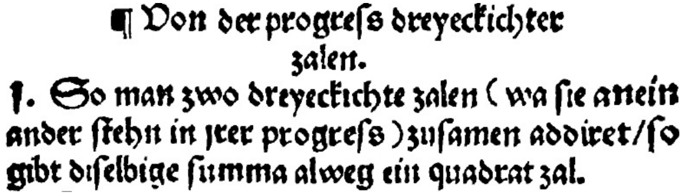
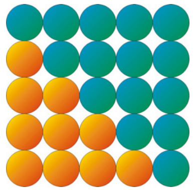
Rechnen in Bildern – Figurierte Zahlen

Jahrhundertelang haben Menschen bereits ohne unsere heutige, uns oft selbstverständlich erscheinende, elegante Notation, die uns ein effizientes Kalkül ermöglicht, allgemeine arithmetische Aussagen bewiesen.

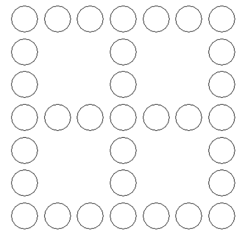

¶ Von der progreß dreyeckichter zalen.
1. So man zwo dreyeckichte zalen (wa sie aneinander stehn in jrer progreß) zusamen addiret/so gibt diselbige summa alweg ein quadrat zal.



(Stifel 1553)

Zusammenhang zwischen Arithmetik und Geometrie

Wie viele Münzen liegen da?



Dazu können wir geometrische und arithmetische **Muster in Beziehung setzen!**

$3\cdot7+2\cdot3\cdot2 \qquad 7^2-2^2\cdot2^2 \qquad 2\cdot3\cdot7-3^2$

Rechnen in Bildern

Drei Bei-Spiele

► Das Quadrat jeder (natürlichen) Zahl ist um 1 größer, als das Produkt ihrer benachbarten Zahlen!

n	n²	n²-1	n-1	n+1	(n-1)(n+1)
1	1	0	0	2	0
2	4	3	1	3	3
3	9	8	2	4	8
4	16	15	3	5	15
5	25	24	4	6	24
6	36	35	5	7	35
7	49	48	6	8	48
8	64	63	7	9	63
9	81	80	8	10	80
10	100	99	9	11	99
11	121	120	10	12	120
12	144	143	11	13	143

Es gilt ja formal noch allgemeiner: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

► Die Summe der n ersten ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl: $1+3+5+\cdots=?$

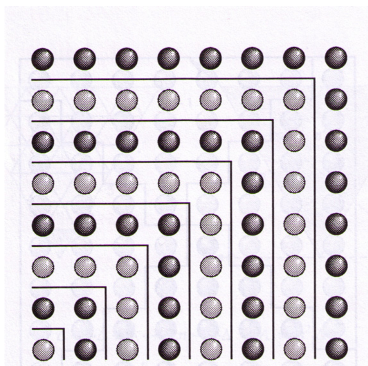
► Für die Summe der n ersten Zahlen gilt: $1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

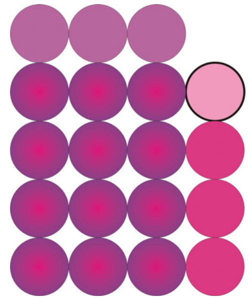
Können Sie das ein*sehen*?

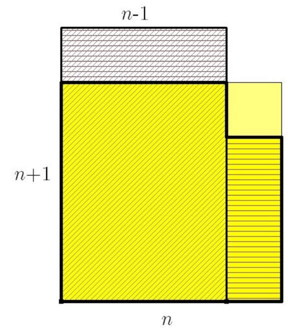
Drei (oder mehr?) Einsichten

Nebenbei: Schon die alten Griechen interessierten sich für solche Hakenmuster, die durch die „Differenz“ zweier ähnlicher Figuren entstehen
Stichworte: Gnomone
Psephoi-Arithmetik

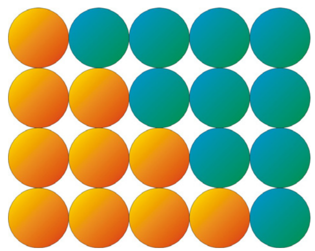
(vgl. BECKER 1957, 40-44)







(Abb. links: NELSEN 1993, 71)



Zwei wichtige Aspekte des Themas

- *Mathematisch*: Ein solches Denken in Bildern ist enorm leistungsfähig und macht auch vor Aussagen wie »Die Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist eine Kubikzahl« nicht halt.

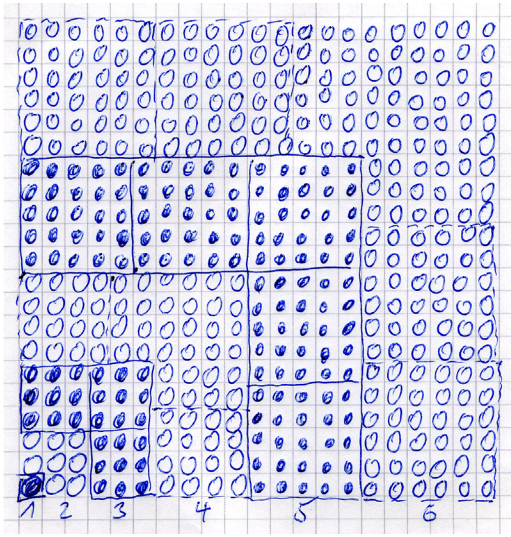
- *Didaktisch*: Unterschiedliche Menschen bevorzugen unterschiedliche Darstellungen von Mathematik. Sie stellen damit unterschiedliche Fragen und geben unterschiedlichen Antworten!

Vor diesem Hintergrund ist eine Beschäftigung alten Aufgaben nicht nur von mathematikhistorischem Interesse.

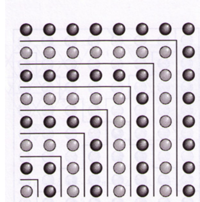
Wir können an diesen *über* Denken nachdenken.

Anselm Lambert **Ich sehe was, was Du nicht siehst – Mathematische Denkspiele** 21.06.08

Zum ersten Aspekt



Aha:
Schon wieder ein Hakenmuster!



Aha:
Dreieckzahlen können auch so aussehen!

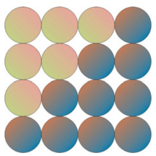
Anselm Lambert **Ich sehe was, was Du nicht siehst – Mathematische Denkspiele** 21.06.08

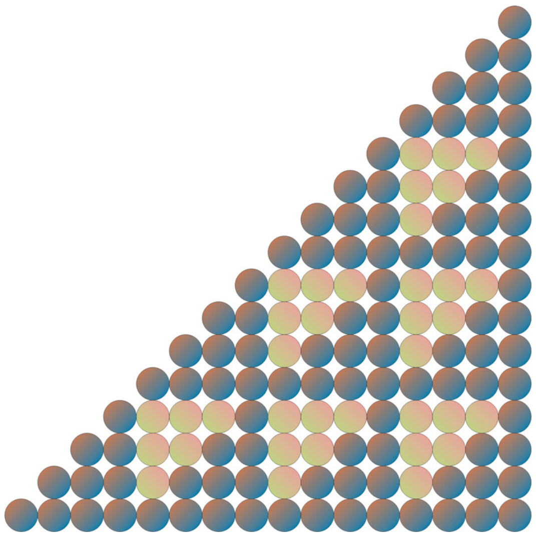
Quadrate – mal anders gesehen

(Abb. rechts nach: Nelsen 2000, 99)

Langsam: Die Summe der „Quadrate"(!) zweier aufeinanderfolgender Dreieckzahlen ist eine Dreieckzahl, deren Dreieckwurzel die Summe der beiden Dreieckzahlen ist.

Baustein:

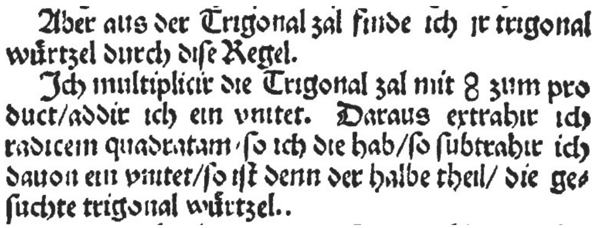




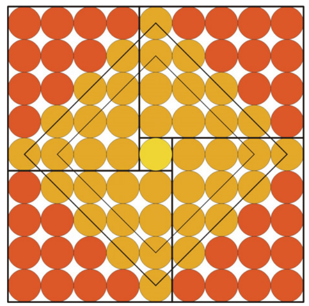
Anselm Lambert **Ich sehe was, was Du nicht siehst – Mathematische Denkspiele** 21.06.08

Zur Dreieckwurzel

Weil's so „lustlich und lieblich" ist:


Aber aus der Trigonal zal finde ich jr trigonal wurtzel durch dise Regel.
Ich multiplicir die Trigonal zal mit 8 zum product/addir ich ein vniter. Daraus extrahir ich radicem quadratam/so ich die hab/so subtrahir ich dauon ein vniter/so ist denn der halbe theil/ die gesuchte trigonal wurtzel..

(STIFEL 1553, 46)



Diesen Zusammenhang beschrieben schon Plutarch von Chäronea und Diophant.

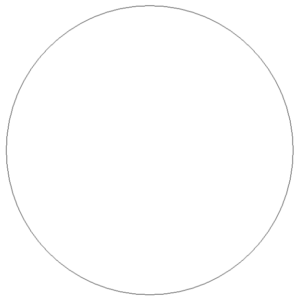
Wir sehen in diesem *Münzenbild* auch:

$4\,\Delta(k) + 1 = k^2 + (k+1)^2$ und ...

Zum zweiten Aspekt

In der Mathematik verwenden
wir Zeichen und Symbole (mit Spielregeln).

Kreis $k: x^2 + y^2 = 1$



Warum? Pythagoras ...

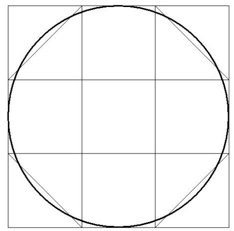
Über Darstellungen sollen Vorstellungen
von idealen, mathematischen Objekten und ihren Eigenschaften
kommuniziert werden.

Darstellungsmöglichkeiten beeinflussen Mathematik

z. B. bei der Kreisberechnung

- Ägyptische Kreisflächenberechnung (in heutiger Notation!):

$$F = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$$



Warum haben die Ägypter
diese Vorschrift gewählt?

- Warum steht das gleiche π (heute – seit wann?)
in den Formeln für **Kreisfläche *und* –umfang**?

Formale, visuelle und konzeptuelle Denkstile

Unterschiedliche Menschen denken Mathematik unterschiedlich!

Felix KLEIN unterschied

- Analytiker (die mit Formeln operieren)
- Geometer (die sehen, was sie denken)
- Philosophen (die begrifflich arbeiten)

Leone BURTON hat diese Denkstile
bei Mathematikerinnen und Mathematikern empirisch erfasst:

- 66 % denken *visuell* (in Bildern, oft dynamisch)
- 37 % denken *formal*, symbolisch
- 47 % denken *konzeptuell*, begrifflich in Ideen, klassifizierend

60% haben zwei Zugänge, 36% einen und 4% alle drei.

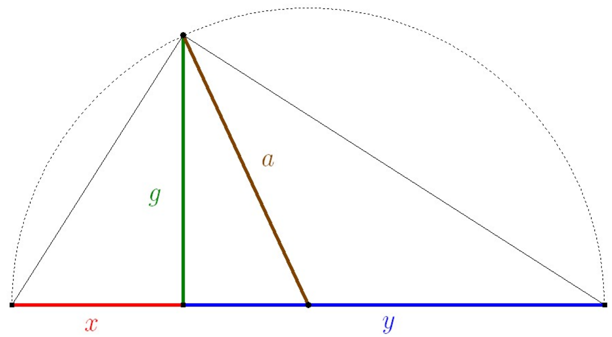
Unterschiedliche Denkstile können zu unterschiedlichen mathematischen
Interessen führen. Das macht den Reichtum der Mathematik aus.

Das Zusammenspiel der Denkstile – ein Beispiel

Ungleichung vom
arithmetischen und
geometrischen
Mittelwert

$$A(x,y) := \frac{x+y}{2}$$

$$G(x,y) := \sqrt{xy}$$



Darstellung nach PAPPUS (ca. 250 – 350 n. Chr.)

(vgl. LAMBERT & HERGET 2005)

Lösungen!

Formal-algebraischer Weg

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad | \cdot 2$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \quad | \text{ Quadrieren}$$

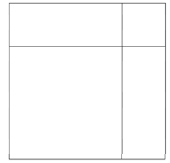
$$x^2 + 2xy + y \geq 4xy \quad | -4xy$$

$$x^2 - 2xy + y \geq 0 \quad | \text{ Faktorisieren}$$

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Binomische Formeln! Warum gelten die?

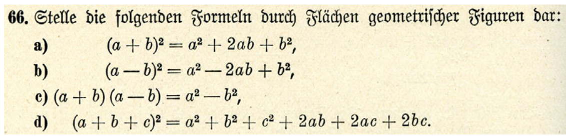
Visualisierung der 2. binomischen Formel



Veranschaulichen sie die zweite binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, indem sie die folgende Zeichnung geeignet beschriften.

Überblick der Resultate (Lehramtstudierende 1. Semester – Frankfurt)

- 52 (43,4%) keine Angabe
- 3 (2,5%) vollständig visualisiert und 8 zumindest richtiger Ansatz
- 33 stattdessen 1. binomische Formel richtig
  - 5 Ansatz dazu
  - 19 sonstige Ansätze, davon 10 (Teil-)Terme auf Felder verteilt



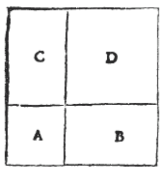
66. Stelle die folgenden Formeln durch Flächen geometrischer Figuren dar:
a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
d) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

LIETZMANN 1926a, 124

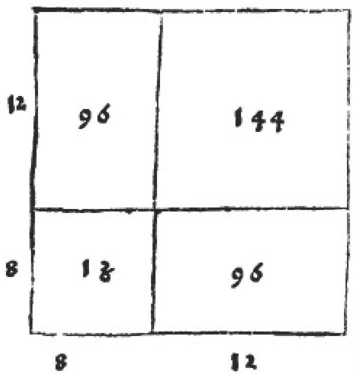
Die Binomischen Formeln

Mit Variablen

(Stifel 1553, 336)



(Stifel 1553, 334)



Item
So ich das A vñ B zu samē neme. ſo find ich auch (auffs aller ſchlechteſt) ein equation/ der andern Regel Chriſtophori. alſo 1z + 96 gleich 160. Oder auch der erſten Regel. alſo. 1z gleych 2 0 2a.
¶ So ich aber das A vnd B zuſamen nem alſo. 1z + 12 2a iſt gleych 1 6 0
Oder das C. vnd D. zuſamen nem alſo. 1z + 8 2a gleych 2 4 0. ſo fallen ſolliche equationes in die funffte Regel Chriſtophori.

Variationen der Figur