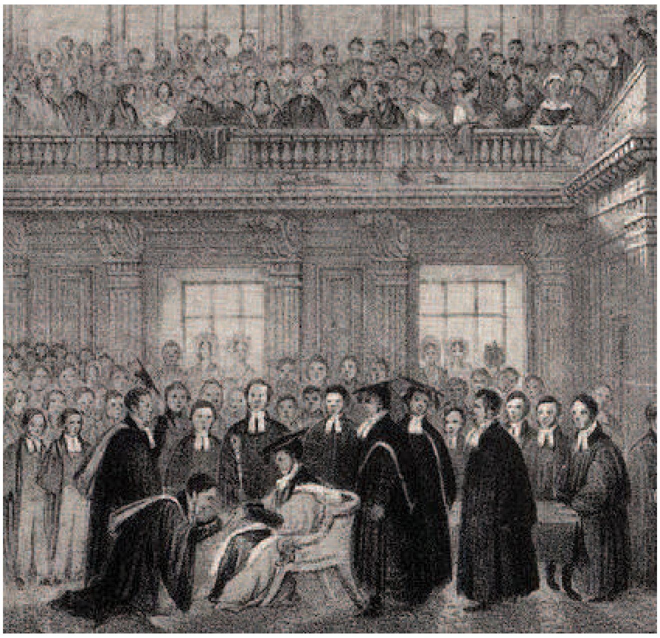
Sir George Stokes

1819-1903


Skreen
(1819)-(1832)
Dublin
(1832)-(1835)
Cambridge
(1837)-(1903)
Bristol
(1835)-(1837)

LAUFBAHN

- Senior Wrangler 1841



Einführung des Senior Wrangler 1842

Cuthbert Holthouse,
der letzte Holzlöffel 1909

LAUFBAHN

- Lucasischer Professor 1849

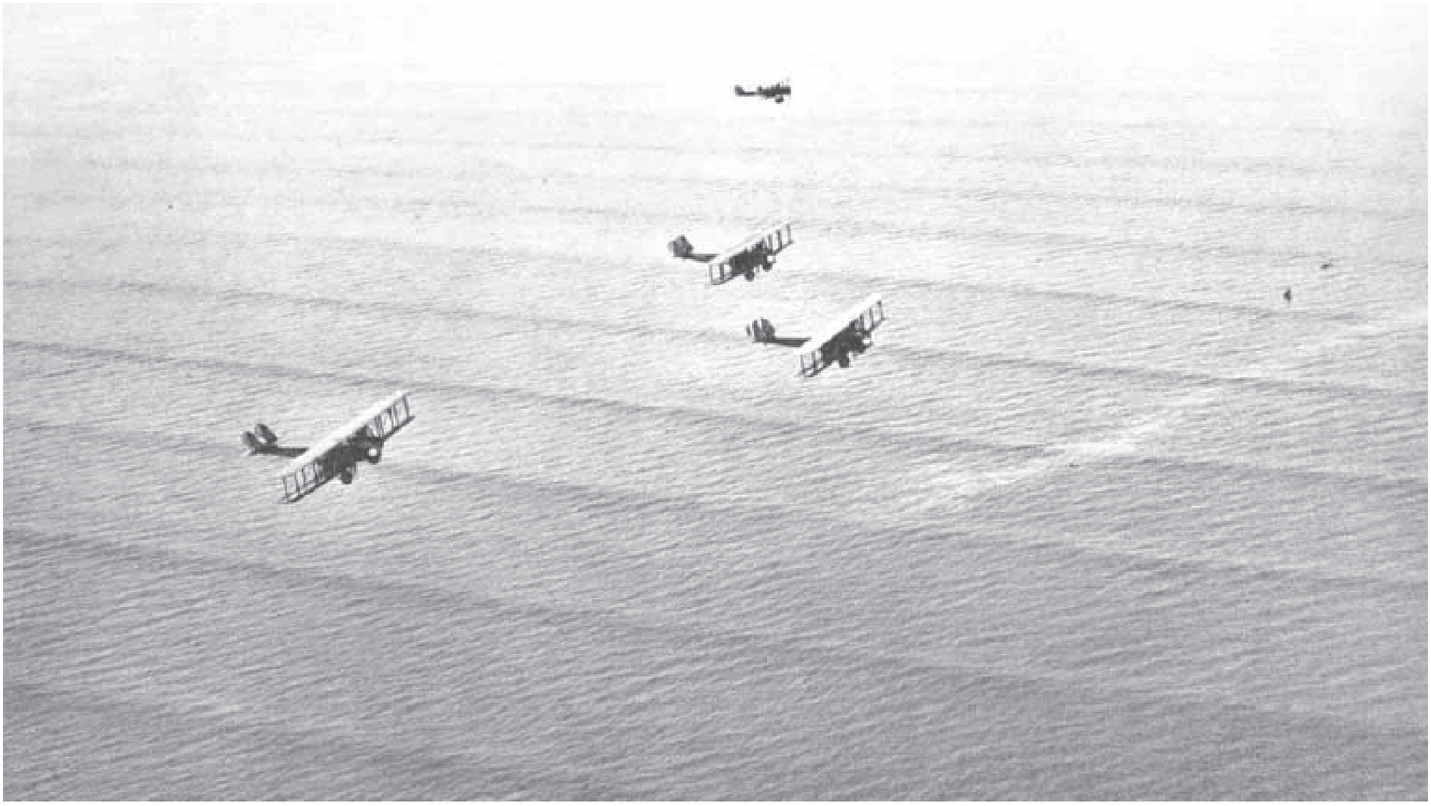
Sir Isaac Newton (1669)

Charles Babbage (1828)

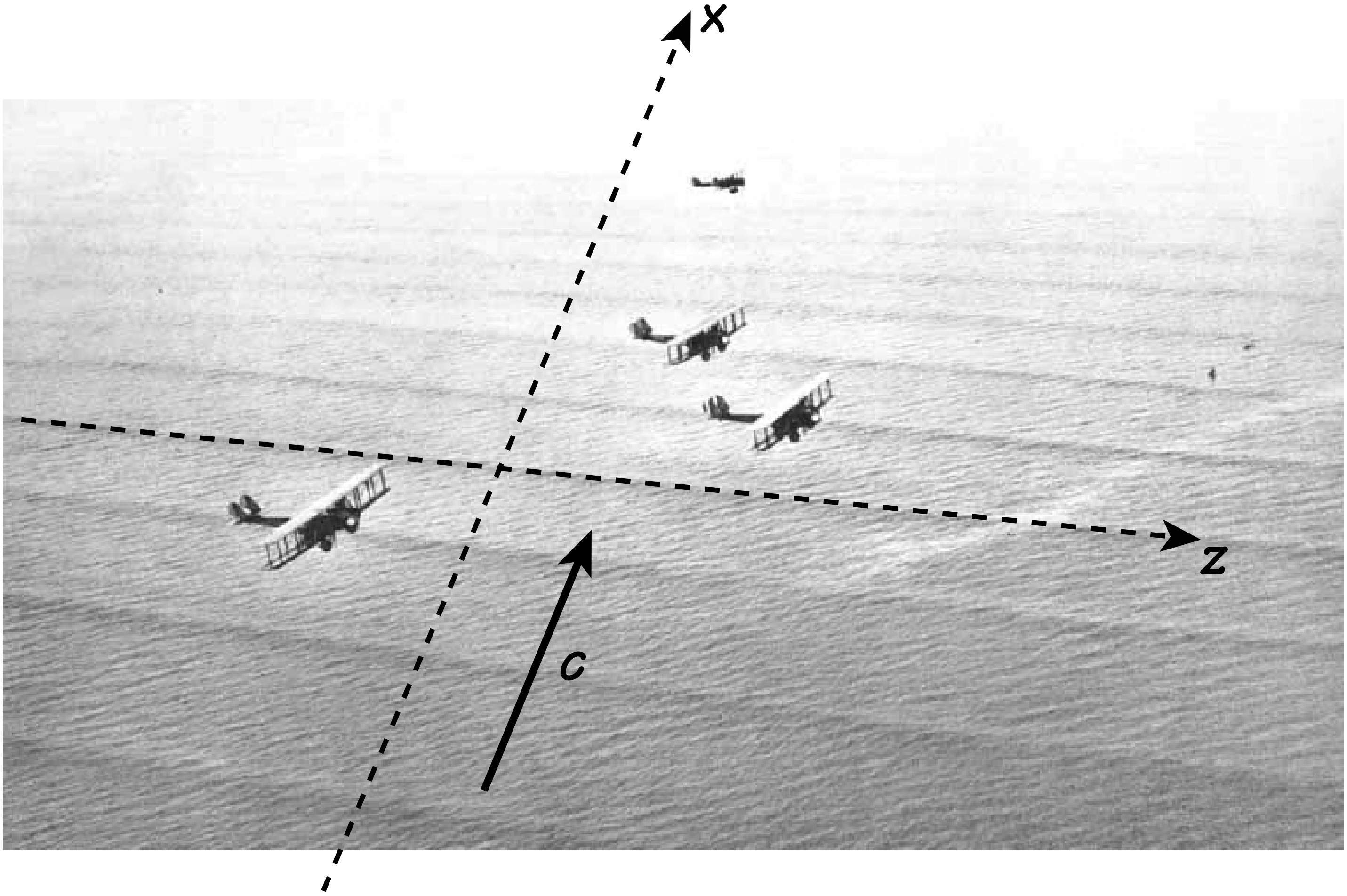
Paul Dirac (1932)

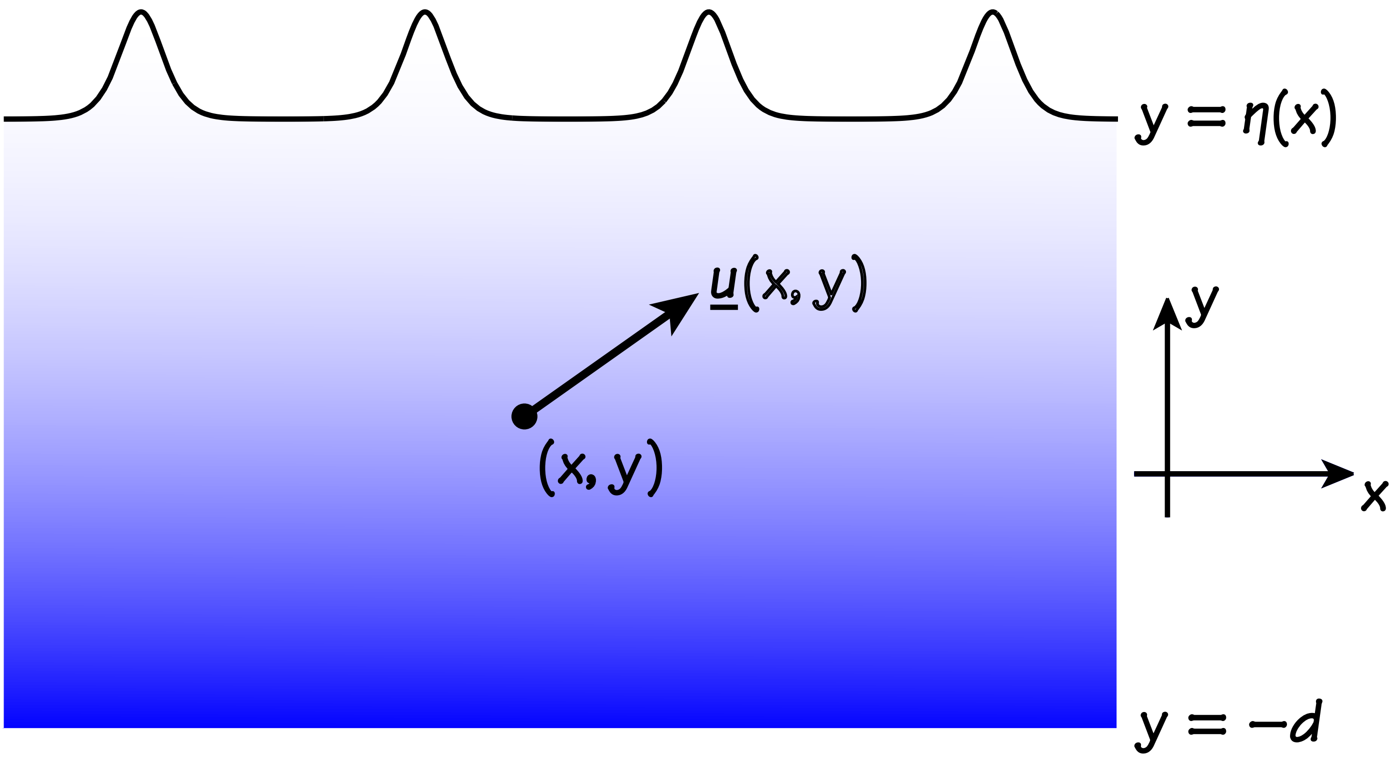
Stephen Hawking (1979)

- Fellow, Royal Society von London 1851
- Baronet 1889



STOKES-WELLEN

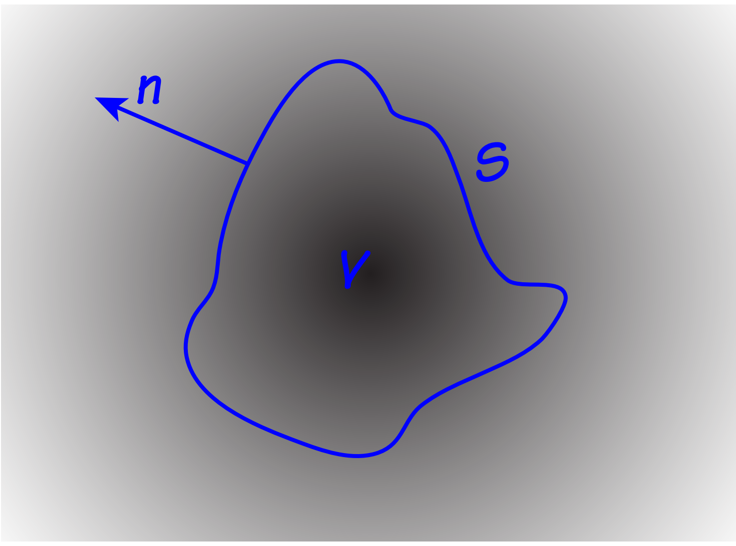




MODELLIERUNG

Inkompressibilität: Die Flüssigkeit zeigt keine Volumenänderung unter Druckwirkung auf

- Betrachte ein festes Volumen V im Strömungsgebiet:



$$\int_S u.n\, dS = 0$$

- Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt

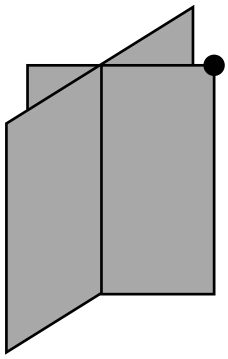
$$\int_S \mathrm{div}\, u\, dV = 0$$

- Dies gilt für alle V im Strömungsgebiet

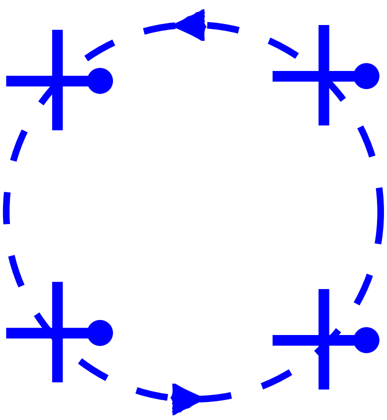
$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\, u = 0$$

MODELLIERUNG

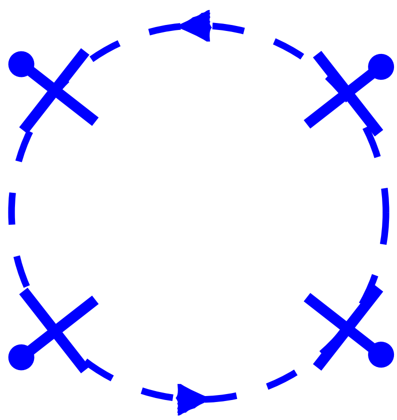
- Die Strömung ist wirbelfrei
- Vortizität (Wirbelstärke): $\underline{\omega} = rot\,\underline{u}$



Vortizitäts-
messer



Eine wirbelfreie
Strömung



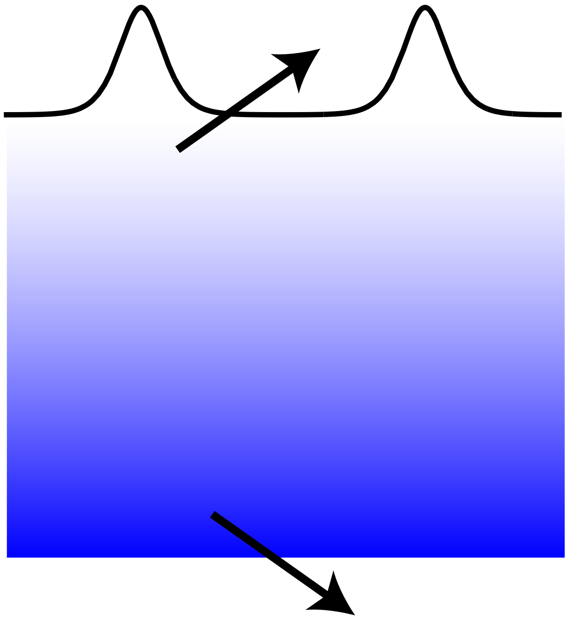
Eine Strömung
mit Vortizität

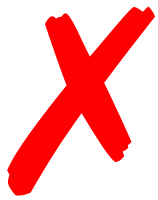
- Aus $div\,u = 0$, $rot\,u = 0$ folgt $u = grad\,\phi$ mit

$$\Delta\phi = 0$$

MODELLIERUNG

Wasser dringt nicht durch die freie Oberfläche und den Meeresboden





- Bedingung am Meeresboden $\{y = -d\}$:

$$\phi_y = 0$$

(*u* hat keine vertikale Komponente)

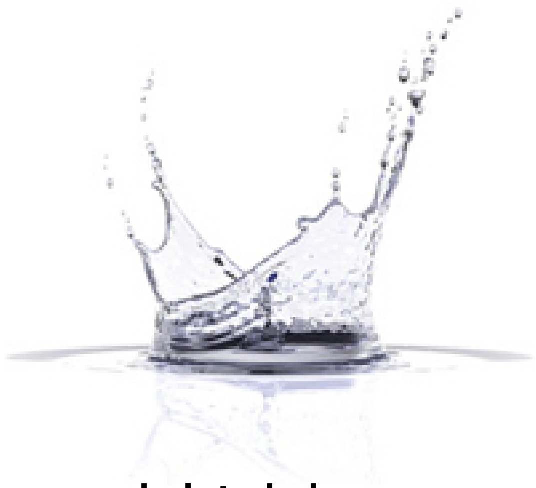
- Bedingung an der freien Oberfläche $S = \{y = \eta(x, t)\}$:

$$\phi_y = \eta_t + \eta_x \phi_x$$

(Die Komponente von u in Richtung n ist die Geschwindigkeit von S in Richtung n)

MODELLIERUNG

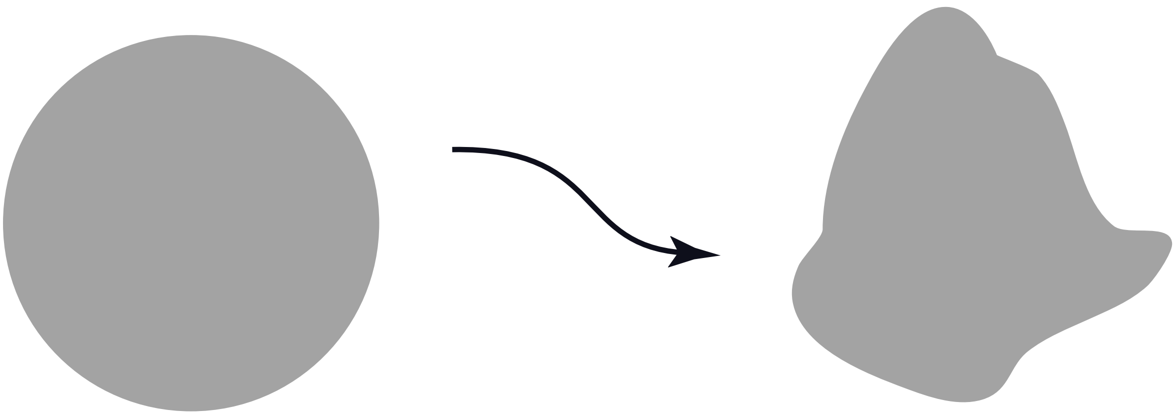
- Homogene, nichtviskose Flüssigkeit



nichtviskose

sehr viskose

- Ausgeglichene Kräfte auf einem Gebiet, das sich mit der Strömung bewegt:



$$\Rightarrow \qquad u_t + \operatorname{grad}(\tfrac{1}{2}|u|^2) = -\operatorname{grad} p - g e_2$$

- $u = \operatorname{grad} \phi$ setzen und aufintegrieren:

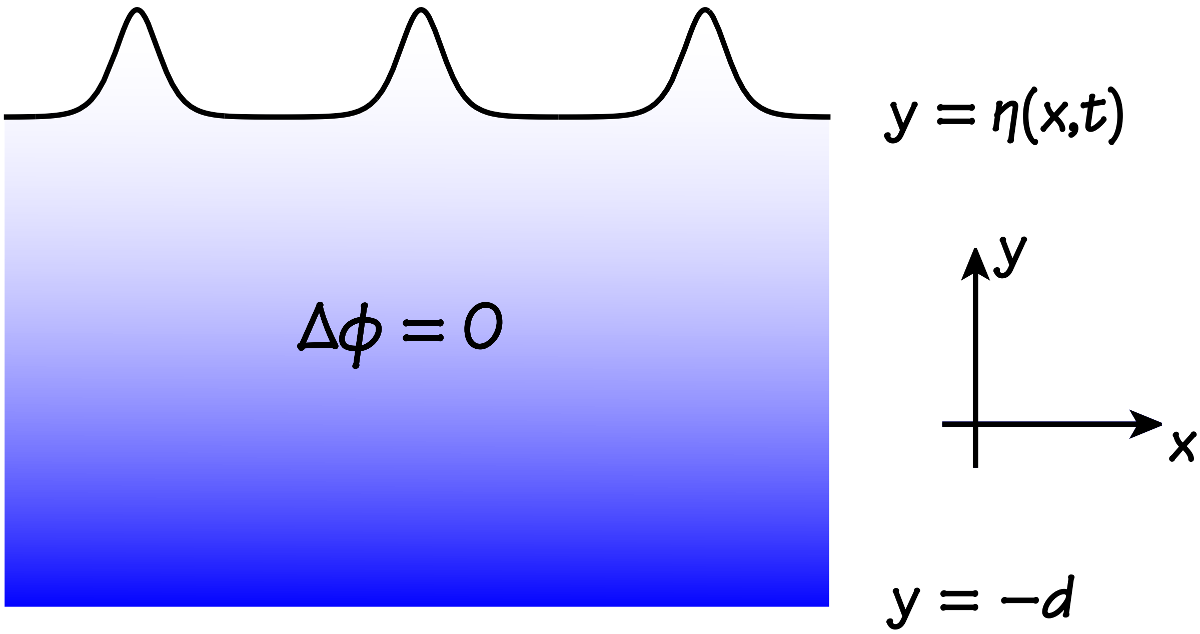
$$\phi_t + \tfrac{1}{2}|\operatorname{grad} \phi|^2 + g y = -p$$

- Interner Wasserdruck im Gleichgewicht mit Luftdruck an der freien Oberfläche:

$$\phi_t + \tfrac{1}{2}|\operatorname{grad} \phi|^2 + g \eta = 0$$

DAS WASSERWELLENPROBLEM

Formulierung von Stokes (1847):



Neumannsche Randbedingung:

$$\phi_y = 0, \qquad y = -d$$

Kinematische Randbedingung:

$$\eta_t = \phi_y - \eta_x \phi_x, \qquad y = \eta$$

Dynamische Randbedingung:

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + g\eta = 0, \qquad y = \eta$$

Schwierigkeiten:

- Problem mit freiem Rand:
- Nichtlineare Randbedingungen

Permanente Wellen

$$\eta(x,t) = \eta(x - ct), \; \phi(x,y,t) = \phi(x - ct, y)$$

Stokes-Wellen:

$$\eta(z + P) = \eta(z), \; \phi(z + P, y) = \phi(z + P, y)$$

DISPERSION

$$\eta_t + \eta_{xxx} = 0$$

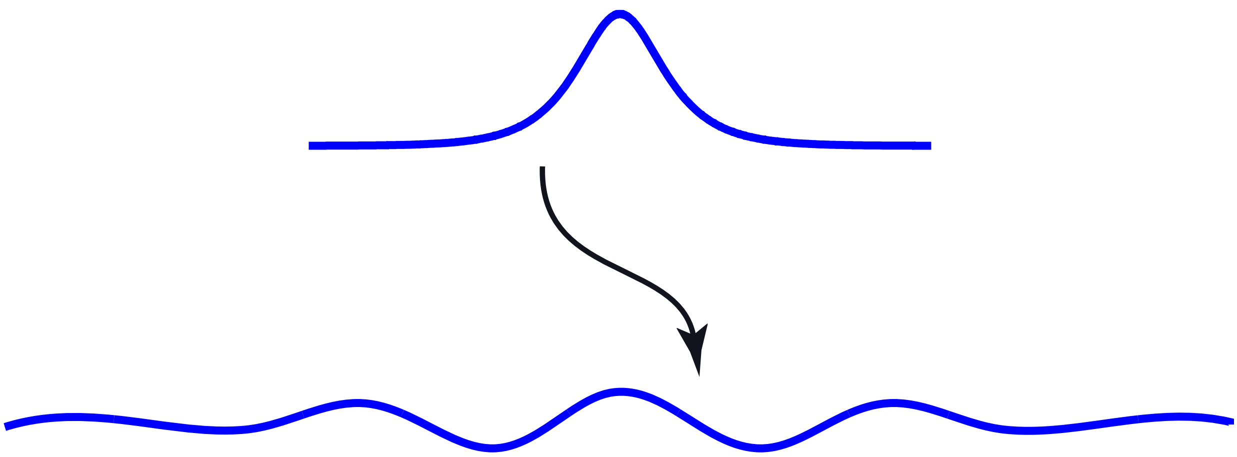
- Permanente Wellen:

$$\eta(x,t) = \left\{ \begin{array}{c} A \sin k(x - ct) \\ B \cos k(x - ct) \end{array} \right\}, \qquad \text{falls } c = -k^2$$

- Allgemeine Lösung:

$$\eta(x,t) = \int_{\mathbb{R}} A_k \sin k(x - c(k)t)\, dk + \int_{\mathbb{R}} B_k \cos k(x - c(k)t)\, dk$$

- Eine koherente Welle löst sich in einzelne Wellenzüge auf, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen



NICHTLINEARITÄT

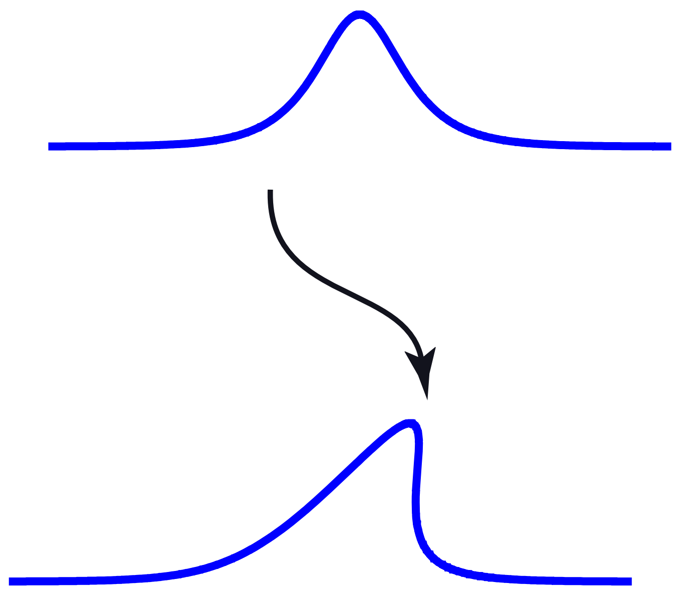
$$\eta_t + 3\eta\eta_x = 0$$

- Allgemeine Lösung:

$$\eta(x,t) = f(x - 3\eta(x,t)t)$$

- Die Teile mit größerer Amplitude bewegen sich schneller

- Die Welle wird steiler und bricht

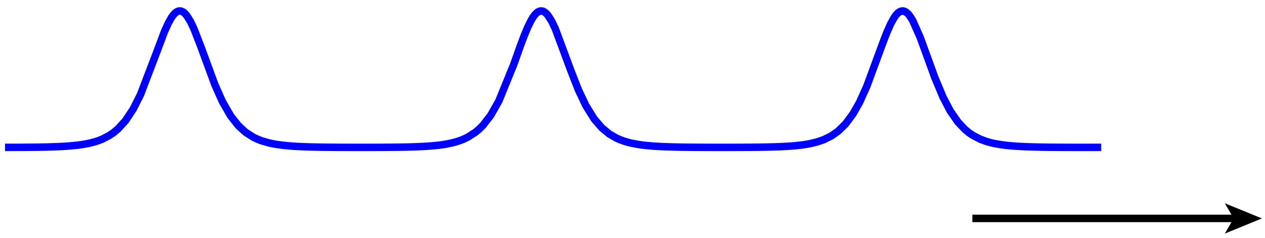


SCHWACHE NICHTLINEARITÄT

$$\eta_x + \eta_{xxx} + 3\eta\eta_x = 0$$

- Eine Familie von Stokes-Wellen

$$\eta(x,t) = -\frac{3}{4}\delta^2 + \delta\cos((1-\frac{15}{8}\delta^2)(x-t)) + \frac{1}{4}\delta^2\cos((1-\frac{15}{8}\delta^2)2(x-t)) + O(\delta^3),$$



- Für Wasserwellen:
  - Lange Wellen (nichtlineare Theorie):

$$a = \frac{A}{h} \ll 1$$

  - Kleine Amplitude (dispersive Theorie):

$$\beta = \frac{h^2}{\ell^2} \ll 1$$

  - Dispersion und Nichtlinearität in Gleichgewicht: Stokes-Zahl

$$S = \frac{a}{\beta} \sim 1$$

DIE STOKES-EXTREMWELLEN

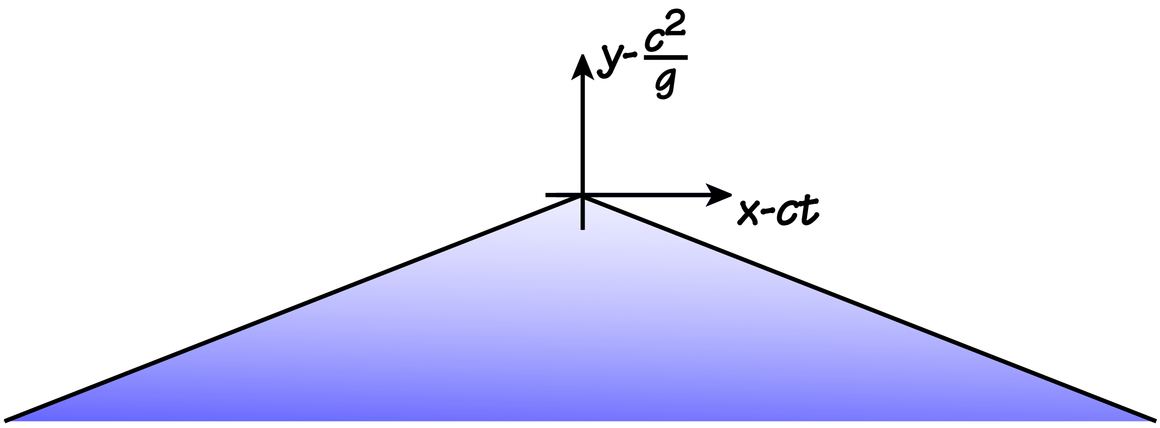
- Die Wasserwellen-Gleichungen haben die explizite Lösung

$$\eta = \frac{c^2}{g} + r\cos(-\tfrac{\pi}{2} \pm \tfrac{\pi}{3}),$$

$$\phi = -\tfrac{2}{3}\sqrt{g}r^{3/2}\cos\tfrac{3}{2}\theta + c(x-ct),$$

wobei

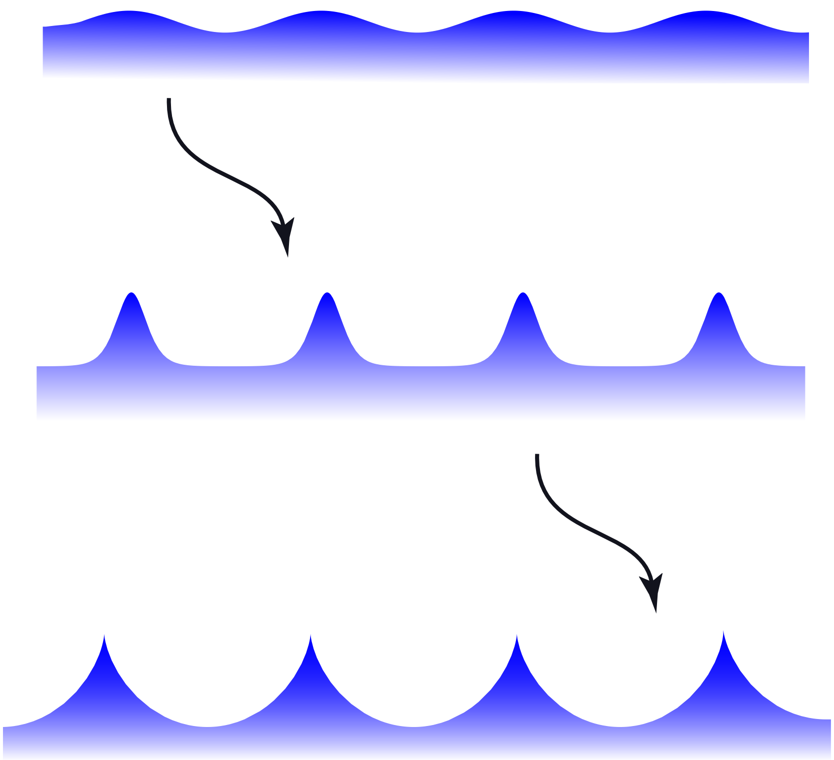
$$x - ct = r\cos\theta, \qquad y = \frac{c^2}{g} + r\sin\theta:$$



- Stokes-Vermutungen: Die Existenz einer Extremwelle
  - Staupunkt und $2\pi/3$-Winkel am Berg
  - Konvex zwischen Berg und Tal

STOKES-WELLEN

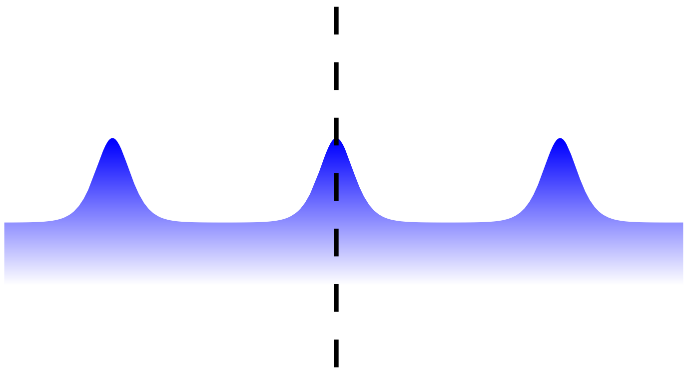
- J. Norbury und G. Keady (1978):



- Die Stokes-Vermutungen über Extremwellen:
  - Staupunkt und $2\pi/3$-Winkel
    (C. Amick, L. E. Fraenkel und
    J. F. Toland 1982)
  - Konvexität der Welle zwischen Berg
    und Tal
    (P. I. Plotnikov und J. F. Toland, 2004)

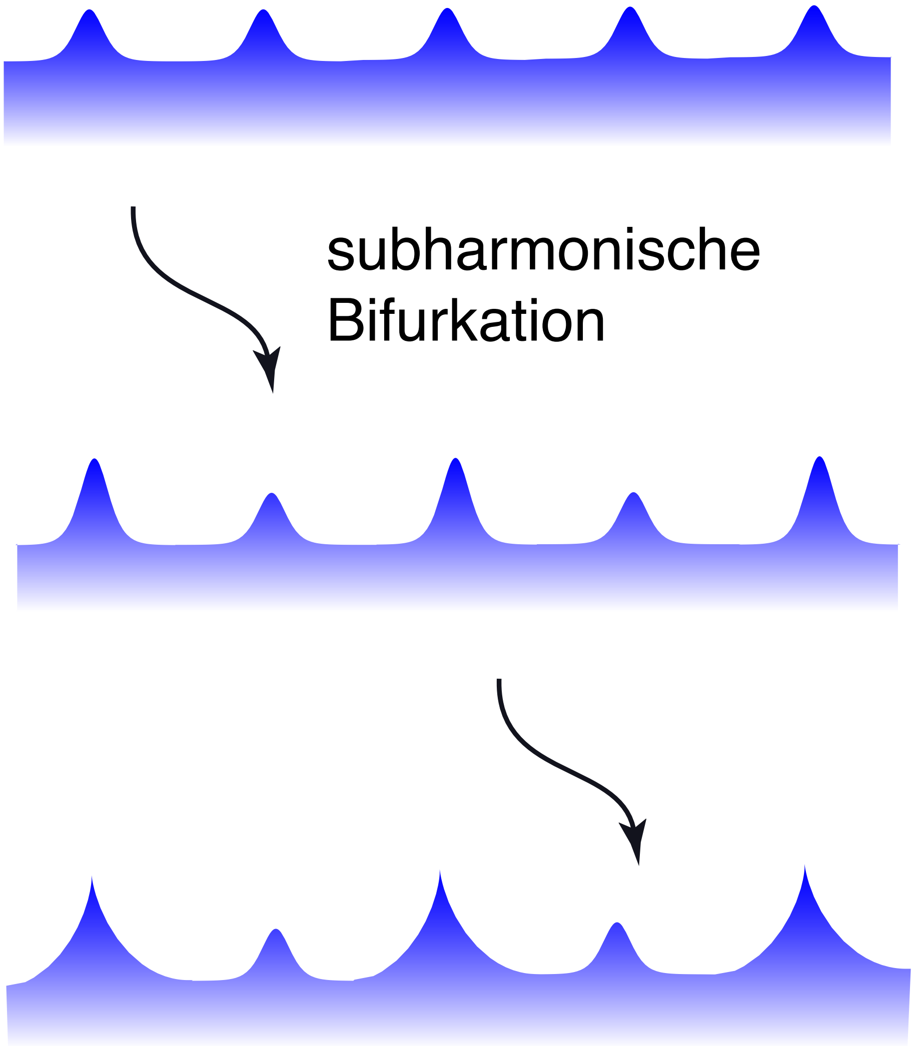
SYMMETRIE

Sind Stokes-Wellen immer symmetrisch?



- P. Garabedian (1965), J. F. Toland (2000):
  Ja, falls
  - jede Strömlinie genau ein Minimum und ein Maximum pro Periode hat.
- A. Constantin und J. Escher (2004):
  Ja, falls
  - die Oberfläche streng monoton zwischen Berg und Tal ist.
- M. Ehrnström (2008):
  Ja, falls
  - die Oberfläche monoton zwischen Berg und Tal ist.

EXOTISCHERE STOKES-WELLEN



- Die Wellen erfüllen die Voraussetzungen von Ehrnströms Satz nicht
- Vermutung:
  Alle Stokes-Wellen sind symmetrisch

TEILCHEN-BAHNEN

- Die Bahnen $\underline{x} = \underline{x}(t)$ der Wasserteilchen sind die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\dot{\underline{x}} = \underline{u}(\underline{x}, t). \qquad (\star)$$

- Lineare Theorie für Wellen kleiner Amplitude mit sinusförmiger Oberfläche:
  - Schreibe $\eta = \varepsilon \sin(k(x - ct))$, $\underline{u} = \varepsilon \underline{\tilde{u}}$ und vernachlässige Terme von $O(\varepsilon^2)$
  - Dispersionsrelation:

$$c^2 = \frac{g \tanh(|k|d)}{|k|}$$

  - Explizite Formel für $\underline{\tilde{u}}$:

$$\underline{\tilde{u}} = \left(\frac{g \cosh |k|(y+d)}{c \cosh |k|d} \sin |k|(x - ct), \; \frac{-g \sinh |k|(y+d)}{c \cosh |k|d} \cos |k|(x - ct) \right)$$

  - $(\star)$ wird durch

$$\dot{\underline{x}} = \varepsilon \underline{\tilde{u}}(\underline{x}, t)$$

approximiert.

TEILCHEN-BAHNEN

Klassische lineare Theorie:

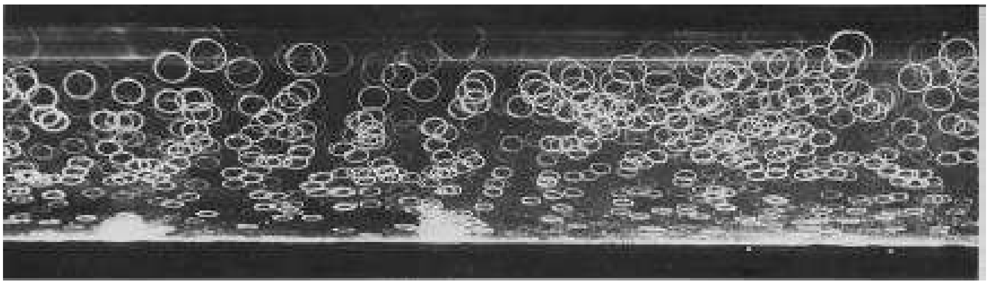
- Schreibe $\underline{x} = \underline{x}_0 + \varepsilon\underline{\tilde{x}}$:

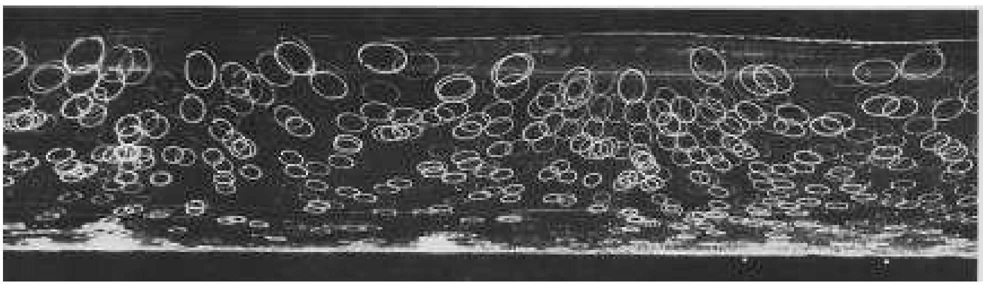
$$\dot{x} = \frac{g\cosh|k|(y_0+d)}{c\cosh|k|d}\sin|k|(x_0-ct) + O(\varepsilon),$$
$$\dot{y} = -\frac{g\sinh|k|(y_0+d)}{c\cosh|k|d}\cos|k|(x_0-ct) + O(\varepsilon)$$

- Vernachlässige Terme von $O(\varepsilon)$:

$$\frac{x^2}{\cosh^2|k|(y_0+d)} + \frac{y^2}{\sinh^2|k|(y_0+d)} = \frac{g^2}{c^4|k|^2\cosh^2|k|d}$$

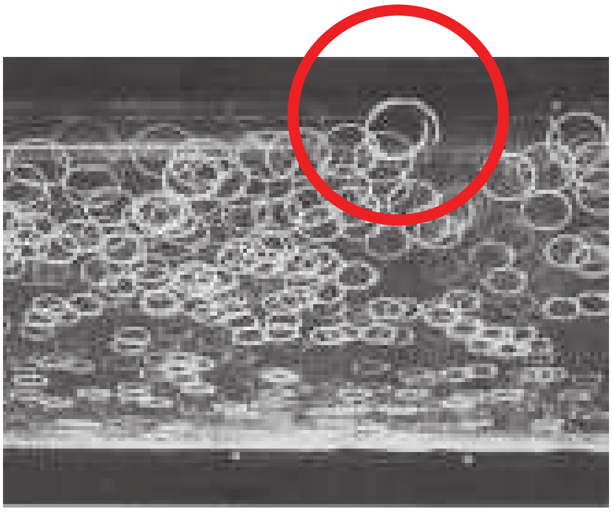
Die Teilchen-Bahnen sind Ellipse.





STOKES-DRIFT

Genauer hinschauen:



- Alle Bahnen der einmal linearisierten Gleichungen

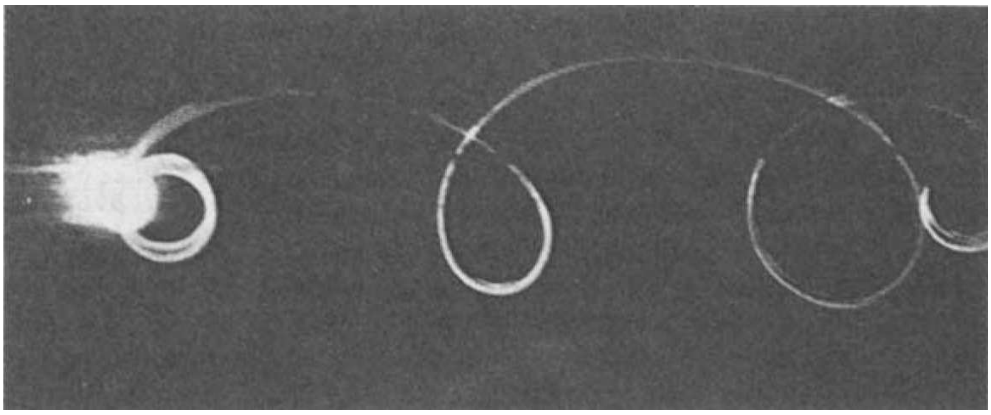
$$\underline{\dot{x}} = \varepsilon \underline{\tilde{u}}(\underline{x}, t)$$

weisen Stokes-Drift auf (A. Constantin and G. Villari (2008))

- Die exakten Gleichungen

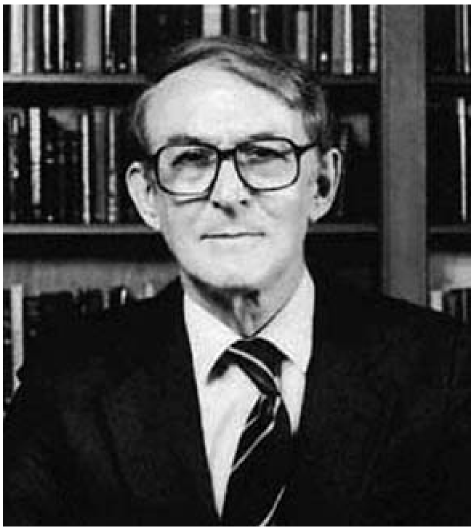
$$\underline{\dot{x}} = \underline{u}(\underline{x}, t)$$

haben ebenfalls keine geschlossenen Bahnen (A. Constantin (2006))



Sir George Stokes
(1819-1903)
Lucasischer Professor
1849-1903

Sir James Lighthill
(1924-1998)
Lucasischer Professor
1964-1979
(dasselbe Gebiet wie Stokes)



Thomas Brooke Benjamin
(1929-1995)
(Papers mit Lighthill)

Mark David Groves
(1968-)
(promovierte bei Benjamin)