
- [Mo3] M. Morgenstern, Existence and explicit construction of $q + 1$ -regular Ramanujan graphs for every prime power q , *J. Combin. Th., Series B* **62** (1994), 44 – 62.
- [No] S. Northshield, Several proofs of Ihara’s theorem, Manuskript, University of Minnesota.
- [PS] I. I. Piatetski-Shapiro, “Complex representations of $GL(2, K)$ for finite fields K ”, Nr. 16 in Contemporary Mathematics, AMS 1983.
- [Ru] I. Rust, Arithmetically defined representations of groups of type $SL(2, \mathbb{F}_q)$, *Finite Fields Appl.* **4** (1998), 283 – 306.
- [Sch] O. Scheja, On zeta functions of arithmetically defined graphs, erscheint in *Finite Fields Appl.*
- [Se] J.-P. Serre, „Trees”, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [Sh] G. Shimura, „Arithmetic theory of automorphic functions”, Princeton University Press, 1971.
- [ST] R. Stark and A. Terras, Zeta functions of finite graphs and coverings, *Adv. Math.* **121** (1996), 124-165.
- [Su] Sunada, Fundamental groups and Laplacians, in: Lecture Notes in Mathematics 1339, Springer Verlag 1987, 248 – 277.
- [Ta] R. M. Tanner, Explicit concentrators from generalized n -gons, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **5** (1984), 287 – 293.
- [Ti] U. Tipp, Green functions for Drinfeld modular curves, Manuskript, Universität des Saarlandes.