

Polytope mit speziellen Simplizes

—
kombinatorische Klassifizierung, geometrische
Konstruktionsverfahren und ein Zerlegungsalgorithmus zur
Berechnung zugehöriger Ehrhart–Polynome

von

Timo de Wolff

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades „Diplom–Mathematiker“

vorgelegt im

Oktober 2008

Gutachter:

Prof. Dr. Thorsten Theobald (J. W. Goethe–Universität)

Prof. Dr. Claus–Peter Schnorr (J. W. Goethe–Universität)

Johann Wolfgang Goethe–Universität

Fachbereich Informatik und Mathematik

Institut für Mathematik

Frankfurt am Main

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt Prof. Dr. Thorsten Theobald für die hervorragende fachliche und persönliche Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit. Er hat es stets verstanden, mir genau so weit freie Hand zu lassen, dass ich ohne Druck arbeiten konnte ohne dabei jemals die Motivation zu verlieren. Er hatte jederzeit ein offenes Ohr für alle meine Fragen, Ideen und Probleme und hat durch seine vielen guten Ratschläge an den richtigen Stellen dafür gesorgt, dass ich den Blick auf das Wesentliche behalte, während ich mit den Details beschäftigt war. Damit hat er die Grundlage gelegt, auf der diese Arbeit entstehen konnte.

Ferner gilt mein Dank Dipl.-Math. Reinhard Steffens, Dipl.-Math. oec. Cordian Riener, B.A. und Dr. Hartwig Bosse für ihr Feedback und all die kleinen Tips und Tricks, die diese Arbeit vorgebracht haben. Bei Dr. Hartwig Bosse möchte ich mich außerdem für seine Anregungen zur Optimierung des in Kapitel 5 entwickelten Algorithmus bedanken, aus denen sich letztendlich der Abschnitt 5.3.1 entwickelte.

Mein besonderer Dank gilt darüber hinaus Prof. Dr. Volkmar Welker von der Philipps-Universität Marburg für seine schnelle, alles erklärende E-Mail an dem einen Tag, als „ganz Frankfurt“ an simplizialen Vereinigungen zu verzweifeln drohte, weil ich die entsprechenden Quellen missverstanden hatte.

Timo de Wolff

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Timo de Wolff, Bad Nauheim, den 16. Oktober 2008

Bemerkung

Bei der vorliegenden Version handelt es sich nicht um die Originalversion der Diplomarbeit, sondern um eine im Laufe des Jahres 2009 überarbeiteten und korrigierte Version.

Timo de Wolff, Frankfurt am Main, Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen	4
2.1	Ordnungen	4
2.2	Polytope und Komplexe	4
2.3	Triangulierungen	8
2.3.1	Die rückwärtige lexikographische Triangulierung	9
2.3.2	Die pulling triangulation	10
2.3.3	Unimodulare Triangulierungen und komprimierte Polytope	12
2.4	Birkhoff–Polytope	12
2.5	Ordnungspolytope	14
2.6	Simpliziale Vereinigungen und Quotientenpolytope	19
3	Spezielle Simplizes	22
3.1	Definition und bekannte Beispiele	22
3.2	Die vollständige Klassifikation und geometrische Konstruktion von zahmen Polytopen mit speziellen Simplizes	27
3.2.1	Zu speziellen Simplizes äquivalente Bedingungen und das erste Konstruktionsverfahren: Pyramiden	28
3.2.2	Das zweite Konstruktionsverfahren: Muscheln	32
3.2.3	Das Theorem zur vollständigen Klassifikation zahmer Polytope	37
3.3	Ausblick für wilde Polytope mit speziellen Simplizes	38
3.4	Explizite Klassifikation von PS_2^m bis PS_5^m	42
4	Ehrhart Polynome	45
4.1	Definition und ein Satz von Stanley	45
4.2	Athanasiadis’ Theorem	46
5	Algorithmische Zerlegung von Polytopen mit speziellen Simplizes	50
5.1	Der Algorithmus	50
5.1.1	Die Funktion <code>Quotientenpolytop</code>	52
5.1.2	Die Funktion <code>ZieheEcken</code>	53
5.2	Beispiele	56
5.2.1	Berechnung von Q_{P_2}	56
5.2.2	Berechnung von Q_{P_3}	57
5.2.3	Berechnung von $Q_{C_{(1,2)}}$	60
5.3	Optimierungen des Algorithmus	61
5.3.1	Vereinfachte Bestimmung der maximalen Ziehdistanz	61
5.3.2	Reduzierung der Eingabedaten	64
5.4	Laufzeitanalyse	66
A	Notationen	68

1 Einleitung

In seinem Artikel [Ath05] formulierte Christos Athanasiadis die Struktur eines Polytopes mit einem *speziellen Simplex*: Ist P ein Polytop mit Eckenmenge $\mathcal{V}(P)$, so bildet eine Teilmenge $\sigma \subset \mathcal{V}(P)$ die Ecken eines speziellen Simplexes, falls einerseits die konvexe Hülle von σ ein Simplex ist und andererseits jede Facette von P genau eine Ecke aus σ nicht enthält. Er konnte, insbesondere unter Rückgriff auf Resultate von Reiner und Welker, beweisen, dass der h -Vektor der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung eines solchen Polytopes P übereinstimmt mit dem h -Vektor eines simplizialen Polytopes Q niedrigerer Dimension. Da Q simplizial ist können unter Verwendung von McMullens g -Theorem Aussagen bzgl. Symmetrie und Monotonie des gemeinsamen h -Vektors getroffen werden (vergl. hierzu [Ath05, insbes. S. 168, Theorem 3.5] sowie [Wel05]).

Mit Hilfe eines Satzes von Stanley lassen sich aus diesem Resultat Rückschlüsse auf die *Ehrhart-Reihe* des Polytopes P ziehen, die wiederum, aufgrund der Tatsache, dass das *Ehrhart-Polynom* für bestimmte Polytope mit anderen Polynomen übereinstimmt, weitere Folgerungen gestatten (vergl. [Ath05]). Außerdem konnte Athanasiadis beweisen, dass der *torische Ring* $K[P]$ *komprimierter* Polytope P , die *Gorenstein* sind, ein spezielles Simplex enthalten (vergl. ebenda; tatsächlich gilt sogar Äquivalenz: vergl. [Hib05]) und damit dieselben der oben angesprochenen Rückschlüsse zulassen. Dieses Resultate wurde später von verschiedenen anderen Autoren aufgegriffen (neben den Arbeiten von Ohsugi und Hibi vergl. etwa [CHT07], [BN08] und [BR07]).

Die erste Fragestellung dieser Arbeit ist jedoch nicht, welche weiteren Anwendungsbereiche Polytope mit speziellen Simplizes bieten, sondern *welche* Polytope überhaupt über ein spezielles Simplex verfügen. Es wurden von Athanasiadis zwei Beispielklassen von Polytopen – *Birkhoff*- und *Ordnungspolytope* – vorgestellt, die stets ein spezielles Simplex enthalten (vergl. hierzu [Ath05, S. 167, Beispiele 3.1 und 3.2]; weitere Beispielklassen werden in der (uns vorliegenden) Literatur nicht erwähnt); darüberhinaus findet man relativ einfach einige niederdimensionale Beispiele, aber es gab bislang keine vollständige kombinatorische Klassifikation dieser Polytopklasse: Es war nicht bekannt, ob überhaupt in jeder Dimension n für alle $1 \leq k \leq n - 1$ ein Polytop mit speziellem k -Simplex existiert. Ferner war nicht bekannt, ob es ein allgemeines Verfahren gibt, mit dem bereits anhand des f -Vektors eines Polytopes entschieden werden kann, ob es über ein spezielles Simplex verfügt bzw. ob es ein oder mehrere Verfahren gibt, die (kombinatorisch oder auch geometrisch) alle Polytope mit speziellen Simplizes erzeugen.

Sämtliche dieser Fragen beantworten wir in dieser Arbeit für *zahme* Polytope mit speziellen Simplizes: Wir zeigen zunächst, dass für Polytope P mit speziellem Simplex Σ und deren Seitenkomplex $\mathcal{F}(P)$ gilt, dass der Teilkomplex $\mathcal{F}(P) \setminus \Sigma$ aller Seiten, die keine Ecke aus Σ enthalten, der Rand eines Polytopes Q , des *Basispolytopes* von P ist. Gilt zusätzlich, dass die Dimension des affinen Grundraums von $\mathcal{F}(P) \setminus \Sigma$ mit $\dim(Q)$ übereinstimmt, so nennen wir P *zahm*; andernfalls nennen wir P *wild*. Wir beweisen, dass alle zahmen Polytope mit speziellen Simplizes durch exakt zwei verschiedene Verfahren (bzw. eine Kombination aus beiden) erzeugt werden, die wir als *Pyramiden-* und *Muschel(bildungs)verfahren* (Notation: `pyr` und `shell`) bezeichnen werden. Formal ausgedrückt bedeutet dies für die Menge PS^m aller zahmen Polytope mit speziellen Simplizes:

$$PS^m = \{P \mid \exists \text{ Polytop } Q, \exists i, j \in \mathbb{N} : \text{pyr}_i(\text{shell}_j Q)\}$$

Diese Verfahren sind geometrisch umsetzbar und die kombinatorische Struktur aller von ihnen erzeugten Polytope ist berechenbar, wodurch auch ein Kriterium zur Überprüfung von beliebigen (f -Vektoren von) Polytopen auf spezielle Simplizes gegeben ist. In diesem Zusammenhang werden wir sehen, dass es nicht nur unendlich viele Polytope mit speziellen Simplizes gibt, sondern sogar viele Teilmengen von PS unendlich sind – etwa die Menge aller n -dimensionalen zahmen Polytope mit speziellem k -Simplex oder die Menge aller zahmen Polytope mit speziellem Simplex, die den Rand eines bestimmten Polytopes Q im Randkomplex enthalten.

Die zweite Fragestellung dieser Arbeit bezieht sich auf die konstruktive Umsetzung des eingangs erwähnten Resultates von Athanasiadis: Athanasiadis' Theorem beweist, dass der h -Vektor

der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung eines komprimierten Polytopes P mit speziellem Simplex mit dem eines niedrigdimensionaleren, simplizialen Polytopes Q übereinstimmt. Es gibt aber keinerlei Auskunft darüber, wie dieses Polytop Q (geometrisch) berechnet werden kann. Diese Information liefern wir in dieser Arbeit, indem wir (auch unter Rückgriff auf die zuvor gewonnenen neuen Erkenntnisse über spezielle Simplizes) einen Zerlegungsalgorithmus angeben, der Q in Polynomialzeit in doppelter Beschreibung berechnet, sofern das ursprüngliche Polytop P in doppelter Beschreibung vorliegt.

Zur Beantwortung dieser beiden Fragestellungen gehen wir folgendermaßen vor:

In Kapitel 2 diskutieren wir mit Ausnahme der speziellen Simplizes sämtliche Grundlagen und Techniken, die wir für diese Arbeit benötigen. Wir definieren Terminologie für *Ordnungen* (Abschnitt 2.1), stellen *polytopale* bzw. *Simplizialkomplexe* vor (Abschnitt 2.2), wobei wir uns an dieser Stelle auch *f*- und *h*-*Vektoren* solcher Komplexe widmen. Wir diskutieren eine Reihe von *Triangulierungen* von Polytopen sowie teilweise, wie diese Triangulierungsverfahren geometrisch zu interpretieren sind (Abschnitt 2.3). Den bereits erwähnten *Birkhoff*- und *Ordnungspolytopen* widmen wir uns in einem jeweils eigenen Abschnitt (2.4 und 2.5), wobei wir an dieser Stelle noch nicht auf spezielle Simplizes eingehen. Abschließend diskutieren wir in Abschnitt 2.6 *simpliziale Vereinigungen* und *Quotientenpolytope*, die nicht nur eine Grundlage für Athanasiadis' Resultate darstellen, sondern insbesondere auch für die von uns durchgeführte Klassifizierung spezieller Simplizes benötigt werden.

In Kapitel 3 präsentieren wir zunächst in Abschnitt 3.1 neben der Definition von *speziellen Simplizes* die bislang bekannten Resultate über diese Polytopklasse: Wir geben niederdimensionale Beispiele, weisen nach, dass Birkhoff- und Ordnungspolytope stets über spezielle Simplizes verfügen und zeigen einige technische Lemmata. In Abschnitt 3.2 erarbeiten wir die kombinatorische Klassifikation und geometrischen Konstruktionsverfahren für Polytope mit speziellen Simplizes: Im Wesentlichen beweisen wir zunächst zwei Eigenschaften von Polytopen, die zusammengenommen zur Existenz eines speziellen Simplexes isomorph sind und motivieren daraus die Unterscheidung von *zahmen* und *wilden* Polytopen mit speziellen Simplizes. Anschließend entwickeln wir daraus (geometrisch wie kombinatorisch) die beiden Konstruktionsverfahren – Pyramiden- und Muschel(bildungs)verfahren – und weisen nach, dass mehrfache, gemischte Anwendung beider Verfahren kommutiert. Im abschließenden Klassifikationstheorem beweisen wir, dass jedes Polytop mit speziellem Simplex durch eine Kombination beider Verfahren konstruiert werden kann und klassifizieren dadurch die Menge PS^m aller zahmen Polytope mit speziellen Simplizes.

In Kapitel 4 widmen wir uns Ehrhart-Polynomen und den Resultaten von Athanasiadis. In Abschnitt 4.1 definieren wir Ehrhart-Polynome und präsentieren einen Satz von Stanley, der die Grundlage für Athanasiadis Hauptresultat aus [Ath05] bildet, das wir in Abschnitt 4.2 präsentieren und beweisen werden. Außerdem geben wir vor dem Hintergrund unserer in Kapitel 3 erzielten Resultate eine neue, natürliche Interpretation des Theorems und dessen Beweises.

In Kapitel 5 entwickeln wir in Abschnitt 5.1 den Algorithmus zur Berechnung des simplizialen Polytopes aus Athanasiadis' Theorem, wobei wir die jeweiligen Schritte des Algorithmus zunächst motivieren und dann im Detail diskutieren. In Abschnitt 5.2 geben wir mehrere Beispiele für Polytope mit speziellem Simplex, auf die wir den zuvor entwickelten Algorithmus anwenden. In Abschnitt 5.3 verbessern wir zunächst bestimmte Schritte des Algorithmus, indem wir nachweisen, dass gewisse Rechnungen abgeschätzt werden können und erörtern außerdem, welche Möglichkeiten zur Berechnung bestehen, wenn das ursprüngliche Polytop nicht in doppelter Beschreibung, sondern lediglich in \mathcal{V} - oder \mathcal{H} -Darstellung vorliegt oder andere Daten fehlen. Abschließend führen wir in Abschnitt 5.4 eine Laufzeitanalyse unseres Algorithmus durch und zeigen, dass die Laufzeit gegen $\max\{O(p \cdot n^3), O(s^6)\}$ abgeschätzt werden kann, wobei $n := \dim(P)$, $p := \#\mathcal{V}(P)$ und $s := \#\mathcal{V}(Q)$ ist. Hierbei handelt es sich nicht um eine scharfe Abschätzung.

2 Grundlagen

2.1 Ordnungen

Wir benötigen in verschiedenen Zusammenhängen dieser Arbeit Ordnungstheorie; insbesondere im Abschnitt 2.5 über *Ordnungspolytope* bei deren späteren Verwendungen. Wir orientieren uns an der Terminologie von Ziegler (vergl. [Zie07, S.56]).

Definition 2.1.1:

Sei Ω eine endliche Menge und \leq eine 2-stellige Relation auf Ω (Notation: (Ω, \leq)). Dann heißt Ω PARTIELL GEORDNET (bzgl. \leq), falls folgende Axiome gelten:

- (i) $\forall x \in \Omega : x \leq x$
- (ii) $\forall x, y \in \Omega : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- (iii) $\forall x, y, z \in \Omega : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Definition 2.1.2:

Sei $\Omega := \{x_1, \dots, x_k\}$ eine bzgl. \leq_Ω partiell geordnete Menge, für die gilt $\Omega \subseteq \{1, \dots, m\}$. Dann heißt Ω NATÜRLICH BESCHRIFTET, falls gilt:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, k\} : x_i \leq_\Omega x_j \Rightarrow i \leq j.$$

Definition 2.1.3:

Sei (Ω, \leq) eine partiell geordnete Menge. Dann ist jede Teilmenge von Ω offenbar ebenfalls partiell geordnet bzgl. \leq . Gilt für eine Teilmenge $T \subseteq \Omega$ zudem, dass T durch \leq VOLLSTÄNDIG oder TOTAL GEORDNET ist, d. h. es gilt zusätzlich

$$\forall x, y \in T : x \leq y \vee y \leq x,$$

so heißt T eine KETTE (bzgl. \leq in Ω). Die LÄNGE $l(T)$ einer Kette T wird definiert durch:

$$l(T) := \#T - 1.$$

Sind $x, y \in T$ mit $x \leq y$, so heißt

$$[x, y] := \{z \in T \mid x \leq z \leq y\}$$

das INTERVALL von x und y in T . Gilt $[x, y] = \{x, y\}$, so sagen wir, y ÜBERDECKT x (engl. „covers“) und nennen (x, y) eine ÜBERDECKUNGSRELATION.

Eine partiell geordnete Menge Ω heißt BESCHRÄNKT, falls es ein eindeutig bestimmtes minimales Element $\hat{0}$ und ein eindeutig bestimmtes maximales Element $\hat{1}$ in Ω gibt, d. h. falls gilt:

$$\exists \hat{0}, \hat{1} \in \Omega \forall x \in \Omega : \hat{0} \leq x \leq \hat{1}.$$

Die Menge $\bar{\Omega} := \Omega \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$ bezeichnet man als ECHTEN TEIL von Ω .

Eine partiell geordnete Menge Ω heißt GESTAFFELT (engl.: „graded“), falls sie beschränkt ist und jede maximale Kette in Ω die gleiche Länge hat. In diesem Fall bezeichnen wir die Länge einer solchen Kette als den RANG von Ω .

2.2 Polytope und Komplexe

In diesem Abschnitt definieren wir die für den gesamten weiteren Verlauf der Arbeit benötigte Terminologie über Polytope (insbesondere f - und h -Vektoren und $-$ Polynome) und (*polyedrische, polytopale und simpliziale*) Komplexe. Wir schließen mit einer reduzierten (in dieser Arbeit für den Beweis von Athanasiadis' Theorem 4.2.1 benötigten) Version von McMullens g -Theorem.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachten wir im wesentlichen *ganzahlige* und $0/1$ -Polytope; diese sind folgendermaßen definiert:

Definition 2.2.1:

Ein m -dimensionales Polytop P in \mathbb{R}^n heißt

- (a) GANZZAHLIG, falls für alle seine Ecken $v \in \mathcal{V}(P)$ gilt, dass $v \in \mathbb{Z}^n$.
- (b) 0/1-POLYTOP, falls für alle seine Ecken $v \in \mathcal{V}(P)$ gilt, dass $v \in \{0, 1\}^n$.

Die eingangs erwähnten *Komplexe* werden definiert durch (vergl. [The08, S. 85] sowie [Zie07, S. 127f., S. 232]):

Definition 2.2.2:

Eine Menge \mathcal{F} nichtleerer Polyeder im \mathbb{R}^n heißt POLYEDRISCHER KOMPLEX, falls folgende Axiome erfüllt sind:

- (i) Das leere Polyeder \emptyset liegt in \mathcal{F} .
- (ii) Jede Seite eines Polyeders P in \mathcal{F} liegt ihrerseits wieder in \mathcal{F} .
- (iii) Der Schnitt zweier Polyeder P, Q aus \mathcal{F} ist entweder leer oder sowohl eine Seite von P als auch eine Seite von Q .

Die Elemente von \mathcal{F} heißen die SEITEN von \mathcal{F} ; die Seiten der Dimension 0 heißen ECKEN (von \mathcal{F}); die Seiten der Dimension 1 heißen KANTEN (von \mathcal{F}). Die DIMENSION $\dim(\mathcal{F})$ von \mathcal{F} ist die maximale Dimension einer Seite von \mathcal{F} .

Sind alle Polyeder in einem polyedrischen Komplex \mathcal{F}

- (a) Polytope, so heißt \mathcal{F} POLYTOPALER KOMPLEX;
- (b) Simplexes, so heißt \mathcal{F} SIMPLIZIALKOMPLEX.

Ein polytopaler Komplex \mathcal{F} heißt REIN (engl.: „pure“), falls zu jeder Seiten von \mathcal{F} eine Seite (von \mathcal{F}) maximaler Dimension existiert, die diese Seite enthält.

Konvention:

Für polytopale (bzw. simpliziale / polyedrische) Komplexe vereinbaren wir folgende Konventionen:

- (i) Die Eckenmenge jedes polytopalen (bzw.: simplizialen / polyedrischen) Komplexes \mathcal{F} bezeichnen wir in Zukunft mit $\mathcal{V}(\mathcal{F})$.
- (ii) Für jede Menge $\sigma \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{F})$, bestehend aus Ecken eines polytopalen Komplexes \mathcal{F} , bezeichnen wir mit $\mathcal{F} \setminus \sigma$ den maximalen Teilkomplex von \mathcal{F} , der keine Ecke aus σ enthält. Wir schreiben (kurz) $\mathcal{F} \setminus v$ statt $\mathcal{F} \setminus \sigma$, falls σ nur aus einer Ecke v besteht.
- (iii) Wenn wir zwei polytopale (bzw.: simpliziale / polyedrische) Komplexe (damit insbesondere auch: zwei Polytope) als ISOMORPH bezeichnen, meinen wir damit, sofern nicht explizit anders angegeben, stets Isomorphie im kombinatorischen (und damit insbesondere nicht im geometrischen) Sinne.

Im folgenden Beispiel betrachten wir die beiden hauptsächlich von uns verwendeten polytopalen Komplexe – solche, die die geometrische Realisierung der kombinatorischen Struktur von Polytopen sind (vergl. [Zie07, S. 129]):

Beispiel 2.2.3:

Sei P ein Polytop mit Seitenverband $\mathcal{F}(P)$. Dann ist $\mathcal{F}(P)$ ein reiner polytopaler Komplex, der sogenannte (SEITEN-)KOMPLEX von P .

Die Menge $\mathcal{F}(\partial P) := \mathcal{F}(P) \setminus \{P\}$ der echten Seiten von P ist ebenfalls ein reiner polytopaler Komplex, der RANDKOMPLEX von P .

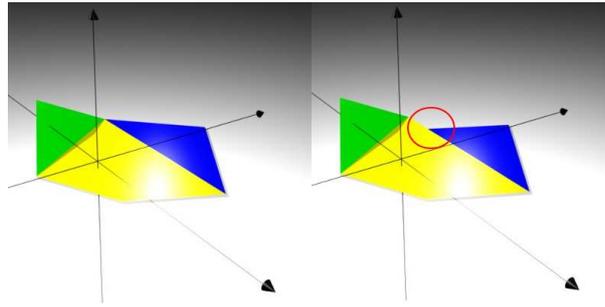


Abbildung 1: Ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für einen polytopalen Komplex.

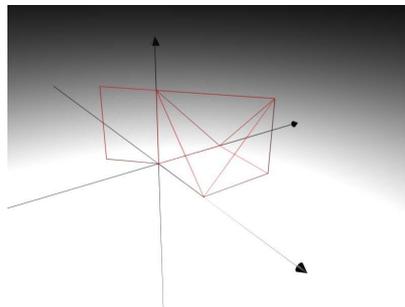


Abbildung 2: Ein nicht reiner polytopaler Komplex (Gittermodell).

Die oben erwähnte kombinatorische Struktur von Polytopen wird algebraisch durch folgende Terminologie beschrieben (vergl. [The08, S. 29 und S. 86, Bemerkung 6.9] sowie [Zie07, S. 250, Definition 8.18]):

Definition 2.2.4:

Sei P ein Polytop der Dimension $n - 1$ und $\mathcal{F}(P)$ der Seitenverband von P . Dann definieren wir

$$f_{-1} := 1 \wedge \forall i \in \{0, \dots, n - 1\} : f_i := \#\{F \in \mathcal{F}(P) \mid \dim(F) = i\}.$$

Der Vektor $f_P := (f_{-1}, f_0, \dots, f_{n-1})$ wird als der f -VEKTOR von P bezeichnet. Für polytopale und Simplicialkomplexe wird der f -Vektor analog definiert.

Definition 2.2.5:

Sei P ein simpliciales Polytop der Dimension $n - 1$ mit f -Vektor $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{n-1})$. Dann definieren wir den h -VEKTOR

$$h_P := (h_0, \dots, h_n)$$

durch

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} : h_k := \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{n-i}{n-k} f_{i-1}.$$

Für Simplicialkomplexe wird der h -Vektor analog definiert.

Es lassen sich f - und h -Vektoren in natürlicher Weise als Koeffizienten von Polynomen und das jeweils zugehörige (hier kombinatorisch betrachtete) Polytop als durch ein solches Polynom erzeugtes Objekt auffassen (vergl. [Wel05, S. 249]):

Satz und Definition 2.2.6:

Sei P wie zuvor mit f -Vektor f_P und h -Vektor h_P . Dann definieren wir die zu diesen gehörigen ERZEUGENDEFUNKTIONEN – das f - bzw. h -POLYNOM – durch

$$f(P, x) := \sum_{i=0}^n f_{i-1} x^i; \quad h(P, x) := \sum_{i=0}^n h_i x^i.$$

Für die Erzeugendenfunktionen gilt:

$$[x^n \cdot f(P, x^{-1})]_{x \rightarrow x-1} = x^n \cdot h(P, x^{-1}).$$

Bemerkung 2.2.7:

Die obige Definition des f - und h -Polynomes ist nicht die einzige in der Literatur gebräuchliche. In manchen Darstellungen findet man (vergl. [Zie07, S. 249]):

$$f(P, x) := \sum_{i=0}^n f_{i-1} x^{n-i}; \quad h(P, x) := \sum_{i=0}^n h_i x^{n-i}.$$

Dies hat den Vorteil, dass für die Erzeugendenfunktionen dann gilt (vergl. ebd.):

$$f(P, x-1) = h(P, x).$$

Wir wollen in dieser Arbeit die Variante aus Satz und Definition 2.2.6 verwenden, da diese Definition Voraussetzung für Athanasiadis' Theorem (in dieser Arbeit: Theorem 4.2.1) in [Ath05] in der von ihm beschriebenen „schönen“ Form ist. Dafür benötigt man allerdings die Gültigkeit des nachfolgenden Lemmas, welches nur bezüglich der Definition 2.2.5 gegeben ist.

An dieser Stelle muss außerdem auf einen **Fehler** in Athanasiadis' paper hingewiesen werden: Er definiert die Erzeugendenfunktion wie in dieser Bemerkung (vergl. [Ath05, S. 164]: hier wird die Notation von Ziegler verwendet), rechnet aber später mit f - und h -Polynomen gemäß der Definition 2.2.6 von Reiner und Welker. Wir werden bei der Diskussion des Beweises von Theorem 4.2.1 noch einmal gezielt darauf hinweisen; dennoch bereits an dieser Stelle ein Beleg: Athanasiadis verwendet (an zentraler Stelle – vergl. [Ath05, S. 169]) im Beweis seines Haupttheorems:

„[...] since face complexes of simplices have h -polynomial equal to 1.“

Dies kann aber nur unter der Notation von Reiner und Welker gelten, da aus den Definitionen 2.2.4 und 2.2.5 (die mit denen von Athanasiadis übereinstimmen (vergl. [Ath05, S. 164]) – er verweist u. a. sogar auf Ziegler.) wegen $f_{-1} = 1$ sofort folgt, dass $h_0 = 1$ und somit gemäß Zieglers Definition der Leitterm jedes h -Polynoms $h(P, x)$ von der Form $x^{\dim(P)+1}$ ist.

Die Definition 2.2.5 des h -Polynoms in der obigen Form liefert folgendes, elegantes Lemma (vergl. [Wel05, S. 259, Korollar 3.8]):

Lemma 2.2.8:

Sei Σ ein n -dimensionales, volles Simplex (d. h. es ist nicht lediglich der Randkomplex des Simplexes gemeint). Dann gilt:

$$h(\Sigma, t) = 1.$$

Beweis:

Sei Σ wie oben mit $\mathcal{V}(\Sigma) := \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Da die i -dimensionalen Seiten eines Simplexes kombinatorisch betrachtet genau alle $i+1$ -elementigen Teilmengen von $\mathcal{V}(\Sigma)$ entsprechen, gilt für den f -Vektor von Σ

$$f_\Sigma := (f_{-1}, \dots, f_n) \quad \text{mit} \quad \forall i \in \{-1, \dots, n\} : f_i := \binom{n+1}{i+1}.$$

Somit gilt nach Definition 2.2.4:

$$f(P, x) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} x^i \stackrel{\text{bin. Lehrs.}}{=} (x+1)^{n+1}.$$

Gemäß Satz 2.2.6 folgt

$$\begin{aligned} x^{n+1} \cdot h(P, x^{-1}) &= [x^{n+1} \cdot f(P, x^{-1})]_{x \rightarrow x^{-1}} = \left[x^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^{n+1} \right]_{x \rightarrow x^{-1}} \\ &= [1 \cdot (x+1)^{n+1}]_{x \rightarrow x^{-1}} = x^{n+1}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$h(P, x^{-1}) = 1 \Rightarrow h(P, x) = 1.$$

□

Man steht im Allgemeinen vor dem Problem, nicht a priori etwas über die h -Vektoren von Polytopen aussagen zu können. Dieses Problem lässt sich allerdings beträchtlich reduzieren, sofern man lediglich simpliziale Polytope (Polytope, deren echte Seiten Simplizes sind) betrachtet. Wir werden an dieser Stelle allerdings die diesbezügliche Theorie nicht in der Breite betrachten (der interessierte Leser vergl. hierzu [Zie07, S. 254 ff., insbes. das g -Theorem S. 268ff.] sowie auch [Ath05, S. 164f.]), sondern uns auf das für diese Arbeit wesentliche Resultat beschränken:

Satz 2.2.9:

Sei P ein $(n-1)$ -dimensionales, simpliziales Polytop und h_P dessen h -Vektor. Dann gilt:

- (a) $\forall i \in \{0, \dots, n\} : h_i = h_{n-i}$ (*Dehn-Sommerville-Gleichung*)
- (b) $\forall i \in \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\} : h_{i-1} \leq h_i$.

2.3 Triangulierungen

Unter einer *Triangulierung* eines polytopalen Komplexes versteht man eine so weitgehende Unterteilung, dass er zu einem Simplizialkomplex wird. Formal definieren wir dies wie folgt (vergl. [The08, S. 85]):

Definition 2.3.1:

Sei \mathcal{F} ein polytopaler Komplex. Wir nennen

$$|\mathcal{F}| := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \subset \mathbb{R}^n$$

die von \mathcal{F} ÜBERDECKTE MENGE.

Ein weiterer polytopaler Komplex \mathcal{F}^* heißt eine UNTERTEILUNG von \mathcal{F} , falls

$$|\mathcal{F}^*| = |\mathcal{F}| \text{ und } \forall F \in \mathcal{F} \exists F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}^* : F = \bigcup_{i=1}^n F_i.$$

Gilt zudem, dass alle $F \in \mathcal{F}^*$ Simplizes sind (sprich: dass \mathcal{F}^* ein Simplizialkomplex ist), so heißt \mathcal{F}^* eine TRIANGULIERUNG von \mathcal{F} (wir benutzen hierfür in Zukunft das Symbol „ Δ “, also z. B. $\mathcal{F}^* = \Delta(\mathcal{F})$).

Eine Triangulierung des Seitenkomplexes $\mathcal{F}(P)$ eines Polytopes P wird schlicht als eine Triangulierung von P bezeichnet.

Selbstverständlich gibt es im Allgemeinen sehr viele (lässt man bei der Triangulierung das Entstehen neuer Ecken zu sogar unendlich viele) Möglichkeiten, einen gegebenen polytopalen Komplex zu triangulieren. Wir werden in dieser Arbeit zwei spezielle (kombinatorisch miteinander äquivalente) Triangulierungen – die *rückwärtige lexikographische Triangulierung* (Abschnitt 2.3.1) und die *pulling triangulation* (Abschnitt 2.3.2) betrachten; letztere werden wir auch geometrisch konstruktiv erklären, indem wir zeigen, dass diese Triangulierung dem sukzessiven Verschieben der Ecken in die negativen Halbräume der zu dieser Ecke gehörigen Stützhyperebenen von Facetten entspricht (daher auch die Namensgebung). Diese Tatsache wird später, in Abschnitt 5, der Kerngedanke für den Zerlegungsalgorithmus von komprimierten Polytopen mit speziellen Simplexes sein.

Abschließend diskutieren wir in Abschnitt 2.3.3 *unimodulare* Triangulierungen und *komprimierte* Polytope als Vorbereitung auf Abschnitt 4.

2.3.1 Die rückwärtige lexikographische Triangulierung

Für diese Arbeit benötigen wir insbesondere die folgende Triangulierung (vergl. [Ath05, S. 165]):

Definition 2.3.2:

Sei \mathcal{F} ein polytopaler Komplex mit Eckenmenge $\mathcal{V}(\mathcal{F}) := \{v_1, \dots, v_p\}$; $\tau := (v_1, \dots, v_p)$ sei eine vollständige Ordnung auf $\mathcal{V}(\mathcal{F})$. Die RÜCKWÄRTIGE LEXIKOGRAPHISCHE TRIANGULIERUNG definieren wir rekursiv auf folgende Art und Weise:

$$\Delta_\tau(\emptyset) := \emptyset \text{ und } \Delta_\tau(\mathcal{F}) := \Delta_\tau(\mathcal{F} \setminus v_p) \cup \bigcup_{F \in M_{v_p}} \{\text{conv}(\{v_p\} \cup G) \mid G \in \Delta_\tau(\mathcal{F}(F)) \cup \{\emptyset\}\},$$

wobei M_{v_p} gerade die Facetten, die v_p nicht enthalten, solcher maximaler Seiten von \mathcal{F} enthält, die ihrerseits v_p enthalten. $\Delta_\tau(\mathcal{F} \setminus v_p)$ und $\Delta_\tau(\mathcal{F}(F))$ werden gemäß obiger Konvention bzgl. Teilmengen von Ecken polytopaler Komplexe und in Bezug auf durch τ induzierte Ordnung auf der jeweiligen Teilmenge definiert.

Beispiel 2.3.3:

Wir betrachten zwei Beispiele für rückwärtige lexikographische Triangulierungen von Polytopen:

- (a) Sei $P := \text{conv}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b\}$ ein (regelmäßiges) Sechseck im \mathbb{R}^2 mit einer Ordnung $\tau := (a_1, \dots, a_5, b)$ der Ecken. Um P zu triangulieren, betrachten wir dessen Seitenkomplex $\mathcal{F} := \mathcal{F}(P)$. Nach Definition 2.3.2 gilt:

$$\Delta_\tau(\mathcal{F}) = \Delta_\tau(\mathcal{F} \setminus b) \cup \bigcup_{F \in M_b} \{\text{conv}(\{b\} \cup G) \mid G \in \Delta_\tau(\mathcal{F}(F)) \cup \{\emptyset\}\}$$

Da $\Delta_\tau(\mathcal{F} \setminus b)$ lediglich noch aus Kanten besteht, ist hier nichts mehr zu tun. Betrachten wir den zweiten Teil der Vereinigung: Die maximale Seite, die b enthält, ist gerade P selbst. Somit sind die Facetten F dieser Seite, die ihrerseits nicht b enthalten, die Kanten $[a_1, a_2], [a_2, a_3], [a_3, a_4], [a_4, a_5]$. Da diese als Kanten bereits trianguliert sind, wird lediglich die konvexe Hülle aus jeder dieser Kanten und b gebildet und $\Delta_\tau(\mathcal{F})$ ist der aus diesen vier Dreiecken bestehende Simplizialkomplex:

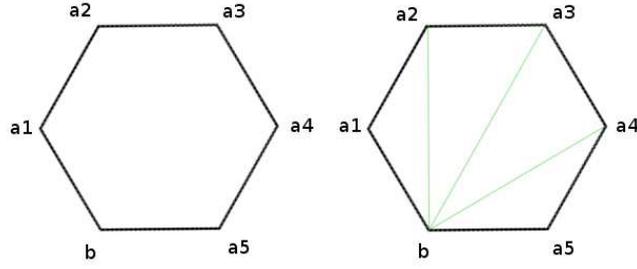


Abbildung 3: Das Sechseck P vor und nach der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung.

- (b) Sei $P := \{a_1, \dots, a_8\}$ der Einheitswürfel im \mathbb{R}^3 mit einer Ordnung $\tau := (a_1, \dots, a_8)$. Wir führen eine rückwärtige lexikographische Triangulierung des Randkomplexes $\mathcal{F}(\partial P)$ durch. Wir verzichten aus Platzgründen auf eine detaillierte Beschreibung und verweisen auf die anschließende Graphik sowie Definition 2.3.2:

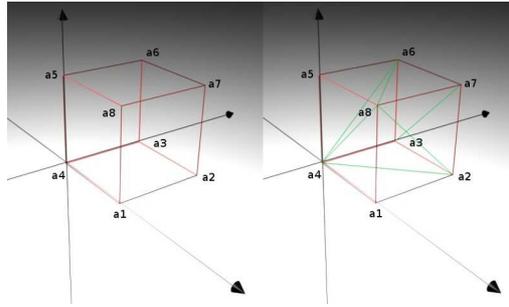


Abbildung 4: Der Rand des 3-dimensionalen Einheitswürfels vor und nach der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung (Gittermodell).

2.3.2 Die pulling triangulation

Es finden sich einige weitere, zu Definition 2.3.2 äquivalente Definitionen (vergl. etwa [Sta80, S. 333] und [Zie04, S. 1253 f.], wobei bei letzterer Darstellung zu beachten ist, dass die Ordnung der Ecken invertiert ist.). Auf eine – die sogenannte *pulling triangulation* (vergl. hierzu ebenfalls [Ath05, S. 165 f.] – werden wir an dieser Stelle näher eingehen:

Definition 2.3.4:

Sei wieder \mathcal{F} ein polytopaler Komplex mit Eckenmenge $\mathcal{V}(\mathcal{F}) := \{v_1, \dots, v_p\}$. Wir definieren für alle $v \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$:

$$\text{pull}_v(\mathcal{F}) := (\mathcal{F} \setminus v) \cup \bigcup_{F \in M_v} \{\text{conv}(\{v\} \cup G) : G \in \mathcal{F}(F) \cup \{\emptyset\}\},$$

wobei M_v gerade die Facetten, die v nicht enthalten, solcher maximaler Seiten von \mathcal{F} enthält, die v enthalten.

Wir definieren nun $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}$ und $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \mathcal{F}_i := \text{pull}_{v_{p-i+1}}(\mathcal{F}_{i-1})$. Dann heißt \mathcal{F}_p die PULLING TRIANGULATION von \mathcal{F} . Diese stimmt überein mit der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung $\Delta_\tau(\mathcal{F})$ bzgl. $\tau := (v_1, \dots, v_p)$.

Wir geben nun eine geometrisch konstruktive Erklärung für die pulling triangulation. Als Vorbereitung vereinbaren wir zunächst folgende

Konvention:

In Zukunft benutzen wir die folgende Sprachvereinbarung:

- (a) Die Aussage „Wir ZIEHEN die Ecke v nach v' .“ verwenden wir in dem Sinne, dass v nach v' verschoben wird und v' dabei im negativen Halbraum der Stützhyperebenen genau aller der Facetten, die v enthalten, liegt.
- (b) Die Aussagen „Wir DRÜCKEN die Ecke v nach v' .“ verwenden wir in dem Sinne, dass v nach v' verschoben wird und v' dabei im positiven Halbraum der Stützhyperebenen und nicht in der Stützhyperebene selbst genau aller der Facetten, die v enthalten, liegt.

Die wesentliche Grundlage für unsere geometrisch konstruktive Aussage über die pulling triangulation bildet der folgende, allgemeine Satz über die induktive Konstruktion von Polytopen (vergl. [Grü02, S. 78]; auf einen Beweis verzichten wir aus Platzgründen. Man behalte diese Aussage im Hinterkopf, da wir in Abschnitt 3 eine ähnliche Idee für unseren Ausgangssatz 3.2.2 zur Klassifizierung von Polytopen mit speziellen Simplex verwenden werden. Die beiden Sätze sind jedoch lediglich in der Struktur ihrer Aussage ähnlich und ansonsten vollkommen unabhängig voneinander):

Satz 2.3.5:

Seien P und P^* zwei n -dimensionale Polytope in \mathbb{R}^n und sei $v \in \mathcal{V}(P^*)$ eine Ecke mit $v \notin P$ und $P^* = \text{conv}(\{v\} \cup P)$. Dann gilt:

- (a) Eine Seite F von P ist eine Seite von P^* genau dann, wenn eine Stützhyperebene H einer Facette von P existiert mit $F \subset H$ und $v \in H^+$.
- (b) Falls F eine Seite von P ist, so ist $F^* := \text{conv}(\{v\} \cup F)$ eine Seite von P^* genau dann, wenn entweder
 - (i) $v \in \text{aff span } F$ oder
 - (ii) aus der Menge $\mathcal{H}(F) := \{H_1^+, \dots, H_r^+\}$ aller Stützhyperebenen Facetten von P , die F enthalten mindestens ein $H_i \in \mathcal{H}(F)$ existiert mit $v \in H_i^+$ und ein $H_j \in \mathcal{H}(F)$ existiert mit $v \in H_j^-$.
- (c) Jede Seite von P^* ist entweder vom Typ (a) oder vom Typ (b).

Damit gilt insbesondere folgende Aussage über die Veränderung des Seitenverbandes eines Polytopes, das durch Ziehen einer Ecke aus einem anderen entsteht (vergl. ebd., S. 80):

Korollar 2.3.6:

Seien P und P' zwei n -dimensionale Polytope, wobei P' aus P durch das Ziehen einer Ecke v nach v' entsteht. Dann besitzt P' genau die folgenden k -Seiten (mit $1 \leq k \leq n-1$):

- (a) Alle k -Seiten von P , die nicht v enthalten,
- (b) die konvexen Hüllen $\text{conv}(\{v'\} \cup G)$, wobei G eine beliebige $k-1$ -dimensionale, v nicht enthaltende Seite einer v enthaltenden Facette von P ist.

Der Vergleich von Korollar 2.3.6 mit der Definition der pulling triangulation 2.3.4 liefert das folgende, für den weiteren Fortgang der Arbeit (Abschnitt 4 und 5) entscheidende Korollar (vergl. ebd. sowie [Ath05, S. 166, Lemma 2.1]):

Korollar 2.3.7:

Die pulling triangulation (und damit auch die rückwärtige lexikographische Triangulierung) des Randkomplexes eines Polytopes P (bzgl. einer beliebigen Anordnung seiner Ecken) ist isomorph zum Randkomplex eines simplizialen Polytopes gleicher Dimension.

2.3.3 Unimodulare Triangulierungen und komprimierte Polytope

Die Resultate in Abschnitt 4 und damit auch der Algorithmus in Abschnitt 5 beziehen sich stets auf *komprimierte* Polytope. In diesem Abschnitt geben wir eine Definition und ein technisches Lemma für den folgenden Abschnitt 2.4.

Definition 2.3.8:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^q$ die affine Hülle des ganzzahligen Polytopes P . Eine Triangulierung Δ von P heißt UNIMODULAR, falls die Eckenmenge jedes beliebigen maximalen Simplexes von Δ eine Basis des affinen (ganzzahligen) Gitters $A \cap \mathbb{Z}^q$ ist.

Sei τ eine totale Ordnung der Ecken von P . Dann heißt τ KOMPRIMIERT (engl.: „compressed“), falls die rückwärtige lexikographische Triangulierung $\Delta_\tau(P)$ von P bzgl. τ unimodular ist. Wir bezeichnen P selbst als KOMPRIMIERT, falls jede lineare Ordnung seiner Ecken komprimiert ist (vergl. [Ath05, S. 166] und [Sta80]).

Bemerkung 2.3.9:

Ist $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein ganzzahliges Polytop und τ eine totale Ordnung der Ecken von P , so ist τ komprimiert genau dann, wenn für jede Seite F (es reicht: jede Facette) der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung $\Delta_\tau(P)$ gilt:

$$\text{vol}(F) = \frac{1}{\dim(F)!},$$

wobei $\text{vol}(F)$ hier das relative Volumen von F bezeichnet. Diese Darstellung entspricht gerade der Definition von „komprimiert“ bei Stanley (vergl. [Sta80, Def. 2.2, S. 337]).

Für den Beweis von Satz 2.4.3 benötigen wir folgendes technisches Lemma über komprimierte Ordnungen (vergl. ebd., Theorem 2.3, S. 337) :

Lemma 2.3.10 (Stanley):

Sei für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}^m$

$$l(\alpha) := \min\{t \in \mathbb{N} \mid t\alpha \in \mathbb{Z}^m\}.$$

Es sei P ein d -dimensionales, ganzzahliges Polytop. Sei $\tau := (v_1, \dots, v_n)$ eine totale Ordnung auf $\mathcal{V}(P)$. Für eine beliebige (nicht leere) Seite F von P sei

$$\delta(F) := \delta_\tau(F) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid v_i \in F\} \text{ bzgl. } \tau.$$

Dann ist τ komprimiert, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Für jeden rationalen Punkt α im relativen Inneren einer beliebigen Seite F von P erfüllt die eindeutige, positive, rationale Zahl c , für die gilt

$$\frac{\alpha - c\delta(F)}{1 - c} \in \partial F,$$

zusätzlich die Bedingung:

$$c \cdot l(\alpha) \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Birkhoff–Polytope

Sowohl in Bezug auf Polytope mit speziellen Simplizes als auch in Bezug auf komprimierte Polytope (und damit auch bezüglich der in Abschnitt 3 vorgestellten Resultate) sind zwei Polytopklassen als Beispiele bekannt. Die erste – *Birkhoff–Polytope* – stellen wir in diesem Abschnitt vor, geben eine Klassifikation an und beweisen die Unimodularität. Auf die Tatsache, dass Birkhoff–Polytope stets ein spezielles Simplex enthalten, gehen wir hier noch nicht ein, sondern kommen in Abschnitt 3 (genauer: Beispiel 3.1.4) darauf zurück, wo wir diese Eigenschaft beweisen werden.

Als Grundlage für die Definition von Birkhoff–Polytopen müssen wir *doppelt stochastische Matrizen* definieren:

Definition 2.4.1:

Sei M eine reelle $n \times n$ Matrix. M heißt

- (a) STOCHASTISCH, falls alle ihre Einträge nicht negativ sind und alle ihre Zeilensummen 1 ergeben,
- (b) DOPPELT STOCHASTISCH, falls alle ihre Einträge nicht negativ sind und sowohl ihre Zeilen- als auch ihre Spaltensummen 1 ergeben,
- (c) MAGISCHES QUADRAT (VOM GRAD r), falls alle ihre Einträge natürliche Zahlen sind und sowohl ihre Zeilen- als auch ihre Spaltensummen r ergeben.

Bemerkung 2.4.2:

- (a) Einige Autoren (insbesondere Athanasiadis – vergl. [Ath05, S. 166]) definieren (doppelt) stochastische Matrizen so, dass ihre Einträge immer ganzzahlig sind. Wir werden dies hier nicht tun und stattdessen extra darauf hinweisen, wenn die entsprechenden Matrizen ausschließlich rationale oder natürliche Einträge enthalten sollen.
- (b) Offenbar existiert zu jedem magischen Quadrat M vom Grad r genau eine rationale, doppelt stochastische Matrix S , derart dass gilt

$$\frac{1}{r} \cdot M = S.$$

Wir definieren und klassifizieren nun Birkhoff–Polytope:

Satz und Definition 2.4.3:

Die Menge aller doppelt stochastischen $n \times n$ Matrizen ist ein Polytop in $\mathbb{R}^{n \times n}$ – das sogenannte BIRKHOFF–POLYTOP (wir werden in Zukunft, wenn wir über ein Birkhoff–Polytop P sprechen, stets P_n schreiben, um zu verdeutlichen, dass es sich um das Birkhoff–Polytop aller $n \times n$ Matrizen handelt. Da dieses eindeutig ist, werden wir auch von *dem* Birkhoff–Polytop P_n sprechen).

Birkhoff–Polytope sind 0/1–Polytope; sie haben $n!$ Ecken (die Permutationsmatrizen aus S_n), n^2 Facetten (jeweils bestehend aus der Menge aller Matrizen mit $x_{ij} = 0$) und sind von der Dimension $(n - 1)^2$. Eine vollständige Beschreibung ist gegeben durch

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : x_{ij} \geq 0 \wedge \sum_{k=1}^n x_{ik} = \sum_{k=1}^n x_{kj} = 1 \right\}.$$

Außerdem sind Birkhoff–Polytope komprimiert (die Definition und die Tatsache, dass es sich um 0/1–Polytope handelt, gehen auf Birkhoff zurück; die Resultate bzgl. Ecken, Facetten und Dimension wurden unabhängig von Birkhoff und von von Neumann bewiesen (vergl. hierzu [Zie07, S. 20], wo sich Teile des Beweises und auch die vollständige Beschreibung befinden). Die Komprimiertheit wurde von Stanley gezeigt (vergl. [Sta80, S. 337, Bsp. 2.4]). Vergl. außerdem [Ath05, S. 167]).

Beweis:

Wir verzichten auf den Beweis bzgl. der Aussagen über Ecken, Facetten, Dimension, Beschreibung und der Tatsache, dass es sich um 0/1–Polytope handelt und zeigen nur die Unimodularität. Wir beweisen diese mittels Satz 2.3.10:

Sei M eine rationale Matrix, die im relativen Inneren einer Seite F mit Kodimension r (mit $1 \leq r \leq n^2 - 1$) des Birkhoff–Polytopes P_n liegt. Dann ist per Definitionem $l(M)M$ ganzzahlig (es galt nach Satz 2.3.10: $l(\alpha) := \min\{t \in \mathbb{N} \mid t\alpha \in \mathbb{Z}^{n \times n}\}$) und somit eine Summe aus Permutationsmatrizen mit ganzzahligen Koeffizienten. Sei $\tau := (v_1, \dots, v_{n!})$ eine vollständige Ordnung der Ecken von P_n .

Mit der Definition $\delta_\tau(F) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid v_i \in_\tau F\}$ wählen wir nun k als die maximale natürliche Zahl, für die gilt:

$$(*_1) \quad l(M)M - k\delta(F) \geq 0,$$

was nichts anderes bedeutet, als dass wir k als den minimalen Eintrag von $l(M)M$ wählen, dessen zugehöriger Eintrag in $\delta(F)$ nicht 0 ist. Da M in einer Seite F mit Kodimension r liegt, besitzt M gemäß der Seitendarstellung von Birkhoff–Polytopen insbesondere r 0–Einträge (nennen wir diese m_1, \dots, m_r) und somit besitzt und somit auch $l(M)M$ diese 0–Einträge. Durch die Subtraktion von $k\delta(F)$ muss nach Konstruktion ein weiterer Eintrag 0 werden (ein Eintrag muss 0 werden, da $l(M)M$ ganzzahlig ist, k maximal gewählt wurde und $\delta(F)$ nur 0en und 1en enthält. Dieser Eintrag muss sich von m_1, \dots, m_r unterscheiden, da $\delta(F)$ eine Ecke von F ist und somit insbesondere auch bei $\delta(F)$ eine 0 an den Stellen m_1, \dots, m_r steht). Daraus folgt, dass

$$(*_2) \quad l(M)M - k\delta(F) \in \partial F$$

Definieren wir außerdem $\alpha := M$, so folgt aus Satz 2.3.10, dass ein eindeutiges $c \in \mathbb{Q}_+$ existiert mit

$$(*_3) \quad \frac{M - c\delta(F)}{1 - c} \in \partial F.$$

Wegen $(*_2)$ folgt mit $(*_1)$ daraus, dass

$$\frac{M - c\delta(F)}{1 - c} = l(M)M - k\delta(F)$$

und somit

$$k = \frac{c}{1 - c} \text{ und insbesondere } l(M) = \frac{1}{1 - c} = \frac{k}{c}.$$

Da k nach Konstruktion in \mathbb{N} liegt, folgt

$$k = l(M) \cdot c \stackrel{M=\alpha}{=} l(\alpha) \cdot c \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Dies impliziert gemäß Satz 2.3.10, dass τ komprimiert ist. Da in obigem Beweis die Beziehung $k = l(M) \cdot c$ nicht von der speziellen Wahl von τ abhängt, folgt, dass Birkhoff–Polytope komprimiert sind. □

2.5 Ordnungspolytope

Wir stellen nun die zweite der beiden in Abschnitt 2.4 angekündigten Polytopklassen mit den dort beschriebenen Eigenschaften (d. h. insbesondere: komprimiert, spezielles Simplex) vor – die *Ordnungspolytope*. Ordnungspolytope bieten einerseits zwar einen einfacheren Zugang als Birkhoff Polytope (da sie beispielsweise auch niederdimensional vorkommen und partiell geordnete Mengen generell einen einfacheren Zugang bieten als doppelt stochastische Matrizen), andererseits erfordern sie einen größeren Aufwand, um die Terminologie bereitzustellen und die nötigen Strukturaussagen zu zeigen. Dies werden wir in der gebotenen Ausführlichkeit in diesem Abschnitt tun und uns zusätzlich am Ende einige niederdimensionale Beispiele betrachten (Beispiel 2.5.12). Den Satz über die Komprimiertheit von Ordnungspolytopen werden wir jedoch lediglich angeben. Auch auf spezielle Simplex in Ordnungspolytopen werden wir an dieser Stelle noch nicht eingehen, sondern uns in Abschnitt 3 (genauer: Beispiel 3.1.5) damit befassen.

Wir definieren zunächst das *Ordnungspolytop* (vergl. [Sta86, S. 10]; vergl. Definition 2.1.3 für den Terminus “überdeckt,,“):

Definition 2.5.1:

Sei $\Omega := \{x_1, \dots, x_n\}$ eine bzgl. \leq_Ω partiell geordnete Menge. Wir können die Menge aller Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als n –dimensionalen \mathbb{R} –Vektorraum auffassen (indem wir jedes f mit seinem

Bildvektor identifizieren). Dies ausnutzend definieren wir das **ORDNUNGSPOLYTOP** $\mathcal{O}(\Omega)$ als die Menge aller $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, für die gilt:

(a)

$$\forall x \in \Omega : 0 \leq f(x) \leq 1,$$

(b)

$$\forall x, y \in \Omega : y \text{ überdeckt } x \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Bemerkung 2.5.2:

Aufgrund der Bedingung (b) reicht es offensichtlich, (a) abzuschwächen zu

$$\forall x \in \Omega : (x \text{ ist minimal bzgl. } \leq_{\Omega} \Rightarrow 0 \leq f(x)) \wedge (x \text{ ist maximal bzgl. } \leq_{\Omega} \Rightarrow f(x) \leq 1).$$

Konvention:

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die x_i aus Ω stets natürlich beschriftet bzgl. \leq_{Ω} sind, d. h. es gilt (vergl. Definition 2.1.2):

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : x_i \leq_{\Omega} x_j \Rightarrow i \leq j.$$

Unser nächstes Ziel ist es, die Dimension und die Facetten (im Sinne der Ermittlung von Stützhyperebenen, d. h. einer \mathcal{H} -Beschreibung) von Ordnungspolytopen zu bestimmen. Dafür benötigen wir zunächst den Terminus der *linearen Erweiterung* (vergl. [Ath05, S. 170] sowie [Wel05, S. 248] und [Sta86, S. 10]).

Definition 2.5.3:

Seien (Ω, \leq_{Ω}) wie zuvor. Dann heißt $\mathcal{L}(\Omega)$ die Menge der **LINEREN ERWEITERUNGEN** von Ω und ist definiert durch:

$$\mathcal{L}(\Omega) := \{\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in S_n \mid \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : x_i \leq_{\Omega} x_j \Rightarrow \sigma(i) \leq \sigma(j)\}.$$

$\mathcal{L}(\Omega)$ ist also die Menge ordnungserhaltenden Permutationen auf Ω oder, anders ausgedrückt, die Menge aller totalen Ordnungen auf Ω , die \leq_{Ω} respektieren.

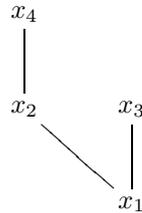
Beispiel 2.5.4:

Sei Ω wie zuvor.

(a) Ist Ω bzgl. ihrer Indizes aufsteigend total geordnet, so gilt

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{\text{id}_n\}.$$

(b) Sei $n = 4$ und \leq_{Ω} definiert durch



Dann gilt:

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{\text{id}_4, (x_1, x_3, x_2, x_4), (x_1, x_2, x_4, x_3)\}.$$

Satz 2.5.5:

Seien (Ω, \leq_{Ω}) wie zuvor. Dann hat das Ordnungspolytop $\mathcal{O}(\Omega)$ die Dimension n und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ liegt in einer Facette des Ordnungspolytopes genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist (vergl. [Sta86, S. 10] (inkl. Beweis)):

- (a) $\exists x \in \Omega : f(x) = 0 \wedge x$ ist minimal bzgl. \leq_{Ω} .
- (b) $\exists x \in \Omega : f(x) = 1 \wedge x$ ist maximal bzgl. \leq_{Ω} .
- (c) $\exists x, y \in \Omega : x \neq y \wedge f(x) = f(y) \wedge y$ überdeckt x bzgl. \leq_{Ω} .

Beweis:

Da $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ reicht es zu zeigen, dass $\dim(\mathcal{O}(\Omega)) \geq n$. Gemäß Definition 2.5.3 gehören alle $f \in \mathbb{R}^n$ zu $\mathcal{O}(\Omega)$, für die ein $\sigma \in \mathcal{L}(\Omega)$ existiert, mit $(y_1, \dots, y_n) := \sigma((x_1, \dots, x_n))$ und

$$0 \leq f(y_1) \leq \dots \leq f(y_n) \leq 1.$$

Da gemäß obiger Konvention und Beispiel 2.5.4 zumindest id_n in $\mathcal{L}(\Omega)$ liegt, müssen insbesondere die Punkte

$$(0, \dots, 0)^T, (0, 0, \dots, 0, 1)^T, (0, 0, \dots, 1, 1)^T, \dots, (0, 1, \dots, 1, 1)^T, (1, \dots, 1)^T$$

in $\mathcal{O}(\Omega)$ liegen. Da diese affin unabhängig sind, definieren sie ein n -dimensionales Simplex, das somit ebenfalls in $\mathcal{O}(\Omega)$ enthalten ist. Also gilt $\dim(\mathcal{O}(\Omega)) = n$.

Für die Facetten betrachten wir die Definition 2.5.1 des Ordnungspolytopes. Offenbar werden durch die beiden dort angeführten, unabhängigen Bedingungen bereits Halbräume festgelegt. Versuchen wir nun, Punkte zu finden, die im Rand dieser Halbräume liegen, so folgen sofort die Aussagen (a) und (b) aus der ersten Bedingung. Die Aussage (c) folgt ebenfalls sofort aus der zweiten Bedingung. Aus der Bemerkung im Anschluss an Definition 2.5.1 folgt, dass durch die erste Bedingung keine weiteren Facetten definiert werden. Aus der zweiten Bedingung ließe sich lediglich noch die Bedingung aufstellen

$$(*_1) \quad f(x) = f(z) \text{ mit } x \leq_{\Omega} z \wedge [x, z] \neq \{x, z\}.$$

Nehmen wir an, durch $(*_1)$ sei eine Facette definiert und es gelte

$$[x, z] = \{x, y_1, \dots, y_k, z\} \text{ mit } x \leq_{\Omega} y_1 \leq_{\Omega} \dots \leq_{\Omega} y_k \leq_{\Omega} z.$$

Dann folgt jedoch, aufgrund der nun gegebenen Überdeckungen, sofort aus der zweiten Bedingung von Definition 2.5.1 und $(*_1)$, dass

$$f(x) = f(y_1) = f(y_2) = \dots = f(y_k) = f(z).$$

Somit kann $(*_1)$ keine Facette sein, da $(*_1)$ lediglich $k + 1$ bereits durch (b) definierte Facetten beschreibt (anders ausgedrückt: $(*_1)$ ist offenbar eine Seite von $\mathcal{O}(\Omega)$, in der sich $k + 1$ Facetten von $\mathcal{O}(\Omega)$ schneiden).

□

In Zukunft betrachten wir statt der Menge Ω (Ω sei hier wie zuvor) auch die beschränkte Menge $\Omega^0 := \Omega \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ mit $\hat{0}$ als eindeutigem minimalen und $\hat{1}$ als eindeutigem maximalen Element (siehe Definition 2.1.3). Das zugehörige Ordnungspolytop $\mathcal{O}(\Omega^0)$ definieren wir dann durch die $g \in \mathbb{R}^{n+2}$, für die gilt

$$g(\hat{0}) = 0 \wedge g(\hat{1}) = 1 \wedge g(x) \leq g(y), \text{ falls } x \leq_{\Omega^0} y.$$

Korollar 2.5.6:

Die Anzahl der Facetten in $\mathcal{O}(\Omega^0)$ entspricht der Summe aus der Anzahl der Überdeckungsrelationen in Ω bzgl. \leq_{Ω} , der Anzahl der Elemente, die durch $\hat{1}$ überdeckt werden und der Anzahl der Elemente, die $\hat{0}$ überdecken (vergl. [Sta86, S. 10]).

□

Um die Struktur des Seitenverbandes von Ordnungspolytopen beschreiben zu können, verallgemeinern wir die Überlegung aus dem indirekten Argument im Beweis von Satz 2.5.5: Da sich die Seiten eines Ordnungspolytopes aus dem Schnitt verschiedener Facetten ergeben, folgt direkt, dass es zu jeder Seite eine Zerlegung $\rho := \{B_1, \dots, B_r\}$ von Ω^0 geben muss, so dass die entsprechende Seite definiert wird durch

$$F_\rho := \{g \in \mathcal{O}(\Omega^0) \mid g \text{ ist konstant auf jedem } B_i \in \rho\}.$$

Es bleibt zu klären, für welche Zerlegungen ρ die Menge F_ρ tatsächlich eine Seite ist. Hierzu hatten wir im vorherigen Beweis gesehen, dass wir eine Seite vorliegen haben, wenn für jedes B_i einer Zerlegung gilt

$$\exists x, z : B_i = [x, z].$$

Der folgende Satz legt fest, dass auch die Umkehrung gilt (vergl. [Sta86, S. 11] für weitere Details):

Satz und Definition 2.5.7:

Seien $(\Omega^0, \leq_{\Omega^0})$ wie zuvor. Eine Zerlegung $\rho := \{B_1, \dots, B_r\}$ von Ω^0 heißt SEITEN-ZERLEGUNG, falls F_ρ eine Seite von $\mathcal{O}(\Omega^0)$ ist. ρ heißt darüberhinaus GESCHLOSSEN, falls

$$\forall i \neq j \exists g \in F_\rho : g(B_i) \neq g(B_j).$$

ρ heißt ZUSAMMENHÄNGEND, falls jeder Block B_i zusammenhängend bzgl. \leq_{Ω^0} ist. Wir definieren eine Relation \triangleleft_ρ auf ρ durch

$$\forall B_i, B_j \in \rho : B_i \triangleleft_\rho B_j \Leftrightarrow \exists x \in B_i, y \in B_j : x \leq_{\Omega^0} y.$$

Wir nennen ρ VERGLEICHBAR (engl.: “compatible”), falls \triangleleft_ρ antisymmetrisch ist. Ist ρ vergleichbar, so ist ρ insbesondere auch KONVEX, d. h. es gilt

$$\forall B_i \in \rho \forall x, z \in B_i \forall y \in \Omega^0 : y \in [x, z] \Rightarrow y \in B_i.$$

Mit dieser Terminologie gilt der Satz:

Eine Zerlegung ρ von Ω^0 ist eine geschlossene Seiten-Zerlegung genau dann, wenn ρ zusammenhängend und vergleichbar ist.

Mit Hilfe dieses Resultates werden wir in die Lage versetzt, Aussagen über die Ecken von Ordnungspolytopen zu treffen. Hierzu benötigen wir zunächst noch folgende Terminologie (vergl. hierfür und für das anschließende Korollar [Ath05, S. 166], [Sta86, S. 11f., Theorem 1.2 und Korollar 1.3]):

Definition 2.5.8:

Sei Ω wie zuvor. Dann ist ein (ORDNUNGS-)IDEAL oder FILTER in Ω eine Teilmenge $I \subseteq \Omega$, für die gilt:

$$\forall i, j \in \Omega : i \leq_\Omega j \wedge i \in I \Rightarrow j \in I.$$

Beispiel 2.5.9:

Sei (Ω, \leq_Ω) wie in Beispiel 2.5.4 (b). Dann gibt es die folgenden Filter auf Ω bzgl. \leq_Ω :

$$\emptyset, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Korollar 2.5.10:

Sei $(\Omega^0, \leq_{\Omega^0})$ wie zuvor. Dann sind die Ecken von $\mathcal{O}(\Omega^0)$ die Bilder der charakteristischen Funktion der (nichtleeren) Filter von Ω^0 (als Vektoren aufgefasst bzgl. der Ordnung \leq_{Ω^0} von Ω^0); dementsprechend ist $\mathcal{O}(\Omega)$ ein 0/1-Polytop (man beachte, dass man lediglich in Ω^0 wegen $g(\hat{1}) = 1$ nach Voraussetzung fordern muss, dass die Filter nicht leer sind. Außerdem muss man für Ω^0 wegen $g(\hat{0}) = 0$ voraussetzen, dass es keinen Filter gibt, der $\hat{0}$ enthält. Betrachtet man lediglich Ω , so gelten diese Einschränkungen nicht und der leere Filter ist zugelassen).

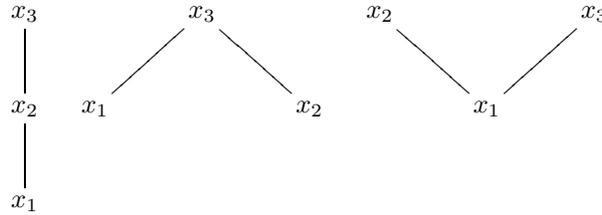
Bemerkung 2.5.11:

Die gesamte hier verwendete Darstellung von Ordnungspolytopen orientiert sich an Stanley. Bei Athanasiadis werden Ordnungspolytope über die \mathcal{H} -Darstellung im Sinne von Satz 2.5.5 definiert. Man beachte außerdem, dass bei Athanasiadis in allen auf Ordnungen beruhenden Definitionen die Ordnungsrelationen gerade umgekehrt sind, was aus Isomorphiegründen natürlich belanglos ist (für die genaue Darstellung bei Athanasiadis vergl. [Ath05, S.166]).

Beispiel 2.5.12:

Wir wollen nun drei sehr einfache Ordnungspolytope betrachten, die wir mit $\mathcal{O}_{(1,1,1)}$, $\mathcal{O}_{(2,1)}$ und $\mathcal{O}_{(1,2)}$ bezeichnen werden (die Bezeichnungen sind willkürlich gewählt (aus der Ordnungsstruktur wird deutlich, warum); diese Art der Bezeichnung eignet sich allerdings nicht generell für Ordnungspolytope, da aus ihr nicht ersichtlich wird, welche Elemente zu welchen in der \leq_Ω -Relation stehen) und auf die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch Bezug nehmen werden (vergl. insbesondere Beispiel 3.1.5 und Abschnitt 5.2.3).

Es sei $\Omega := \{x_1, x_2, x_3\}$ und die Ordnungsstrukturen von $\mathcal{O}_{(1,1,1)}$, $\mathcal{O}_{(2,1)}$ und $\mathcal{O}_{(1,2)}$ (bzgl. \leq_Ω) seien gegeben durch:



(a) Das Polytop $\mathcal{O}_{(1,1,1)}$ hat gemäß Definition 2.5.8 folgende Filter:

$$\emptyset, \{x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Somit ergibt sich gemäß Korollar 2.5.10 die \mathcal{V} -Darstellung:

$$\mathcal{V}(\mathcal{O}_{(1,1,1)}) := \text{conv} \{(0, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 1, 1)^T\}.$$

Es handelt sich bei $\mathcal{O}_{(1,1,1)}$ offenbar um ein 3-Simplex. Dies geht einher mit dessen \mathcal{H} -Darstellung, die wir sofort aus Satz 2.5.5 ablesen können:

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = 0\}, & H_2 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = v_2\} \\ H_3 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_2 = v_3\}, & H_4 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_3 = 1\}. \end{aligned}$$

(b) Unter Verwendung der unter (a) genannten Definition und Sätze erhalten wir für $\mathcal{O}_{(2,1)}$ die Filter

$$\emptyset, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Somit erhalten wir die \mathcal{V} -Darstellung

$$\mathcal{V}(\mathcal{O}_{(2,1)}) = \text{conv} \{(0, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 1, 1)^T\}.$$

Wieder lässt sich aufgrund der vorgegebenen Ordnungsstruktur auch die \mathcal{H} -Darstellung leicht ablesen:

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = 0\}, & H_2 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_2 = 0\}, & H_3 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = v_3\}, \\ H_4 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_2 = v_3\}, & H_5 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_3 = 1\}. \end{aligned}$$

Offenbar handelt es sich bei $\mathcal{O}_{(2,1)}$ geometrisch betrachtet um eine (auf dem Kopf stehende) Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

(c) Zuletzt betrachten wir die Filter von $\mathcal{O}_{(1,2)}$:

$$\emptyset, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}$$

und die daraus resultierende \mathcal{V} -Darstellung

$$\mathcal{V}(\mathcal{O}_{(1,2)}) = \text{conv} \{(0, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 1, 1)^T\}.$$

Als \mathcal{H} -Darstellung ergibt sich dieses Mal

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = 0\}, & H_2 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = v_2\}, & H_3 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = v_3\}, \\ H_4 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_2 = 1\}, & H_5 &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_3 = 1\}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\mathcal{O}_{(2,1)}$ und $\mathcal{O}_{(1,2)}$ sich stark ähneln – nicht nur kombinatorisch, sondern insbesondere auch geometrisch, denn die geometrische Entsprechung von $\mathcal{O}_{(1,2)}$ ist ebenfalls eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche (deren Spitze in x_1 -Richtung, zeigt).

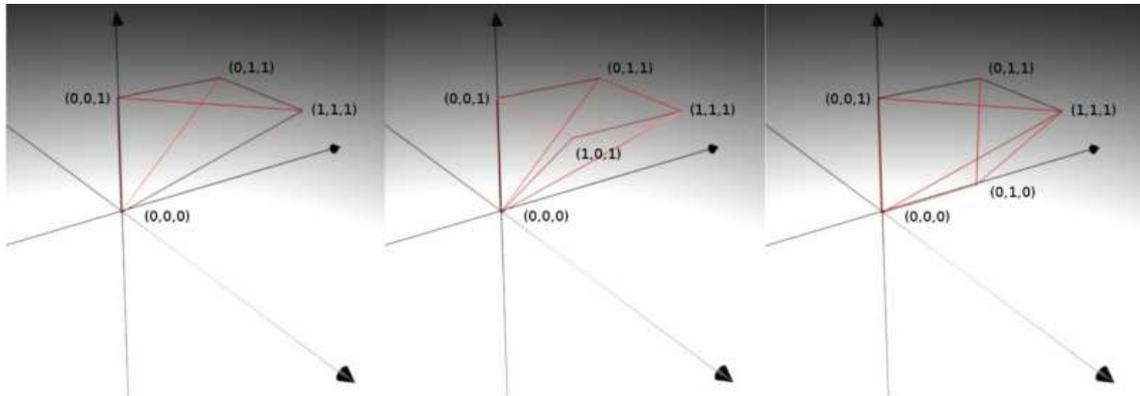


Abbildung 5: Die Ordnungspolytope $\mathcal{O}_{(1,1,1)}$, $\mathcal{O}_{(2,1)}$ und $\mathcal{O}_{(1,2)}$ (jeweils als Gittermodell).

Ordnungspolytope verfügen nicht nur, wie wir in Abschnitt 3.1 sehen werden, stets über ein spezielles Simplex, sondern sie bieten sich auch, wie eingangs erwähnt, als Beispielklasse von Polytopen für die Betrachtung ihres Ehrhart–Polynoms, den diesbezüglichen Resultaten von Athanasiadis (Abschnitt 4) und des darauf bezogenen Zerlegungsalgorithmus (Abschnitt 5) an, da sie (unter anderem) die folgende wichtige Bedingung erfüllen (vergl. [Hib01, S. 2543, Theorem 1.1 und Beispiel 1.3 (b)]):

Satz 2.5.13 (Ohsugi, Hibi):

Ordnungspolytope sind komprimiert.

2.6 Simpliciale Vereinigungen und Quotientenpolytope

In diesem Abschnitt führen wir *simpliciale Vereinigungen* und das *Quotientenpolytop* ein. Erstere benötigen wir in Abschnitt 4, da die nun bereits mehrfach angedeutete Zerlegung der Triangulierung eines Polytopes als durch zwei bestimmte Simplicialkomplexe induzierte Struktur – nämlich als deren simpliciale Vereinigung – beschrieben werden kann. Wir liefern in diesem Abschnitt (neben der Definition) ein einfaches Beispiel und bereiten mit einer Aussage über die h -Vektoren der (an einer simplicialen Vereinigung) beteiligten Simplicialkomplexe bereits Abschnitt 4 vor.

Das Quotientenpolytop ist für uns gleich in mehrfacher Hinsicht wichtig: Wir werden hierzu, nachdem wir es definiert haben, ein Lemma von Reiner und Welker diskutieren, das wir in Abschnitt 3 für den Beweis des ersten klassifizierenden Satzes (Satz 3.2.2) benötigen. Wir werden es

darüberhinaus in Abschnitt 5.1 wieder aufgreifen, um die Existenz einer \mathcal{H} -Darstellung innerhalb des dort von uns entwickelten Algorithmus zu zeigen. Außerdem benutzen wir es, um im Abschnitt 3 zwei Lemmata von Athanasiadis (Lemma 3.1.6 und 3.1.7) zu beweisen, die einerseits ebenfalls im Beweise von Satz 3.2.2 verwendet werden und andererseits eine Vorbereitung des Haupttheorems (Theorem 4.2.1) aus Abschnitt 4 darstellen.

Wir definieren zunächst die simpliziale Vereinigung (vergl. [Ath05, ebd.] und [Wel05, S. 259, Definition 3.7]):

Definition 2.6.1:

Seien Δ_1, Δ_2 zwei Simplizialkomplexe mit disjunkten Eckenmengen. Dann definieren wir die SIMPLIZIALE VEREINIGUNG $\Delta_1 * \Delta_2$ von Δ_1, Δ_2 als den polytopalen Komplex, der aus folgenden Facetten F besteht:

$$F = \text{conv} \{F_1, F_2\} \text{ mit } \forall i \in \{1, 2\} : F_i \text{ ist maximale Seite von } \Delta_i.$$

Die übrigen Seiten von $\Delta_1 * \Delta_2$ ergeben sich dann aus den Schnitten der Facetten (vergl. [Tza06, S. 1193]. Es wird außerdem implizit durch die weitere Verwendung der simplizialen Vereinigung bei Athanasiadis und anderen gefordert, dass die beiden zu Grunde liegenden Simplizialkomplexe nicht nur disjunkte Eckenmengen haben, sondern auch die beiden affinen Räume, über denen diese zwei definiert sind, keine nicht trivialen, gemeinsamen Unterräume besitzen (vergl. auch folgende Bemerkung, Teil (a)).).

Handelt es sich bei Δ_1, Δ_2 um polytopale Komplexe, so wollen wir $\Delta_1 * \Delta_2$ als POLYTOPALE VEREINIGUNG bezeichnen.

Bemerkung 2.6.2:

Es seien die Definitionen wie zuvor.

(a) Es gilt stets:

$$\dim(\Delta_1 * \Delta_2) = \dim(\Delta_1) + \dim(\Delta_2) + 1.$$

(b) Besteht einer der beiden der simplizialen Vereinigung zu Grunde liegenden Simplizialkomplexe Δ_1, Δ_2 (o.B.d.A.: Δ_1) lediglich aus der leeren Menge, so gilt

$$\emptyset * \Delta_2 = \Delta_2.$$

Die Aussage bezüglich der Dimension aus (a) ist hiermit verträglich wegen

$$\dim(\emptyset * \Delta_2) \stackrel{(a)}{=} \dim(\emptyset) + \dim(\Delta_2) + 1 = -1 + \dim(\Delta_2) + 1 = \dim(\Delta_2).$$

(c) Seien Δ_1, Δ_2 und Δ_3 Simplizialkomplexe, deren affine Grundräume paarweise keine nichttrivialen, gemeinsamen Unterräume besitzen. Dann gilt

$$(\Delta_1 * \Delta_2) * \Delta_3 = \Delta_1 * (\Delta_2 * \Delta_3).$$

Beispiel 2.6.3:

Sei Δ_1 der aus dem 1-Simplex

$$\text{conv} \{(-3, 1, 0)^T, (-3, 1, 2)^T\}$$

bestehende Simplizialkomplex und Δ_2 der aus den 1-Simplizes

$$\text{conv} \{(3, 0, 1)^T, (3, 2, 1)^T\} \text{ und } \text{conv} \{(3, 2, 1)^T, (2, 4, 1)^T\}$$

bestehende Simplizialkomplex. Dann ist $\Delta_1 * \Delta_2$ der Simplizialkomplex, der aus den folgenden beiden 3-Simplizes besteht:

$$\text{conv} \{(-3, 1, 0)^T, (-3, 1, 2)^T, (3, 0, 1)^T, (3, 2, 1)^T\} \text{ und}$$

$$\text{conv} \{(-3, 1, 0)^T, (-3, 1, 2)^T, (3, 2, 1)^T, (2, 4, 1)^T\}$$

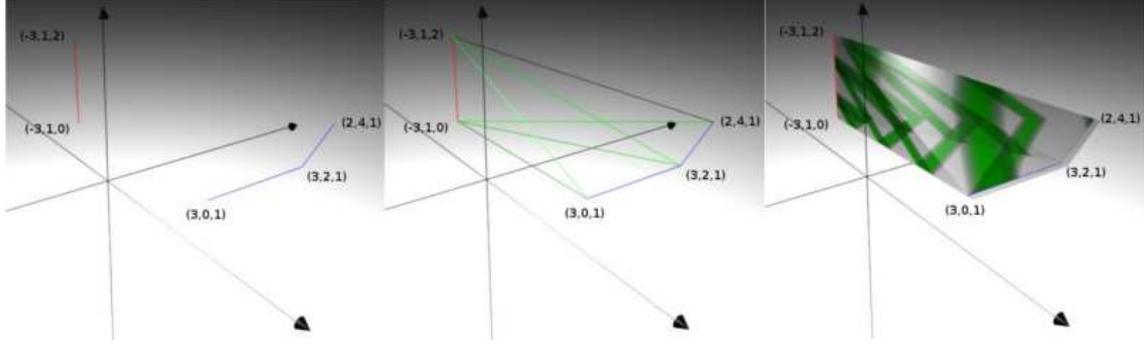


Abbildung 6: Die beiden Simplizialkomplexe Δ_1 und Δ_2 sowie deren simpliziale Vereinigung $\Delta_1 * \Delta_2$ als Gittermodell und mit Seitenflächen.

Bezüglich der h -Polynome simplizialer Vereinigungen lässt sich folgende (für Abschnitt 4 wichtige) Aussage beweisen (vergl. [Wel05, S. 259, Korollar 3.8]):

Lemma 2.6.4 (Reiner, Welker):

Seien $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 * \Delta_2$ wie oben. Dann gilt für die Erzeugendenfunktionen der zugehörigen h -Vektoren:

$$h(\Delta_1 * \Delta_2, t) = h(\Delta_1, t) \cdot h(\Delta_2, t).$$

Neben simplizialen Vereinigungen müssen wir in diesem Abschnitt noch das *Quotientenpolytop* definieren (vergl. [Ath05, S. 167], [Wel05, S. 260, Definition 3.10]):

Definition 2.6.5:

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^m$ ein m -dimensionales Polytop und V ein beliebiger Unterraum von \mathbb{R}^m . Dann ist das QUOTIENTENPOLYTOP $P/V \subseteq \mathbb{R}^m/V$ definiert durch

$$P/V := \{p + V \mid p \in P\}.$$

Offensichtlich kann P/V mit dem Bild $\pi(P)$ von P unter einer (linearen) Einbettung $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-\dim V}$, dessen Kern V ist, identifiziert werden.

Mit Hilfe dieser Definition von Quotientenpolytopen können wir das folgende, für die gesamte weitere Arbeit essentielle Lemma formulieren (vergl. [Ath05, ebd.], [Wel05, S. 261, Proposition 3.12]):

Lemma 2.6.6 (Reiner, Welker):

Sei P ein m -dimensionales Polytop in \mathbb{R}^m mit einer Triangulierung Δ , die isomorph ist zu $\Sigma * \Delta'$, wobei Δ' einen (nicht näher spezifizierten) Simplizialkomplex und Σ ein Simplex bezeichne, das nicht vollständig im Rand von P enthalten ist. Sei V der lineare Unterraum von \mathbb{R}^m , der parallel zum affinen Spann von Σ ist. Dann ist der Randkomplex des Quotientenpolytopes $P/V \subseteq \mathbb{R}^m/V$ isomorph zu $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ und besitzt eine Triangulierung, die isomorph ist zu $\sigma * \Delta'$, wobei σ einen Punkt im Inneren von P/V ist.

3 Spezielle Simplizes

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Polytopen, die sogenannte *spezielle Simplizes* (diese wurden bereits in der Einleitung definiert. Eine formale Definition geben wir in 3.1.1) enthalten. Der Terminus wurde von Athanasiadis eingeführt und es konnte gezeigt werden, dass für Polytope, die über spezielle Simplizes verfügen, (unter evtl. zur Hilfenahme weiterer Voraussetzungen) starke Eigenschaften gezeigt werden können; eine dieser Eigenschaften bezieht sich auf Ehrhart-Polynome und wird von uns in Abschnitt 4.2 präsentiert und bildet die Grundlage für den späteren Zerlegungsalgorithmus von Polytopen mit speziellen Simplizes, den wir in Abschnitt 5 entwickeln. Spezielle Simplizes sind jedoch bereits für sich genommen ein interessanter Gegenstand für weitere Untersuchungen, da bis jetzt recht wenig über sie bekannt ist: Man kennt zwar Beispiellklassen von Polytopen, die über spezielle Simplizes verfügen (Birkhoff- und Ordnungspolytope), findet einige weitere, niederdimensionale Beispiele und kann für ihre rückwärtige lexikographische Triangulierung einen Zusammenhang zu simplizialen Vereinigungen herstellen, aber ansonsten ließen sich bislang keine weiteren, generellen Aussagen über Polytope mit speziellen Simplizes treffen. Insbesondere war bislang nicht bekannt:

Frage 1 : Gibt es für jedes beliebige n, m mit $m \in \mathbb{N}_{>0}, n \in \mathbb{N}_{\geq m}$ ein n -dimensionales Polytop mit speziellem m -Simplex?

Frage 2 : Falls ja: Wie ist ihre kombinatorische Struktur? Anders gesagt: Wie lässt sich allgemein für einen beliebigen f -Vektor eines n -dimensionalen Polytopes die Frage „Enthält dieses Polytop ein spezielles (m) -Simplex?“ beantworten?

Frage 3 : Gibt es ein oder mehrere (nicht isomorphe) kombinatorische Verfahren, mit denen sich Polytope mit speziellen Simplizes erzeugen lassen?

Frage 4 : Falls ja: Sind diese Verfahren derart, dass sie auch eine geometrische Konstruktion ermöglichen?

Frage 5 : Ist es möglich (evtl. anhand der vorher entdeckten Konstruktionsverfahren) die Menge der Polytope mit speziellen Simplizes vollständig zu klassifizieren?

Diese Fragen bilden das Hauptziel dieser Arbeit und werden von uns im folgenden Abschnitt sämtlich für den Fall *zahmer* Polytope mit speziellen Simplizes beantwortet (zahme Polytope definieren wir in Definition 3.2.6). Hierfür werden wir zunächst in Abschnitt 3.1 spezielle Simplizes definieren und die bekannten Resultate und Beispiele vorstellen, in Abschnitt 3.2 werden wir uns intensiv mit den oben gestellten Fragen auseinander setzen und diese vollständig beantworten, in Abschnitt 3.4 schließlich berechnen wir explizit die zahmen speziellen Simplizes der Dimensionen 2 bis 5 (wobei wir uns in Dimension 4 und 5 aufgrund der Vielzahl teilweise beschränken müssen).

3.1 Definition und bekannte Beispiele

In diesem Abschnitt fassen wir die bisher bekannten Resultate über spezielle Simplizes zusammen. Wir beginnen mit der Definition und liefern niederdimensionale Beispiele. Anschließend betrachten wir, wie bereits an verschiedener Stelle angekündigt, noch einmal Birkhoff- und Ordnungspolytope und weisen für diese beiden Polytopklassen nach, dass sie stets über ein spezielles Simplex (bestimmter Dimension) verfügen. Abschließend zeigen wir zwei technische Lemmate von Athanasiadis, die wir im folgenden Abschnitt 3.2 sowie im Abschnitt 4.2 benötigen.

Definition 3.1.1:

Sei P ein n -dimensionales Polytop in \mathbb{R}^q mit Seitenkomplex $\mathcal{F}(P)$ und sei Σ ein Simplex, das von m Ecken von P aufgespannt wird. Dann heißt Σ ein **SPEZIELLES SIMPLEX** in P , falls jede Facette von P genau $m - 1$ Ecken von Σ enthält (und somit jeweils genau eine Ecke von Σ nicht enthält) (vergl. [Ath05, S. 167]).

Bemerkung 3.1.2:

Man beachte, dass spezielle Simplizes in P niemals im Rand von P liegen können, da sie ansonsten komplett innerhalb einer Facette liegen müssten, die dann, im Widerspruch zur Definition, alle Ecken des speziellen Simplexes enthalten müsste.

Beispiel 3.1.3:

Es ist nicht ganz offensichtlich, dass es überhaupt niederdimensionale spezielle Simplizes gibt. Anhand von zwei Graphiken zeigen wir zwei der wenigen Beispiele:

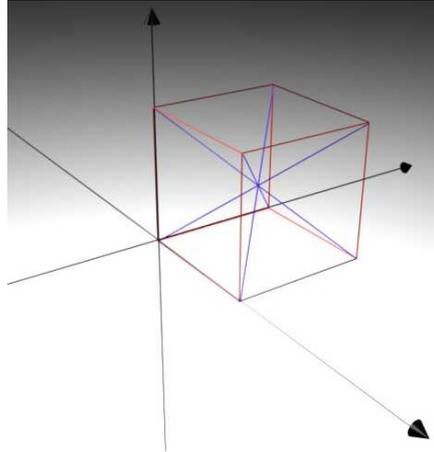


Abbildung 7: Die vier speziellen 1-Simplizes (blau) in einem 3-dimensionalen Würfel (Gittermodell).

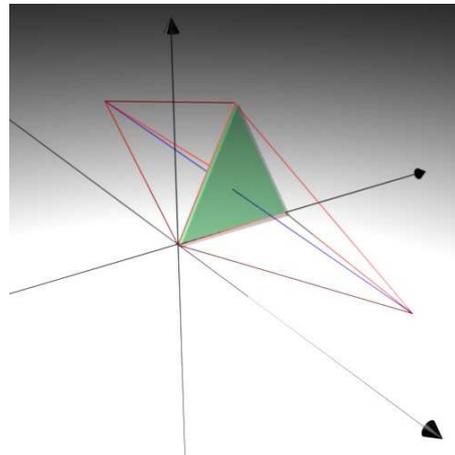


Abbildung 8: Das spezielle 1-Simplex (blau) und 2-Simplex (grün) in einer 3-dimensionalen Bipyramide mit dreieckiger Grundseite (Gittermodell).

Beispiel 3.1.4:

Sei P_n das Birkhoff-Polytop und seien v_1, \dots, v_n die $n \times n$ Permutationsmatrizen, die den Elementen der zyklischen Untergruppe der symmetrischen Gruppe entsprechen, die durch die Permutation $(1\ 2\ \dots\ n)$ erzeugt wird (oder n beliebigen Permutationsmatrizen mit paarweise disjunkten Trägern). Dann sind v_1, \dots, v_n die Ecken eines speziellen Simplexes in P_n , denn jede Facette von

P_n ist definiert durch eine Gleichung der Form $x_{ij} = 0$ im $\mathbb{R}^{n \times n}$ und enthält genau eine der Ecken v_1, \dots, v_n nicht. Dies ist offensichtlich, da die v_k von der folgenden Form sind:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

d. h. in jeder Zeile durchläuft die eine 1 jede Spalte schrittweise.

Beispiel 3.1.5:

Sei $\Omega := \{x_1, \dots, x_n\}$ eine bzgl. \leq_Ω partiell geordnete, gestaffelte Menge vom Rang $m - 1$ (mit $1 \leq m \leq n$) und $P := O(\Omega)$ das Ordnungspolytop von Ω in \mathbb{R}^n . Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ sei v_i der charakteristische Vektor des Filters aus Elementen von Ω vom Rang größer $m - i$ (d. h. v_i ist eine Ecke von P). Da eine Facette von P durch eine der folgenden Gleichungen definiert ist:

- (a) $\exists x \in \Omega : f(x) = 0 \wedge x$ ist minimal bzgl. \leq_Ω ,
- (b) $\exists x \in \Omega : f(x) = 1 \wedge x$ ist maximal bzgl. \leq_Ω ,
- (c) $\exists x, y \in \Omega : x \neq y \wedge f(x) = f(y) \wedge y$ überdeckt x bzgl. \leq_Ω ,

folgt dass v_1, \dots, v_m die Ecken eines speziellen Simplexes in P sind (vergl. Definition 2.1.3, Definition 2.5.1. Vergl. außerdem Definition 2.5.8 und Satz 2.5.10, um zu überprüfen, dass die v_i tatsächlich Ecken sind, sowie Satz 2.5.5 für die Darstellung der Facetten von P). Zur Konkretisierung betrachten wir noch einmal die Ordnungspolytope aus Beispiel 2.5.12:

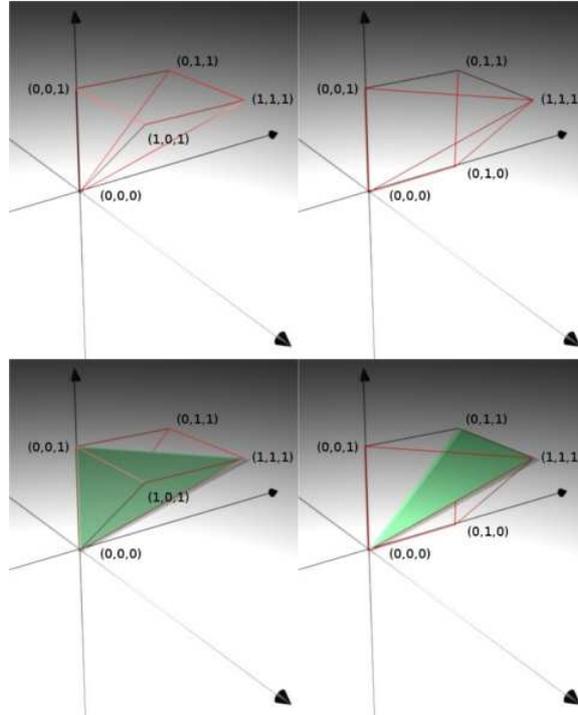


Abbildung 9: Die Ordnungspolytop $\mathcal{O}_{(2,1)}$ und $\mathcal{O}_{(1,2)}$ jeweils mit und ohne spezielles Simplex (Gittermodell).

- (i) Für $\mathcal{O}_{(1,1,1)}$, das ja bereits ein Simplex ist, folgt sofort aufgrund der totalen Ordnung der zu Grunde liegenden Menge $\{x_1, x_2, x_3\}$, dass $v_0 = (0, 0, 0)^T, v_1 = (0, 0, 1)^T, v_2 = (0, 1, 1)^T$ und $v_3 = (1, 1, 1)^T$. Demnach ist $\mathcal{O}_{(1,1,1)}$ hier selbst das spezielle Simplex.
- (ii) Für $\mathcal{O}_{(2,1)}$ ergibt sich nach der obigen Definition der v_i durch Abgleich mit der Ordnungsstruktur, dass $v_0 = (0, 0, 0)^T, v_1 = (0, 0, 1)^T, v_2 = (1, 1, 1)^T$. Somit enthält $\mathcal{O}_{(2,1)}$ ein spezielles 2-Simplex.
- (iii) Für $\mathcal{O}_{(1,2)}$ erhalten wir ganz analog zu (ii): $v_0 = (0, 0, 0)^T, v_1 = (0, 1, 1)^T, v_2 = (1, 1, 1)^T$ und somit ebenfalls ein spezielles 2-Simplex.

Wir benutzen nun das Lemma 2.6.6, um zwei Lemmata von Athanasiadis über spezielle Simplexes (vergl. [Ath05, S. 167f.] (inkl. Beweis)) zu beweisen, von denen einerseits das zweite in Abschnitt 3.2 im Beweis von Satz 3.2.2 benötigt wird und die zum anderen in Abschnitt 4.2 im Beweis von Theorem 4.2.1 Verwendung finden.

Lemma 3.1.6 (Athanasiadis):

Sei P ein n -dimensionales Polytop in \mathbb{R}^q und seien v_1, \dots, v_m die Ecken eines speziellen Simplexes in P . Falls F eine Seite von P mit Kodimension k (wobei $k \in \{1, \dots, m-1\}$) ist und F keine der Ecken v_1, \dots, v_k enthält, so muss F alle Ecken v_{k+1}, \dots, v_m enthalten.

Beweis:

Sei Σ das spezielle Simplex mit Ecken v_1, \dots, v_m . Jede Seite von P mit Kodimension k kann dargestellt werden als Schnitt von k Facetten (von P). Demnach können wir schreiben $F = F_1 \cap \dots \cap F_k$, wobei die F_j Facetten von P sind. Es gilt nach Voraussetzung:

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : v_i \notin F$$

und somit

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \exists j_i : v_i \notin F_{j_i}.$$

Da Σ spezielles Simplex ist, sind die Zahlen j_1, \dots, j_k verschieden (in jeder Facette liegt genau eine Ecke v_i von Σ nicht) und somit gilt:

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} \exists ! i \in \{1, \dots, k\} : v_i \notin F_j,$$

woraus sofort folgt

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} \forall i \in \{k+1, \dots, m\} : v_i \in F_j.$$

Somit gilt

$$\forall i \in \{k+1, \dots, m\} : v_i \in F_1 \cap \dots \cap F_k = F.$$

□

Lemma 3.1.7 (Athanasiadis):

Sei P ein n -dimensionales Polytop und sei $\tau := (v_p, v_{p-1}, \dots, v_1)$ eine Ordnung der Ecken von P , so dass $\sigma := \{v_1, \dots, v_m\}$ die Eckenmenge eines speziellen Simplexes Σ in P ist. Sei Δ der Simplicialkomplex auf der Menge $\{v_{m+1}, \dots, v_p\}$, der durch die rückwärtige, lexikographische Triangulierung $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(P) \setminus \sigma)$ bzgl. $\tau' := (v_{m+1}, \dots, v_p)$ definiert wird. Dann gilt :

- (i) Die rückwärtige lexikographische Triangulierung $\Delta_{\tau}(P)$ von P bzgl. τ ist isomorph zur simplizialen Vereinigung $\Sigma * \Delta$ (bzw. $\sigma * \Delta$: da es in diesem Beweis lediglich um die kombinatorische Struktur von P, Σ, Δ etc. geht, identifizieren wir Simplexes mit ihren Ecken. Insofern gilt beispielsweise $\Sigma * \Delta = \sigma * \Delta$).
- (ii) Δ ist isomorph zum Randkomplex eines simplizialen Polytopes der Dimension $n - m + 1$.

Beweis:

Sei $\forall i \in \{0, \dots, m\} : \sigma_i := \{v_1, \dots, v_i\}$ (mit $\sigma_0 := \emptyset$ und $\sigma_m = \sigma$) und sei für alle $i \in \{0, \dots, m\}$ Δ_i der Simplizialkomplex über der Menge $\{v_{i+1}, \dots, v_p\}$, der durch die rückwärtige lexikographische Triangulierung $\Delta_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(P) \setminus \sigma_i)$ von $\mathcal{F}(P) \setminus \sigma_i$ bzgl. der Ordnung (v_p, \dots, v_{i+1}) definiert wird. Außerdem sei $n := \dim(\Delta_0)$.

(i) Nach den obigen Voraussetzungen müssen wir zeigen, dass

$$\Delta_0 = \sigma_m * \Delta_m.$$

Der Beweis erfolgt indem wir durch vollständige Induktion über i zeigen, dass für alle $i \in \{0, \dots, m\}$ gilt: $\mathcal{F}(P) \setminus \sigma_{i-1}$ ist rein, $(n-i)$ -dimensional und $\Delta_0 = \sigma_i * \Delta_i$.

Offenbar gilt die Aussage für $i = 0$, da $\sigma_0 = \emptyset$ und $\Delta_0 = \emptyset * \Delta_0$ gemäß Bemerkung 2.6.2 (b). Nehmen wir also an, wir hätten die Aussage für $i-1$ gezeigt und vollziehen den Induktionsschritt (es sei hierbei $1 \leq i \leq m$):

Gemäß Induktionsvoraussetzung ist jede maximale Seite F aus $\mathcal{F}(P) \setminus \sigma_{i-1}$ eine Seite von P mit Kodimension $i-1$, denn

$$\begin{aligned} n &= \dim(P) = \dim(\Delta_0) \stackrel{(IV)}{=} \dim(\sigma_{i-1} * \Delta_{i-1}) \stackrel{(2.6.2(a))}{=} (i-2) + \dim(\Delta_{i-1}) + 1 \\ &= (i-1) + \dim(\mathcal{F}(P) \setminus \sigma_{i-1}). \end{aligned}$$

Da F keine der Ecken v_1, \dots, v_{i-1} enthält, folgt nach Lemma 3.1.6, dass $v_i \in F$. Dies impliziert, dass $\mathcal{F}(P) \setminus \sigma_i$ $(n-i)$ -dimensional ist, denn $\mathcal{F} \setminus \sigma_{i-1}$ ist $(n-i+1)$ -dimensional und einerseits kann die Dimension durch Wegnahme einer Ecke höchstens um 1 sinken, andererseits enthalten alle maximalen Seiten von $\mathcal{F} \setminus \sigma_{i-1}$ die Ecke v_i , d. h. diese sind in $\mathcal{F} \setminus \sigma_i$ nicht mehr vorhanden.

Aus demselben Argument folgt, dass $\mathcal{F} \setminus \sigma_i$ rein ist, denn $\mathcal{F} \setminus \sigma_{i-1}$ ist rein und damit sind insbesondere auch alle Seiten der Dimension 0 bis $n-i-1$ in Seiten der Dimension $n-i$ enthalten. Ferner gilt für jede Seite G aus $\mathcal{F} \setminus \sigma_{i-1}$ der Dimension 0 bis $n-i-1$, die nicht v_i enthält, dass sie in einer $n-i$ -dimensionalen Seite aus $\mathcal{F} \setminus \sigma_{i-1}$ liegt, die nicht v_i enthält, da G gerade der Schnitt eben dieser $n-i$ -dimensionalen Seiten ist. Da durch Wegnahme von v_i alle maximalen (d. h. $n-i+1$ -dimensionalen) Seiten verschwinden, sind die $n-i$ -dimensionalen Seiten maximal in $\mathcal{F} \setminus \sigma_i$ und somit ist $\mathcal{F} \setminus \sigma_i$ rein.

Daraus wiederum folgt $\Delta_{i-1} = v_i * \Delta_i$: Da v_i in allem maximalen Seiten liegt und in der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung v_i als erste Ecke betrachtet wird, folgt gemäß Definition 2.3.2, dass Δ_i der Simplizialkomplex ist, der sich aus Δ_i selbst sowie allen konvexen Hüllen der Mengen folgender Form zusammensetzt: v_i vereinigt mit der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung aller ridges von $\mathcal{F}(P) \setminus \sigma_{i-1}$. Dies entspricht gerade $v_i * \Delta_i$ (gemäß Definition 2.6.1). Hieraus folgt mit der Induktionsvoraussetzung $\Delta_0 = \sigma_{i-1} * \Delta_{i-1}$, dass

$$\Delta_0 \stackrel{(IV)}{=} \sigma_{i-1} * \Delta_{i-1} = \sigma_{i-1} * (v_i * \Delta_i) \stackrel{(2.6.2(c))}{=} (\sigma_{i-1} * v_i) * \Delta_i = \sigma_i * \Delta_i.$$

Dies war zu zeigen.

(ii) Sei V der zum affinen Spann der Ecken in σ parallele lineare Unterraum von \mathbb{R}^q und sei P/V das zu P gehörige Quotientenpolytop mit $\dim P/V = n-m+1$. Aus Teil (i) (hierfür benötigte man die Dimensionsaussage in der Induktion) und Lemma 2.6.6 folgt, dass Δ isomorph zu einer rückwärtigen lexikographischen Triangulierung des Randkomplexes von P/V ist. Dieser wiederum ist isomorph zum Randkomplex eines simplizialen Polytopes der Dimension $n-m+1$ nach Lemma 2.3.7.

□

Bemerkung 3.1.8:

Man beachte, dass das obige Lemma *keine* Äquivalenzaussage ist: es wird an dieser Stelle nichts darüber ausgesagt, wie ein Simplizialkomplex Δ beschaffen sein muss, damit $\Delta * \Sigma$ die rückwärtige,

lexikographische Triangulierung eines Polytopes P mit speziellem Simplex Σ ist. Hierzu hätte man an dieser Stelle auch keinerlei Anhaltspunkte, da es bis hierhin völlig unbekannt ist, welche Struktur die rückwärtige lexikographische Triangulierung eines Komplexes $P \setminus \Sigma$ (bzw. dieser Komplex selbst) hat, abgesehen von der Tatsache, dass sie isomorph zu einem simplizialen Polytop gleicher Dimension ist. Derartige Fragen können erst auf Grundlage der Äquivalenzaussage in Satz 3.2.2 zu Beginn des folgenden Kapitels gelöst werden.

3.2 Die vollständige Klassifikation und geometrische Konstruktion von zahmen Polytopen mit speziellen Simplizes

Nachdem wir nun einige Beispiele für spezielle Simplizes gesehen und bereits durch die beiden Lemmata von Athanasiadis Vorarbeit geleistet haben, werden wir uns den fünf zu Beginn des Kapitels gestellten Fragen über spezielle Simplizes widmen. Zur Erinnerung: Unser Ziel ist es, Polytope mit speziellen Simplizes kombinatorisch vollständig zu klassifizieren, Verfahren zu finden, mit denen entschieden werden kann, ob ein bestimmtes Polytop ein spezielles Simplex (ggf. einer bestimmten Dimension) enthält und schließlich Verfahren anzugeben, mit denen sich sowohl kombinatorisch als auch geometrisch alle Polytope (ggf. einer bestimmten Dimension) mit speziellen Simplizes (ggf. einer bestimmten Dimension) konstruieren lassen.

Um diese Fragen beantworten zu können, gehen wir folgendermaßen vor: Wir beweisen in Abschnitt 3.2.1 zunächst einen Satz, der zwei Bedingungen an ein Polytop liefert, die zusammengenommen äquivalent zur Existenz eines speziellen Simplexes sind und die Unterscheidung zwischen *zahmen* und *wilden* Polytopen motivieren; der Vorteil ist, dass sich mit diesen Bedingungen wesentlich einfacher arbeiten lässt, als mit der recht unhandlichen Definition von speziellen Simplizes. Mit diesem Satz als Grundlage werden wir insbesondere leicht erkennen, dass *Pyramidenbildung* eines Polytopes der Kern eines ersten (kombinatorischen wie geometrischen) Verfahrens ist, mit dem sich beliebige n -dimensionale zahme Polytope mit speziellem m -Simplex erzeugen lassen ($n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{<n}$).

In Abschnitt 3.2.2 werden wir sehen, dass es Polytope mit speziellen Simplizes gibt, die durch das erste Konstruktionsverfahren nicht erfasst werden. Wir entwickeln deshalb in diesem Abschnitt ein zweites (ebenfalls kombinatorisches wie geometrisches) Konstruktionsverfahren, das wir als *Muschelbildung* eines Polytopes bezeichnen werden. Wir werden in demselben Abschnitt außerdem das Verhältnis von Pyramiden- zu Muschelbildung klären, indem wir zeigen, dass bei gemischter, mehrfacher Anwendung beider Verfahren, die Reihenfolge irrelevant ist.

In Abschnitt 3.2.3 schließlich werden wir nachweisen, dass sich sämtliche Polytope mit speziellen Simplizes durch Pyramiden- oder Muschelbildung (bzw. eine Kombination aus beiden Verfahren) konstruieren lassen und auf diese Art und Weise die Menge aller Polytope mit speziellen Simplizes klassifizieren.

Konvention:

Wir gehen stets, sofern nicht explizit etwas anderes gefordert wird, davon aus, dass jedes hier behandelte Polytop den Ursprung enthält.

Definition 3.2.1:

Um in Zukunft einfacher über Mengen von Polytopen mit speziellen Simplizes sprechen zu können, vereinbaren wir einige Kurznotationen:

$$\begin{aligned}
 PS &:= \{P \mid P \text{ ist Polytop mit spez. Simplex } \} \\
 PS_n &:= \{P \mid P \text{ ist Polytop mit spez. Simplex, } \dim(P) = n \} \\
 PS_{(*,m)} &:= \{P \mid P \text{ ist Polytop mit spez. Simplex } \Sigma, \dim(\Sigma) = m \} \\
 PS_{(n,m)} &:= \{P \mid P \text{ ist Polytop mit spez. Simplex } \Sigma, \dim(P) = n, \dim(\Sigma) = m \} \\
 PS(Q) &:= \{P \mid P \text{ ist Polytop mit spez. Simplex } \Sigma, \mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma) = \mathcal{F}(\partial Q) \} \\
 PS^m &:= \{P \mid P \text{ ist zahmes Polytop mit spez. Simplex } \} \\
 PS^w &:= \{P \mid P \text{ ist wildes Polytop mit spez. Simplex } \}
 \end{aligned}$$

Gegebenenfalls werden wir außerdem eine Kombination dieser Notationen (etwa $PS_{(n,m)}(Q)$) verwenden. Die Termini *zahn* und *wild* werden in Definition 3.2.6 eingeführt.

3.2.1 Zu speziellen Simplizes äquivalente Bedingungen und das erste Konstruktionsverfahren: Pyramiden

Wie angekündigt geben wir zunächst zwei (zusammengenommen) zur Existenz eines speziellen Simplexes äquivalente Bedingungen an, mit denen sich besser argumentieren lässt als mit der ursprünglichen Definition 3.1.1. Diese Bedingungen sind einerseits, dass der Teilkomplex des Ausgangspolytopes P , der nach Entfernen aller Ecken des speziellen Simplexes enthaltenden Seiten von P übrig bleibt, Randkomplex eines Polytopes Q ist und andererseits, dass jede das spezielle Simplex enthaltende Hyperebene das Polytop Q teilt. Wir formulieren dies formal:

Satz 3.2.2:

Sei P ein n -dimensionales Polytop mit $\mathcal{V}(P) := \{v_0, \dots, v_p\}$. Dann enthält P ein m -dimensionales spezielles Simplex Σ (wobei $\mathcal{V}(P)$ o.B.d.A. so angeordnet sei, dass $\mathcal{V}(\Sigma) = \{v_0, \dots, v_m\}$ und $1 \leq m \leq n-1$) genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Sigma \subset H$ gilt:

$$\exists i, j \in \{m+1, \dots, p\} : v_i \in H^+ \wedge v_j \in H^-.$$

(b) Es existiert ein Polytop $Q \subset \mathbb{R}^{n-m}$, so dass

$$\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma) = \partial \mathcal{F}(Q).$$

Beweis:

Seien die Voraussetzungen wie im Satz. Wir nehmen für den Beweis o.B.d.A. an, dass v_0 der Ursprung und somit jede der betrachteten, Σ enthaltenden Hyperebenen H ein $n-1$ -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n mit einer Basis $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_s)$ (mit passend gewählten Vektoren $w_1, \dots, w_s \in \mathbb{R}^n$) ist.

Richtung „ \Rightarrow “:

Sei Σ ein spezielles Simplex in P . Nehmen wir an, es gäbe eine Basis \mathcal{B} , so dass gelten würde

$$\forall i \in \{m+1, \dots, p\} : v_i \in H^+$$

(wir können nach evtl. Ersetzen des definierenden Vektors u von H durch $-u$ o.B.d.A. von H^+ ausgehen). Damit wäre insbesondere auch $P \in H^+$ und somit, da $\Sigma \subset P$ und $\Sigma \subset H$, wäre H Stützhyperebene von P und $\Sigma \in \partial P$. Dann gäbe es jedoch eine Facette, die ganz Σ (und damit insbesondere $\mathcal{V}(\Sigma)$) enthielte, was im Widerspruch zur Definition 3.1.1 spezieller Simplizes stünde. Daraus folgt Bedingung (a).

Wir wissen außerdem nach Lemma 3.1.7, dass die rückwärtige lexikographische Triangulierung $\Delta_\tau(P)$ bzgl. $\tau := (v_p, \dots, v_0)$ von P isomorph zur simplizialen Vereinigung $\Sigma * \Delta'$ ist (wobei $\Delta' := \Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma))$). Damit sind die Bedingungen von Lemma 2.6.6 erfüllt, aus dem insbesondere folgt, dass $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ isomorph zum Rand des Quotientenpolytops $P/V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ ist, wobei $V := \text{span}\{v_0, \dots, v_m\}$. Daraus folgt Bedingung (b).

Richtung „ \Leftarrow “:

Nehmen wir nun umgekehrt an, P sei ein Polytop, das die Bedingungen (a) und (b) erfüllt. Aus (b) wissen wir, dass jede maximale Seite S von $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ die Dimension $n-m-1$ (man beachte hierbei, dass Randkomplexe von Polytopen rein sind) hat. Jede Facette F von P , für die gilt $F \setminus \mathcal{V}(\Sigma) = S$, hat jedoch nach Definition von P die Dimension $n-1$. Da das Entfernen einer Ecke aus einer Facette (bzw. allgemeiner: einer Seite) die Dimension höchstens um 1 senkt, muss jede Facette von P mindestens n affin unabhängige Ecken aus $\mathcal{V}(\Sigma)$ enthalten.

Aus Bedingung (a) folgt jedoch auch sofort, dass keine Facette alle $n + 1$ Ecken aus $\mathcal{V}(\Sigma)$ enthalten kann, da ansonsten für die zugehörige Stützhyperebene H gelten würde, dass alle Ecken aus $\mathcal{V}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ in H^+ liegen würden. Also sind die Ecken von Σ affin unabhängig, d. h. Σ ist ein Simplex, und jede Facette von P enthält genau m Ecken von Σ . Dies entspricht genau der Definition eines speziellen Simplexes.

□

Bemerkung 3.2.3:

Ist P selbst ein Simplex, so ist es sowohl gemäß der Definition 3.1.1 spezieller Simplizes als auch nach diesem Satz sinnvoll und korrekt zu sagen, P enthalte ein n -dimensionales spezielles Simplex, nämlich P selbst, da in diesem Fall sowohl Bedingung (a) als auch (b) trivialerweise erfüllt sind. Ich werde allerdings bei der nun anschließenden Klassifizierung diesen Fall aufgrund seiner Trivialität (und nur deshalb) nicht mehr betrachten (der Leser möge ihn sich für jede Dimension dazu denken).

Bemerkung 3.2.4:

Man beachte die folgende subtile Tatsache im obigen Satz 3.2.2: Der polytopale Komplex $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ stimmt zwar mit dem Rand eines $(n - m)$ -Polytopes Q , aber dies impliziert im allgemeinen **nicht**, dass der affine Grundraum des Komplexes dieselbe Dimension hat wie Q . Die Dimension des Komplexes kann durchaus höher sein; die obige Aussage bezieht sich allein auf die kombinatorische Struktur von $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ und $\mathcal{F}(\partial Q)$.

Um diese abstrakte Bemerkung zu verdeutlichen zunächst ein Beispiel:

Beispiel 3.2.5:

Gemäß Beispiel 3.1.3, Abb. 7 besitzt ein 3-dim. Würfel ein spezielles 1-Simplex. Entfernt man die beiden Ecken des Simplexes aus dem Komplex, so erkennt man, dass der Restkomplex zwar der Rand eines (2-dim.) 6-Ecks ist, der Komplex aber nicht im \mathbb{R}^2 liegt.

Die Bemerkung 3.2.4 motiviert die folgende Definition:

Definition 3.2.6:

Sei P ein Polytop mit speziellem Simplex Σ und Basispolytop Q . Sei \mathcal{A} der affine Grundraum des Komplexes $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$. Dann nennen wir P

- (a) ZAHM (engl.: meek), falls $\dim Q = \dim \mathcal{A}$.
- (b) WILD (engl.: wild), falls $\dim Q < \dim \mathcal{A}$ und das zahme Polytop $\text{conv}(\mathcal{V}(Q) \cup \mathcal{V}(\Sigma))$ eine andere kombinatorische Struktur aufweist als P^1 .

Bemerkung 3.2.7:

Offenbar ist ein Polytop P mit speziellem Simplex Σ und Basispolytop Q genau dann zahm, wenn der Schnitt der affinen Grundräume von Σ und Q aus einem einzigen Punkt besteht.

Ferner sind offensichtlich alle Polytope P mit speziellem Simplex zahm, deren Basispolytop Q ein Simplex ist.

Für den Rest des Abschnittes 3.2 gehen wir davon aus, dass alle betrachteten Polytope mit speziellen Simplizes zahm sind!

Bevor wir uns mit Hilfe von Satz 3.2.2 dem ersten Konstruktionsverfahren für Polytope aus $PS_{(n,m)}^m$ mit beliebig gewählten n, m widmen, folgern wir direkt zwei Korollare, mit denen wir zeigen, dass $PS_{(*,1)}^m$ aus Bipyramiden besteht und anschließend die niederdimensionalen Fälle $PS_{(2,1)}^m, PS_{(1,2)}^m$ abhandeln.

¹Hintergrund ist, dass es in manchen Fällen möglich ist, Ecken von Q ein wenig aus dessen affinem Grundraum herauszuschieben, ohne dass sich die kombinatorische Struktur des resultierenden Polytopes von der von $\text{conv}(\mathcal{V}(Q) \cup \mathcal{V}(\Sigma))$ unterscheidet. Da es uns aber lediglich um eine kombinatorische Klassifizierung und geometrische Konstruierbarkeit geht, sind diese Sonderfälle für uns irrelevant.

Korollar 3.2.8:

Sei P ein n -dimensionales Polytop mit einem speziellen Simplex Σ . Dann gilt: Ist $\dim(\Sigma) = 1$, so ist P eine Bipyramide, d. h. es gibt ein $n - 1$ -dimensionales Polytop Q mit f -Vektor $(1, f_{q_0}, \dots, f_{q_{n-2}}, 1)$, so dass für den f -Vektor $f_P := (1, f_{p_0}, \dots, f_{p_{n-1}}, 1)$ von P gilt:

$$f_{p_0} = f_{q_0} + 2, \quad f_{p_{n-1}} = 2 \cdot f_{q_{n-2}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n - 2\} : f_{p_i} = f_{q_i} + 2 \cdot f_{q_{i-1}}.$$

Anders ausgedrückt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : PS_{(n,1)}^m = \{\text{bipyr } Q \mid Q \text{ ist Polytop, } \dim(Q) = n - 1\}.$$

Beweis:

Sei Q mit $\dim(Q) = n - 1$ beliebig gewählt, $\mathcal{V}(\Sigma) = \{v_0, v_1\}$. Sei H_Q die Hyperebene, die Q enthält. Σ besteht als 1-Simplex aus zwei Ecken. Damit Bedingung (a) aus Satz 3.2.2 erfüllt ist, muss je eine Ecke in H_Q^+ und in H_Q^- liegen und die Ecken dürfen nicht (an Q vorbei) durch eine Kante verbunden sein. Dies entspricht gerade einer Bipyramide mit Q als Grundseite. □

Wir können nun alle zahmen Polytope im niederdimensionalen Bereich, die spezielle Simplizes enthalten, vollständig klassifizieren:

Korollar 3.2.9:

Im \mathbb{R}^2 enthalten genau alle (konvexen) Vierecke ein spezielles 1-Simplex.

Im \mathbb{R}^3 enthalten genau die Polytope mit f -Vektor $(1, 5, 9, 6, 1)$ und $(1, 5, 8, 5, 1)$ ein spezielles 2-Simplex und alle beliebigen Bipyramiden ein spezielles 1-Simplex. Formal ausgedrückt:

$$\begin{aligned} PS_{(2,1)}^m &= \{P \mid f_P = (1, 4, 4, 1)\} \\ PS_{(3,2)}^m &= \{P \mid f_P = (1, 5, 9, 6, 1) \vee f_P = (1, 5, 8, 5, 1)\} \\ PS_{(3,1)}^m &= \{P \mid f_P = (1, k + 2, 3 \cdot k, 2 \cdot k, 1), k \in \mathbb{N}_{\geq 3}\} \end{aligned}$$

Beweis:

Die Aussagen über $PS_{(2,1)}^m$ und $PS_{(3,1)}^m$ folgen durch einfaches Nachrechnen direkt aus vorigem Korollar (wobei zu beachten ist, dass alle 2-dimensionalen Polytope f -Vektoren $(1, k, k, 1)$ mit $k \geq 3$) haben.

Für $PS_{(3,2)}^m$ beachte man die Bedingungen aus Satz 3.2.2 und stelle fest, dass die Situation in diesem Fall überschaubar ist: Es gibt genau eine Hyperebene, die Σ enthält und $\mathcal{F}(\partial Q) = \mathcal{F}(P) \setminus \Sigma$ besteht lediglich aus zwei Ecken (wg. $\dim(Q) = 1$). Demnach gibt es nur die Möglichkeit, dass der Schnitt von Q und Σ im Inneren von Σ oder auf einer 1-Seite von Σ liegt, was gerade den oben genannten Fällen entspricht. Der Schnitt kann keine Ecke von Σ sein, da diese sonst nicht mehr in $\mathcal{V}(P)$ liegen würde und der Schnitt kann nicht leer sein, da ansonsten Σ kein spezielles Simplex mehr wäre. □

Ein weiteres, weit interessanteres Phänomen, das aus Satz 3.2.2 folgt, ist, dass für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{<n}$ eine kanonische Einbettung

$$\rho : PS_{(n,m)}^m \rightarrow PS_{(n+1,m+1)}^m$$

existiert, die durch Pyramidenbildung beschrieben ist. Hieraus werden wir das erste Konstruktionsverfahren für spezielle Simplizes herleiten:

Korollar 3.2.10:

Sei P ein n -dimensionales Polytop ($\mathcal{V}(P) := \{v_0, \dots, v_p\}$) mit einem speziellen m -Simplex. Dann enthält dessen Pyramide $\text{pyr } P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein spezielles $m+1$ -Simplex.

Beweis:

Seien die Voraussetzungen wie im Satz angegeben und sei $\mathcal{V}(\Sigma) := \{v_0, \dots, v_n\}$ und sei w die Ecke, die als Spitze der Pyramide von P hinzugefügt wird, d. h. es gelte

$$\text{pyr } P = \text{conv } \mathcal{V}(P) \cup \{w\}.$$

Dann ist

$$\Sigma' := \text{conv } \mathcal{V}(\Sigma) \cup \{w\}$$

ein spezielles Simplex in $\text{pyr } P$, denn sei H' eine Hyperebene in \mathbb{R}^{n+1} mit $\Sigma' \subset H'$. Dann existiert genau eine Hyperebene H von \mathbb{R}^n mit

$$H = H' \cap \mathbb{R}^n,$$

für die insbesondere gilt $\Sigma \subset H$. Da Σ spezielles Simplex von P ist, folgt nach Bedingung (a) aus Satz 3.2.2:

$$\exists i, j \in \{m+1, \dots, p\} : v_i \in H^+ \wedge v_j \in H^-$$

und somit, da $\{v_{m+1}, \dots, v_p\} \subset \mathbb{R}^n$, nach Konstruktion von H' :

$$\exists i, j \in \{m+1, \dots, p\} : v_i \in H'^+ \wedge v_j \in H'^-.$$

Somit ist für $\text{pyr } P$ und Σ' Bedingung (a) aus Satz 3.2.2 erfüllt; Bedingung (b) gilt trivialerweise. Also ist Σ' spezielles $m+1$ -Simplex von $\text{pyr } P$. □

Wir folgern nun aus den Korollaren 3.2.8 und 3.2.10 das simple, erste Verfahren, um ein n -dimensionales Polytop mit einem speziellen m -Simplex zu erzeugen:

Korollar 3.2.11:

Sei Q ein beliebiges Polytop der Dimension $n-m$. Dann ist

$$P := \underbrace{\text{pyr } \text{pyr } \cdots \text{pyr}}_{m-1 \text{ Mal}} \text{bipyr } Q$$

ein n -dimensionales Polytop mit speziellem m -Simplex

Hiermit ist also die zu Beginn dieses Kapitels gestellte Frage 1 bereits beantwortet; das gleiche gilt zumindest teilweise für die Fragen 3 und 4 (vergl. S. 22f.). Ferner lässt sich bereits festhalten:

- PS ist unendlich.
- Aber auch: Gibt es unendlich viele kombinatorisch verschiedene Polytope Q der Dimension $n-m$ ($n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{<n}$), so ist bereits $PS_{(n,m)}^m$ unendlich.

Wir sind allerdings an dieser Stelle noch nicht am Ende, da wir die Fragen 2 und insbesondere 5 ebenfalls beantworten wollen. Dass hierfür das Pyramidenverfahren noch nicht ausreicht, sehen wir im nächsten Abschnitt.

Konvention:

Für die Zukunft vereinbaren wir für beliebige Polytope:

$$\text{pyr}_i(P) := \underbrace{\text{pyr } \text{pyr } \cdots \text{pyr}}_{i \text{ Mal}} P.$$

Außerdem setzen wir in Zukunft aus beweistechnischen Gründen stets o.B.d.A. voraus, dass die Spitze von $\text{pyr } P$ die Koordinaten $(0, \dots, 0, 1)^T$ hat.

3.2.2 Das zweite Konstruktionsverfahren: Muscheln

Der Bereich der Polytope mit speziellen Simplizes ist (leider) nicht so simpel, dass man durch Pyramidenbildung von Bipyramiden von beliebigen Polytopen ganz PS^m erhält. Dies liegt daran, dass bei einer n -dimensionalen Pyramide, die ein spezielles m -Simplex enthält, offenbar stets eine $m-1$ -Seite des speziellen Simplexes in der Grundseite der Pyramide liegt und somit nicht Teil des Seitenverbandes des Pyramide selbst ist (man beachte hierbei, dass dieser Fall niederdimensional nur bei speziellen 2-Simplizes auftauchen, da Ecken immer im Seitenverband liegen müssen) und es Fälle von Polytopen mit speziellem Simplex Σ gibt, bei dem jedes Element des Randverbandes von Σ Element von $\mathcal{F}(P)$ ist; Beispiele sind die Bipyramide eines 2-Simplexes (d. i. der Fall $(1, 5, 9, 6, 1)$ aus Korollar 3.2.9, wobei hier das 2-Simplex das spezielle Simplex bildet, auf das es uns ankommt) oder das Birkhoff-Polytop P_3 der 3×3 -Matrizen – ein 4-dimensionales Polytop mit speziellem 2-Simplex, das vollständig im Seitenverband enthalten ist (s. hierzu Abschnitt 5.2.2). Es muss also ein weiteres Verfahren geben, Polytope mit speziellen Simplizes zu erzeugen, bei dem die besagte Problematik nicht auftaucht. Die Idee für dieses Verfahren ist simpel:

Nehmen wir an, wir hätten ein n -dimensionales Polytop P mit einem speziellen m -Simplex Σ_m gegeben. Dann bilden wir die Pyramide von P und verschieben Σ_m aus der Grundseite heraus in die neu hinzugenommene Dimension hinein und zwar auf der der Spitze der Pyramide (bzgl. der Grundseite) entgegengesetzten Seite. Wir definieren dieses neue Verfahren, das wir als *Muschelbildungsverfahren* bezeichnen wollen², zunächst formal. Im Anschluss beschreiben wir die kombinatorische Struktur der durch dieses Verfahren entstehenden Polytope und diskutieren das Verhältnis der beiden Verfahren zueinander.

Satz und Definition 3.2.12:

Sei Q ein q -dimensionales Polytop. Dann definieren wir die i -te MUSCHEL von Q , kurz: $\text{shell}_i(Q)$, rekursiv auf folgende Art und Weise:

$$\begin{aligned} \text{shell}_0(Q) &:= Q, & \Sigma_0 &:= \emptyset \\ \text{shell}_1(Q) &:= \text{bipyr } Q, & \Sigma_1 &:= \text{conv } \mathcal{V}(\text{bipyr } Q) \setminus \mathcal{V}(Q), \end{aligned}$$

wobei die Spitzen der Bipyramide $(0, \dots, 0, \pm 1)^T$ seien, und

Eingabe: $\text{shell}_i(Q) \subset \mathbb{R}^{q+i}$ ($i \geq 1$) eines Polytopes Q mit speziellem Simplex Σ_i .
Ausgabe: $\text{shell}_{i+1}(Q)$ mit speziellem Simplex Σ_{i+1}

- 1 Bette $\text{shell}_i(Q)$ in \mathbb{R}^{q+i+1} ein;
- 2 $w \leftarrow (0, \dots, 0, 1)^T$;
- 3 $A := \{v + (-w + v) \mid v \in \mathcal{V}(\Sigma_i)\}$;
- 4 $\Sigma_{i+1} \leftarrow \text{conv } A \cup \{w\}$;
- 5 $\text{shell}_{i+1}(Q) \leftarrow \text{conv } \mathcal{V}(Q) \cup A \cup \{w\}$;
- 6 **return** $(\text{shell}_{i+1}(Q), \Sigma_{i+1})$;

Wir vereinbaren außerdem die Notation:

$$\forall i \in \mathbb{N} : \text{shell}_{i+1}(Q) := \text{shell } \text{shell}_i(Q).$$

Die i -te Muschel $\text{shell}_i(Q)$ eines Polytopes Q enthält (wie in der Konstruktion bereits implizit verwendet) stets ein spezielles i -Simplex Σ_i und es gilt:

$$\forall F \in \mathcal{F}(\partial \Sigma_i) : F \in \mathcal{F}(\text{shell}_i(Q)),$$

d. h. alle Elemente des Randes von Σ_i sind Elemente des Seitenkomplexes der i -ten Muschel von Q .

²Die Namensgebung hat einen anschaulichen Hintergrund: Geht man von einem Polytop Q aus, von dem die i -te Muschel gebildet wird, so kann man das geometrische Resultat so interpretieren, dass Q das Innere (den Weichkörper) einer Muschel darstellt, um das durch Σ eine Muschelschale in i neuen Dimensionen aufgespannt wird, da der Schnitt von Σ und Q tatsächlich ein Punkt im Inneren von Σ ist. D. h. der Weichkörper Q liegt (im Gegensatz zur Pyramide) tatsächlich *in* der Schale. Die Seiten von Q , die im Rand der i -ten Muschel liegen, kann man als die Öffnung, an der die beiden Muschelschalen aufeinandertreffen, interpretieren.

Beweis:

Wir übernehmen die Bezeichnung aus dem Satz und zeigen zunächst durch vollständige Induktion über i , dass für jedes beliebige Polytop Q die i -te Muschel $\text{shell}_i(Q)$ ein spezielles Simplex Σ_i (mit Σ_i wie in der Konstruktion) enthält.

Für $i = 1$ folgt die Behauptung direkt aus der Definition und Korollar 3.2.8. Nehmen wir also an, wir hätten die Behauptung für $\text{shell}_i(Q)$ gezeigt und betrachten $\text{shell}_{i+1}(Q)$: Da nach Induktionsvoraussetzung $\text{shell}_i(Q)$ ein spezielles i -Simplex Σ_i enthält folgt gemäß Korollar 3.2.10, dass

$$\text{pyr shell}_i(Q)$$

ein spezielles $i + 1$ -Simplex Σ_{pyr} enthält. Wir setzen (o.B.d.A. – vergl. die Konvention nach 3.2.11 sowie 3.2.12)

$$\mathcal{V}(\Sigma_{i+1}) := \{w, v_1, \dots, v_{i+1}\} \text{ und } \mathcal{V}(\Sigma_{\text{pyr}}) := \{w, v'_1, \dots, v'_{i+1}\}.$$

Da nach Konstruktion gilt, dass die Ecken von $\text{shell}_{i+1}(Q)$ und $\text{pyr shell}_i(Q)$ bis auf die der speziellen Simplizes übereinstimmen, muss, da $\text{pyr shell}_i(Q)$ Bedingung (b) aus Satz 3.2.2 erfüllt, diese Bedingung auch für $\text{shell}_{i+1}(Q)$ erfüllt sein. Außerdem reicht es demnach für Bedingung (a) zu zeigen, dass für jede Hyperebene H gilt:

$$(*_1) \quad \Sigma_{\text{pyr}}(Q) \subset H \Leftrightarrow \Sigma_{i+1}(Q) \subset H,$$

da jede Hyperebene, die $\Sigma_{\text{pyr}}(Q)$ enthält, Bedingung (a) (aus Satz 3.2.2) erfüllt. Wir können o.B.d.A. annehmen, der Ursprung liege in Σ_i (Σ_i ist n. V. spezielles Simplex und liegt somit im Inneren von $\text{shell}_i(Q) \supset Q$). Wir definieren eine beliebige Hyperebene $H \supset \Sigma_{\text{pyr}}$ durch

$$H := \text{aff span } \{w, v'_1, \dots, v'_{i+1}, u_1, \dots, u_q\}$$

für $\{u_1, \dots, u_q\} \subset \mathbb{R}^{i+q+1}$ beliebig. Dann folgt aber, da nach Konstruktion gilt

$$\forall i \in \{1, \dots, i + 1\} : v_i = v'_i + (v'_i - w),$$

dass

$$\Sigma_{i+1} \subset H.$$

Die Umkehrung funktioniert analog. Also erfüllt Σ_{i+1} beide Bedingungen aus Satz 3.2.2 und ist somit ein spezielles Simplex.

Es bleibt zu zeigen, dass alle Elemente aus $\mathcal{F}(\partial\Sigma_{i+1})$ Elemente aus $\mathcal{F}(\text{shell}_{i+1}(Q))$ sind. Wir zeigen die Behauptung wieder durch vollständige Induktion nach der Dimension i . Der Induktionsanfang ist wegen

$$\text{shell}_1(Q) = \text{bipyr } Q$$

trivial. Nehmen wir an, wir hätten die Behauptung für $\text{shell}_i(Q)$ gezeigt und vollziehen den Schritt von i nach $i + 1$.

Sei $F \in \mathcal{F}(\partial\Sigma_{i+1})$ beliebig. Offenbar reicht es nachzuweisen, dass nach unserer Konstruktion gilt

$$F \cap Q = \emptyset,$$

d.h. F verläuft in \mathbb{R}^q an Q vorbei; in diesem Fall müsste F bei Bildung der konvexen Hülle aus Σ_{i+1} und Q Element von $\mathcal{F}(\text{shell}_{i+1}(Q))$ sein. Hierfür wiederum reicht es zu zeigen, dass

$$(*_2) \quad F \cap \text{shell}_i(Q) = G \in \mathcal{F}(\partial \text{shell}_i(Q)) \text{ mit } \mathcal{V}(G) \subset \mathcal{V}(\Sigma_i),$$

da $Q \subset \text{shell}_i(Q)$ und bei der Bildung von $\text{shell}_{i+1}(Q)$ alle Ecken aus Σ_i aus \mathbb{R}^{q+i} herausgeschoben werden und dabei auch alle Elemente aus $\mathcal{F}(\text{shell}_i(Q))$, die nur Ecken aus Σ_i enthalten, eliminiert werden, da Σ_i spezielles Simplex ist.

Wir können zunächst o.B.d.A annehmen, dass $w \in F$, da ansonsten alle in F enthaltenen Ecken

als letzte Koordinate -1 hätten und dies somit für alle Punkte aus F gelten würde, alle Punkte aus $\text{shell}_i(Q) \subset \mathbb{R}^{q+i}$ jedoch in \mathbb{R}^{q+i+1} als letzte Koordinate 0 haben. Nehmen wir also an, es gelte

$$F = \text{conv} \{w, v_{F_1}, \dots, v_{F_r}\} \text{ mit } \{v_{F_1}, \dots, v_{F_r}\} \subset \mathcal{V}(\Sigma_{i+1}).$$

Demnach gilt für jeden Punkt $x \in F$:

$$\begin{aligned} x &= w + \sum_{j=1}^r \lambda_j (v_{F_j} - w) \text{ mit } \sum_{j=1}^r \lambda_j \leq 1 \stackrel{\text{Def. } v_{F_j}}{\Leftrightarrow} \\ x &= w + \sum_{j=1}^r \lambda_j ((v'_{F_j} + (v'_{F_j} - w)) - w) \text{ mit } \sum_{j=1}^r \lambda_j \leq 1 \Leftrightarrow \\ x &= w \cdot \left(1 - 2 \cdot \sum_{j=1}^r \lambda_j\right) + 2 \cdot \sum_{j=1}^r \lambda_j v'_{F_j} \text{ mit } \sum_{j=1}^r \lambda_j \leq 1 \end{aligned}$$

Da alle

$$v'_{F_j} \in \mathcal{V}(\Sigma_i),$$

und damit insbesondere als letzte Koordinate 0 haben, folgt also

$$x \in F \cap \mathbb{R}^{q+i} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j = \frac{1}{2}.$$

In diesem Fall gilt jedoch

$$x = \sum_{j=1}^r \lambda_j v'_{F_j} \text{ mit } \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1,$$

d. h. alle Elemente aus F , die in \mathbb{R}^{q+i} liegen, sind eine Konvexkombination von Ecken aus Σ_i und liegen, da $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$, in $\partial\Sigma_i$. Somit gilt

$$(*_3) \quad \forall x \in F : x \in \mathbb{R}^{q+i} \Rightarrow x \in \mathcal{F}(\partial\Sigma_i).$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$(*_4) \quad x \in \mathcal{F}(\partial\Sigma_i) \Rightarrow x \in \mathcal{F}(\partial\text{shell}_i(Q)).$$

(*₃) und (*₄) zusammen ergeben jedoch gerade (*₂), was zu zeigen war.

□

Um die recht technische Konstruktion von Muscheln und den ebenfalls technischen Beweis des vorigen Satzes etwas anschaulicher zu gestalten, betrachten wir das folgende, einfachste Beispiel für die Konstruktion einer Muschel.

Beispiel 3.2.13:

Wir betrachten das Polytop $Q := \text{conv} \{1, -1\}$ mit $\text{bipy}_r Q = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ und möchten $\text{shell}(\text{bipy}_r Q)$ berechnen. Dann wird gemäß des Muschelverfahrens $\text{bipy}_r Q$ zunächst zu $\text{pyr}(\text{bipy}_r Q)$ mit

$$\text{pyr}(\text{bipy}_r Q) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und anschließend werden, damit die Pyramide zur Muschel wird, die beiden Ecken des speziellen Simplexes in der Pyramide, die nicht die Spitze $(0, 0, 1)^T$ darstellen (das sind $(0, 1, 0)^T, (0, -1, 0)^T$) um den Vektor von der Spitze zur jeweiligen Ecke verschoben. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{shell}(\text{bipyr } Q) &= \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

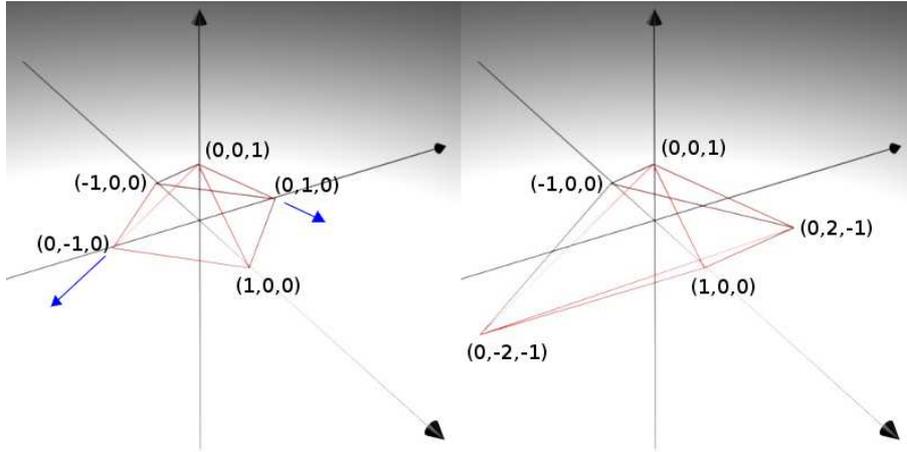


Abbildung 10: Um die Muschel von $\text{bipyr } Q$ zu bilden, wird zunächst die Pyramide konstruiert (linkes Bild) und anschließend werden die Ecken des speziellen Simplexes von $\text{pyr}(\text{bipyr } Q)$, die nicht die Spitze der Pyramide sind, um den Vektor von der Spitze bis zur jeweiligen Ecke in den negativen Halbraum der Stützhyperbene der Grundseite verschoben (angedeutet durch die blauen Pfeile). Das Resultat $\text{shell}(\text{bipyr } Q)$ ist auf dem rechten Bild zu erkennen.

Der naheliegende nächste Schritt, besteht darin, die kombinatorische Struktur von Muscheln zu klären; d. h. wir müssen den f -Vektor der i -ten Muschel eines beliebigen Polytopes angeben können. Hierbei hilft uns die Aussage, dass (für ein beliebiges Polytop Q) jedes Element aus $\mathcal{F}(\partial\Sigma_i)$ auch Teil von $\mathcal{F}(\text{shell}_i(Q))$ ist, denn diese kann (wie im Beweis bereits zu sehen war) auch so aufgefasst werden, dass kein Element aus $\mathcal{F}(\partial\Sigma_i)$ im Inneren von Q liegt (und umgekehrt). Dies bedeutet anschaulich, dass (für jedes $j \in 1 \leq i \leq \dim(Q)$) die j -Seiten des Seitenverbandes von $\text{shell}_i(Q)$ alle kombinatorisch zusammensetzbaren aus den Verbänden $\mathcal{F}(\partial\Sigma_i)$ und $\mathcal{F}(\partial Q)$ sind. Präziser beschrieben wird dies durch den folgenden Satz:

Satz 3.2.14:

Sei Q ein q -dimensionales Polytop mit f -Vektor

$$f_Q := (1, f_{Q_0}, f_{Q_1}, \dots, f_{Q_{q-1}}, 1)$$

Dann ist der f -Vektor $f_{\text{shell}_i(Q)}$ der i -ten Muschel von Q definiert durch

$$\forall j \in \{0, \dots, q+i\} : f_{\text{shell}_i(Q)_j} = \sum_{k,l:k+l=j-1} f_{Q_k} \cdot \binom{i+1}{l+1}.$$

Beweis:

Seien A_{Σ_i} und A_Q die Σ_i und Q zu Grunde liegenden affinen Räume. Aus Satz und Definition 3.2.12 wissen wir, dass diese sich lediglich in einem Punkt schneiden, der nicht auf dem Rand von Σ_i liegt und alle Elemente aus $\mathcal{F}(\partial\Sigma_i)$ in $\mathcal{F}(\text{shell}_i(Q))$ liegen. Da Σ_i spezielles Simplex ist, folgt sofort aus der Bedingung (b) aus Satz 3.2.2, dass alle Elemente aus $\mathcal{F}(\partial Q)$ ebenfalls in $\mathcal{F}(\text{shell}_i(Q))$ liegen. Somit bildet jedes Paar aus einer k -Seite von $\mathcal{F}(\partial\Sigma_i)$ und einer l -Seite von $\mathcal{F}(\partial Q)$ eine $k + l + 1$ -Seite von $\mathcal{F}(\text{shell}_i(Q))$. Da die Anzahl der l -Seiten eines i -Simplexes $\binom{i+1}{l+1}$ ist, folgt die Behauptung. □

Aus vorherigem Satz und Definition 2.6.1 erhalten wir sofort:

Korollar 3.2.15:

Sei $P = \text{shell}_i(Q)$ ($i \in \mathbb{N}$) mit speziellem Simplex Σ . Dann gilt:

$$\mathcal{F}(\partial P) \text{ ist isomorph zu } \mathcal{F}(\partial\Sigma) * \mathcal{F}(\partial Q).$$

Da wir wissen, dass für beliebige Polytope Q

$$\forall i \in \mathbb{N}_{>0} : \text{pyr}_i \text{bipyr } Q \text{ und } \text{shell}_i(Q) (= \text{shell}_{i-1}(\text{bipyr } Q))$$

ein spezielles Simplex enthalten und einerseits somit insbesondere auch

$$(*_1) \quad \text{pyr}(\text{shell}(\text{bipyr } Q))$$

ein spezielles Simplex enthält, andererseits die beiden Spitzen der Bipyramide bei der Pyramidenbildung nicht bewegt werden, stellt sich die Frage, was passiert, wenn wir nach (evtl.) mehrfacher Pyramidenbildung das Muschelverfahren auf die Spitzen (der Bipyramide) anwenden. Auch wenn es sich natürlich bei $\text{pyr}_i(\text{bipyr } Q)$ mit $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ um keine Bipyramide und es somit formal um eine Erweiterung der Definition im Sinne von 3.2.12 handelt, schreiben wir hierfür schlicht

$$(*_2) \quad \text{shell}(\text{pyr}(\text{bipyr } Q)).$$

Die Beziehung von $(*_1)$ und $(*_2)$ zueinander (und damit auch die Beziehung von Pyramiden und Muscheln zueinander) regelt der folgende Satz:

Satz 3.2.16:

Sei Q ein beliebiges Polytop. Dann ist

$$\text{pyr}(\text{shell}(\text{bipyr } Q))$$

isomorph zu

$$\text{shell}(\text{pyr}(\text{bipyr } Q)).$$

Dementsprechend gilt für i -fache Anwendung von pyr und j -fache Anwendung von shell auf $\text{bipyr } Q$ in beliebiger Reihenfolge, dass das Resultat isomorph ist zu

$$\text{pyr}_i(\text{shell}_j(\text{bipyr } Q)).$$

Beweis:

Offenbar reicht es, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Wir zeigen die Behauptung indem wir nachweisen, dass nach Anwendung von pyr und shell auf $\text{bipyr } Q$ in beliebiger Reihenfolge die resultierende \mathcal{V} -Darstellung des entstehenden Polytopes isomorph ist. Sei

$$\mathcal{V}(Q) := \{v_1, \dots, v_q\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{bipyr } Q) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_q \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \\
 \mathcal{V}(\text{pyr bipyr } Q) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \\
 \mathcal{V}(\text{shell pyr bipyr } Q) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt für umgekehrtes Vorgehen ausgehend von bipyr Q :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{shell}_2(Q)) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \\
 \mathcal{V}(\text{pyr shell}_2(Q)) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Vertauscht man die letzten beiden Dimensionen, stimmen die beiden \mathcal{V} -Darstellungen offenbar überein.

□

3.2.3 Das Theorem zur vollständigen Klassifikation zahmer Polytope

Nachdem wir nun das Verhältnis von Muscheln und Pyramiden (von Bipyramiden) von Polytopen zueinander diskutiert haben, bleibt zu klären, ob es weitere zahme Polytope mit speziellem Simplex gibt, die durch diese beiden Konstruktionen noch nicht erfasst wurden. Dass dem nicht so ist, folgt aus dem folgenden, abschließenden Klassifikationstheorem, durch das sämtliche Fragen 1 bis 5 (Vergl. S. 22f.) für zahme Polytope beantwortet werden:

Theorem 3.2.17:

Sei P ein zahmes n -dimensionales Polytop mit speziellem m -Simplex Σ . Dann gibt es ein $q := n - m$ dimensionales Polytop Q , so dass

$$\exists i, j \in \mathbb{N} : i + j = m - 1 \wedge P = \text{pyr}_i(\text{shell}_j(\text{bipyr } Q)).$$

Anders ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
 \forall n, m \in \mathbb{N} : PS_{(n,m)}^m = \\
 \{P \mid \exists i, j \in \mathbb{N}, \exists Q : i + j = m - 1 \wedge \dim(Q) = n - m \wedge P = \text{pyr}_i(\text{shell}_j(\text{bipyr } Q))\}.
 \end{aligned}$$

Beweis:

Wir wissen bereits aus Bedingung (b) von Satz 3.2.2, dass alle Elemente aus $\mathcal{F}(Q)$ Elemente von $\mathcal{F}(P)$ sind und $\dim(\Sigma \cap Q) = 0$ (aufgrund von $\dim(Q) + \dim(\Sigma) = \dim(P)$). Wir wissen außerdem als Resultat aus Korollar 3.2.15, dass wir uns genau dann, wenn auch alle Elemente aus $\mathcal{F}(\partial\Sigma)$ in $\mathcal{F}(P)$ liegen, in der Situation

$$P = \text{shell}_{m-1}(\text{bipyr } Q) = \text{shell}_m(Q)$$

befinden und wir wissen gemäß der Konstruktion einer Pyramide, dass wir uns, falls eine i -Seite F (mit $\mathcal{V}(F) := \{v_{F_1}, \dots, v_{F_r}\}$) nicht Element von $\mathcal{F}(P)$ ist und damit auch (aufgrund der daraus resultierenden affinen Abhängigkeit von $\mathcal{V}(F)$ und $\mathcal{V}(Q)$) alle $i+1, \dots, m-1$ -Seiten (also $i, i+1, \dots, m-1$ -Simplizes), die $\mathcal{V}(F)$ enthalten, nicht Element von $\mathcal{F}(P)$ sind, in der Situation

$$(*_1) \quad P = \text{pyr}_i(\text{shell}_{q-i}(Q))$$

befinden.

Wir zeigen nun, dass es keine weiteren Fälle geben kann: Nehmen wir an, es gäbe eine weitere i' -Seite G von Σ (mit $\mathcal{V}(G) := \{v_{G_1}, \dots, v_{G_s}\}$), die neben F ebenfalls nicht in $\mathcal{F}(P)$ läge und es gäbe kein i , so dass wir uns in der Situation $(*_1)$ befänden. Dann folgt sofort aufgrund der Tatsache, dass $\mathcal{V}(Q)$ und $\mathcal{V}(G)$ sowie $\mathcal{V}(Q)$ und $\mathcal{V}(F)$ affin abhängig sind, dass

$$\mathcal{V}(Q) \text{ und } \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G)$$

affin abhängig sind. Etwas bildlicher kann man sich dies folgendermaßen verdeutlichen: Nehmen wir an, eine Seite (die Grundseite) von $P = \text{pyr}_i(\text{shell}_{q-i}(Q))$ enthält Q und $F \in \Sigma$ sowie $G \in \Sigma$ im Inneren (d. h. $Q, F, G \notin \mathcal{F}(P)$). Dann liegt offensichtlich auch $G \cap F$ im Inneren der Grundseite, d. h. $G \cap F \notin \mathcal{F}(P)$.

Wir können o.B.d.A davon ausgehen, der Schnitt enthalte mindestens zwei Ecken von Σ , denn andernfalls wäre eine oder sogar alle Ecken von Σ affin abhängig von $\mathcal{V}(Q)$, was aber nicht sein kann, da alle Ecken von Σ in $\mathcal{F}(P)$ liegen müssen, weil Σ ein spezielles Simplex von P ist. In diesem Fall bildet der Schnitt von $\mathcal{V}(F)$ und $\mathcal{V}(G)$ die Eckenmenge einer i'' -Seite (mit $i'' \geq 1$) von Σ ; diese liegt nicht in $\mathcal{F}(P)$ und damit liegen auch alle $i''+1, \dots, m-1$ -Seiten von Σ , die $\mathcal{V}(G) \cap \mathcal{V}(F)$ enthalten, nicht in $\mathcal{F}(P)$. Dies entspricht jedoch gerade der Situation

$$P = \text{pyr } i''(\text{shell}_{q-i''}(Q))$$

im Widerspruch zu unserer Annahme.

□

3.3 Ausblick für wilde Polytope mit speziellen Simplizes

In Bemerkung 3.2.4, Beispiel 3.2.5 und Definition 3.2.6 in Abschnitt 3.2.1 haben wir die Unterscheidung zwischen zahmen und wilden Polytopen mit speziellen Simplizes eingeführt und die Notwendigkeit dieser Unterscheidung am Beispiel des 3-Würfels demonstriert. Nachdem wir im vorherigen Abschnitt die zahmen Polytope vollständig klassifiziert haben und gezeigt haben, wie sich diese geometrisch konstruieren lassen, stellen sich dieselben Frage bzgl. wilden Polytopen (man vergl. hierzu die Fragen auf Seite 22, die wir für zahme Polytope vollständig beantwortet haben). Da ein analoges Programm für wilde Polytope jedoch definitiv den Umfang sowie den zeitlichen Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen würde, beschränken wir uns auf einige wenige generelle Überlegungen hinsichtlich der Strategie eines solchen Programmes und beweisen, dass auf der Menge aller Polytope mit speziellen Simplizes PS (und damit insbesondere der wilden PS^w) die rückwärtige lexikographische Triangulierung als eine Äquivalenzrelation operiert, bei der die Vertreter der Äquivalenzklassen in kanonischer Weise durch die k -te Muschel zu einem bestimmten

Basispolytop Q gegeben ist.

Eine sinnvolle Strategie zur Klassifizierung von wilden Polytopen könnte meiner Einschätzung nach sein, zunächst zu untersuchen welche wilden Polytope sich aus einem gegebenen zahmen Polytop P mit Basispolytop Q und speziellem Simplex Σ dadurch erzeugen lassen, dass man sukzessive Ecken aus $\mathcal{V}(Q)$ aus dem affinen Grundraum von Q herausschiebt. Hierbei scheint der Fall $PS_{(3,1)}$ einigermaßen überschaubar zu sein. Ein nächster Schritt könnte in der Betrachtung der Fälle $PS_{(n,n-2)}$ und $PS_{(n,1)}$ bestehen, die einerseits übersichtlich genug sein könnten, um vollständig verstanden zu werden, andererseits mit etwas Glück bereits genügend Einblick in die Gesamtstruktur von PS^w mit sich bringen, um den allgemeinen Fall $PS_{(n,k)}$ ebenfalls untersuchen zu können. Völlig offen bleibt hierbei natürlich die Frage, ob es wilde Polytope mit speziellen Simplizes geben kann, die sich nicht in oben beschriebener Weise aus zahmen Polytopen erzeugen lassen. Mit anderen Worten: Ob es wilde Polytope gibt, deren Randverband andere Elemente aus Randverband des zugehörigen speziellen Simplexes enthält, als dies für zahme Polytope der Fall sein kann (vergl. Theorem 3.2.17). Geht man davon aus, dass es solche anderen wilden Polytope nicht geben kann (oder beschränkt sich schlicht auf solche, die sich auf zahmen durch Verschieben von Ecken konstruieren lassen), lässt sich das folgende wichtige, fundamentale Lemma festhalten:

Lemma 3.3.1:

Seien $P \in PS^m(Q)_{(n,k)}$ und $P' \in PS^w(Q)_{(n,k)}$ ein zahmes bzw. wildes Polytop der Dim. n mit speziellem k -Simplex Σ und Basispolytop Q , für die gelte:

$$(*_1) \quad \forall F \in \mathcal{F}(\partial\Sigma) : F \in \mathcal{F}(P) \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}(P'),$$

d.h. für die dieselben Seiten von Σ in ihrem Seitenverband liegen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall G' \in \mathcal{F}(P') \exists G_1, \dots, G_s \in \mathcal{F}(P) : \quad G' &= \bigcup_{i=1}^s G_i \\ &= \text{conv} \bigcup_{i=1}^s \mathcal{V}(G_i) \end{aligned}$$

Beweis:

Offenbar reicht es, die Aussage für Facetten zu zeigen. Gemäß Theorem 3.2.17 gilt

$$P = \text{pyr}_i(\text{shell}_j(\text{bipyr } Q))$$

und somit hat jede Facette F in $\mathcal{F}(P)$ die Form

$$F = \text{conv}(\mathcal{V}(G) \cup \mathcal{V}(S))$$

wobei G eine Facette von Q und S eine Facette aus $\mathcal{F}(\partial\Sigma)$ ist. Wir betrachten die Facetten aus $\mathcal{F}(P')$, die genau die Ecken $\mathcal{V}(S)$ aus $\mathcal{V}(\Sigma)$ enthalten: Sei F' eine solche und $\mathcal{V}(G') := \mathcal{V}(F') \setminus \mathcal{V}(S)$. Seien G_1, \dots, G_s die Facetten von Q , aus denen $\mathcal{V}(G')$ Ecken enthält, die keine Seite der jeweiligen Facette bilden. D. h. es gilt für alle $i \in \{1, \dots, s\}$:

$$\mathcal{V}(G') \cap \mathcal{V}(G_i) \notin \mathcal{F}(Q) \setminus \{G_i\}$$

wobei $\emptyset \in \mathcal{F}(Q)$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\mathcal{V}(G') = \mathcal{V}(G_1) \cup \mathcal{V}(G_s).$$

Nehmen wir an, es gäbe $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}(G_i)$ mit $v_1, \dots, v_k \notin \mathcal{V}(G')$. Da Q Basispolytop von P' ist, muss aber insbesondere gelten, dass $G_i \in \mathcal{F}(P')$. Somit können v_1, \dots, v_k höchstens eine Seite von G_i bilden, was wir bereits ausgeschlossen haben.

□

Lemma 3.3.2:

Sei Q ein Polytop der Dimension $n - m$ und $P \in PS^m(Q)_{(n,m)}$ (mit spez. Simplex Σ). Dann gilt für alle $P' \in PS^w(Q)_{(n,m)}$:

$$\Delta_\tau(P) = \Delta_\tau(P'),$$

wobei $\tau := (v_p, \dots, v_0)$ und $\mathcal{V}(\Sigma) = (v_0, \dots, v_m)$.

Aufgrund des induktiven Beweises von Athanasiadis Lemma 3.1.7 wissen wir, dass

$$\Delta_\tau(P) = \Delta_{\tau'}(\partial Q) * \Sigma.$$

Wir geben zunächst unter Rückgriff auf Abschnitt 3.2 eine konstruktive Argumentation für diese Aussage, um im Detail nachvollziehen zu können, was während der RLT mit P passiert. Wir tun dies hier in aller Ausführlichkeit, da wir diese Überlegungen ohnehin später für die Veranschaulichung des Beweises von Athanasiadis' Haupttheorem 5.1.1 in Abschnitt 4.2 benötigen (vergl. Punkt $(*_2)$ auf S. 47):

Beweis:

Gemäß unseres Theorems 3.2.17 wissen wir, dass ein P ein Basispolytop Q besitzt, so dass

$$\exists i, j \in \mathbb{N} : i + j = m - 2 \wedge P = \text{pyr}_i(\text{shell}_j(\text{bipyr } Q)).$$

Man beachte für die Triangulierung nun die Reihenfolge τ der Ecken: Es werden zunächst die Ecken des speziellen Simplexes Σ durchlaufen. Wirft man einen Blick auf die Definition 2.3.2 der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung (oder wahlweise auch Definition 2.3.4), so erkennt man leicht, dass stets alle (evtl. in $\mathcal{F}(P)$ nicht vorhandenen) Seiten von Σ eingefügt werden. D.h. wir können nach Abschnitt 3.2 o.B.d.A. davon ausgehen, dass

$$P = \text{shell}_{m-1}(Q) \left(\overset{\text{Kor. 3.2.15}}{\rightarrow} \mathcal{F}(\partial P) = \mathcal{F}(\partial Q) * \mathcal{F}(\partial \Sigma) \right).$$

Zweitens ist sofort ersichtlich, dass Σ selbst bei der Triangulierung eingefügt wird: Bei der Betrachtung von v_1 ist die einzige maximale Seite P selbst, d. h. es werden alle Facetten von P betrachtet, die v_1 nicht enthalten und (verwendet man die pulling triangulation; für RLT verläuft das Argument fast analog) die konvexen Hüllen aller Seiten dieser Facetten mit v_1 gebildet. Jede Facette, die v_1 nicht enthält, enthält aber per definitionem die Ecken v_2, \dots, v_m . Also wird bei der Triangulierung $\text{conv}\{v_1, \dots, v_m\} = \Sigma$ eingefügt.

Drittens kann man leicht erkennen, dass bei $\Delta_\tau(P)$ immer $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial Q))$ mit der durch τ induzierten Ordnung τ' zustande kommt, da nach Satz 3.2.2 Q vollständig im Rand von P liegt, somit $\mathcal{F}(P) \setminus \Sigma = \mathcal{F}(\partial Q)$ ist und beim Durchlaufen von $\mathcal{V}(\Sigma)$ während der Triangulierung keine Seiten in Elementen aus $\mathcal{F}(\partial Q)$ eingefügt werden können. Also können wir davon ausgehen, dass wir o.B.d.A. bereits in der Situation

$$\mathcal{F}(\partial P) = (\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial Q)) * \mathcal{F}(\partial \Sigma)).$$

Wir merken uns außerdem, dass nach der Triangulierung $\Sigma \in \Delta_\tau(\mathcal{F}(P))$ gilt (dies wurde der Übersichtlichkeit halber in obiger Zeile nicht eingefügt). Fängt man an dieser Stelle an zu triangulieren (hier ist die pulling triangulation wieder anschaulicher), so besteht jede Facette von P aus $m - 1$ Ecken aus $\mathcal{V}(\Sigma)$ und $n - m - 1$ Ecken aus $\mathcal{V}(Q)$, deren Vereinigung affin unabhängig sind. Nun werden alle Ecken von Σ durchlaufen und es werden (gemäß Definition 2.3.4) jeweils die folgenden konvexen Hüllen (mit allen zugehörigen Seiten) gebildet:

$$\text{conv} \left\{ v_i \cup (\mathcal{V}(\Sigma) \setminus v_i) \cup \underbrace{\{w_{j_1}, \dots, w_{j_{n-m-1}}\}}_{\in \Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial Q))} \right\}.$$

Da ganz $\mathcal{F}(\partial Q)$ und somit auch $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial Q))$ in $\mathcal{F}(\partial P)$ liegt, werden hierbei auch tatsächlich alle $n - m - 1$ eckigen Seiten von $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial Q))$ ausgewählt (da jede davon in mindestens einer Facette liegt). Somit ergibt sich:

$$\Delta_{\tau}(P) = \bigcup_{A \in \Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial Q)), \#\mathcal{V}(A)=n-m-1} \text{conv} \{ \Sigma \cup A \} \stackrel{\text{Def. 2.6.1}}{=} \Sigma * \Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial Q)).$$

Dies bedeutet noch einmal zusammengefasst: Die gewählte Reihenfolge der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung von P bewirkt, dass hier nichts anderes passiert als zunächst eine rückwärtige lexikographische Triangulierung von $\mathcal{F}(\partial Q)$ zu machen und dann mit jedem Element aus dieser Triangulierung die konvexe Hülle mit Σ zu bilden (was in diesem Fall der simplizialen Vereinigung entspricht, da Σ lediglich eine maximale Seite hat). Wir können also $\Delta_{\tau}(P)$ als eine simpliziale Σ -Aufdickung von $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial Q))$ interpretieren.

Betrachten wir nun $P' \in PS^w(Q)_{(n,m)}$: Mit analoger Argumentation wie bei P können wir o.B.d.A davon ausgehen, dass zum ersten $\mathcal{F}(\Sigma) \subset \mathcal{F}(P)$ und zum zweiten $\mathcal{F}(\Delta_{\tau'}(\partial Q)) \subset \mathcal{F}(P)$. Damit sind insbesondere auch die Voraussetzungen für Lemma 3.3.1 erfüllt und es gilt

$$\forall G' \in \mathcal{F}(P') \exists G_1, \dots, G_s \in \mathcal{F}(P) : \begin{aligned} G' &= \bigcup_{i=1}^s G_i \\ &= \text{conv} \bigcup_{i=1}^s \mathcal{V}(G_i) \end{aligned}$$

und es muss zusätzlich gelten, dass alle G_i Simplizes sind. Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass durch die Triangulierung diejenigen Seiten, die in $\mathcal{F}(P)$, aber nicht in $\mathcal{F}(P')$ liegen, nämlich die Schnitte der jeweiligen G_i , bei der RLT ebenfalls wieder eingefügt werden und dies keinen Einfluss auf die übrigen, neu einzufügenden Seiten hat.

Wir betrachten hierzu wieder die pulling triangulation: Sei F eine k -Seite, die in $\mathcal{F}(P)$, aber nicht in $\mathcal{F}(P')$ liegt. Damit ist F der Schnitt von $n-k$ $(n-1)$ -Simplizes S_1, \dots, S_{n-k} sein, die jede für sich eine Facette von $\mathcal{F}(P)$ sind. Dementsprechend muss F selbst ein Simplex sein. Aufgrund des Lemmas müssen S_1, \dots, S_{n-k} außerdem gemeinsam eine Facette S' von $\mathcal{F}(P')$ bilden, was insbesondere impliziert, dass die S_i hinsichtlich der Ecken aus Σ übereinstimmen müssen (sonst enthielte S' alle Ecken aus Σ und P' somit kein spezielles Simplex). Seien $\{v_0, \dots, v_m\} \setminus \{v_i\}$ und v_{m+1}, \dots, v_{m+l} die Ecken von F , die in Σ bzw. Q liegen (und somit $\text{conv} \{v_{m+1}, \dots, v_{m+l}\} \in \mathcal{F}(P')$). Wir betrachten die erste Ecke aus S' , die im Zuge der RLT bzgl. τ von $\mathcal{F}(P')$ S als maximale Seite betrachtet (o.B.d.A.: v_1) und somit in den negativen Halbraum der Stützhyperebene von S' verschoben wird: Die Verschiebung hat insbesondere zur Folge, dass die verschiedenen Seiten von Q , die in S' lagen, nicht länger in einer gemeinsamen Hyperebene mit $\{v_0, \dots, v_m\} \setminus \{v_i\}$ liegen, was wiederum impliziert, dass durch die auf die Verschiebung folgende konvexe Hülle-Bildung die Simplizes S_1, \dots, S_{n-k} erneut entstehen und somit auch F als deren Schnitt.

□

Korollar 3.3.3:

Seien P, P' zwei Polytope mit speziellen Simplizes. Dann ist die durch

$$P \sim P' :\Leftrightarrow \Delta_{\tau}(P) = \Delta_{\tau}(P')$$

(mit τ wie oben) definierte Relation \sim eine Äquivalenzrelation auf PS . Insbesondere gilt für alle $P' \in PS^w(Q)_{(n,m)}$:

$$P' \sim \text{shell}_m(Q).$$

□

3.4 Explizite Klassifikation von PS_2^m bis PS_5^m

Wir wollen nun die zahmen Polytope niedriger Dimensionen mit speziellem Simplex noch einmal explizit unter Verwendung aller Resultate sauber klassifizieren. Da PS_1 trivial ist, starten wir mit PS_2 und gehen bis PS_5^m , wobei wir hier nur noch Teilklassifizierungen vornehmen. Es sei stets P das Polytop mit speziellem Simplex Σ und Q das zu Grunde liegende Polytop, von dem Pyramiden und / oder Muscheln gebildet werden.

Dimension 2: PS_2

- $PS_{(2,1)} - \dim Q = 1, \dim \Sigma = 1:$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 2, 1) \\ \Rightarrow & P = \text{bipyr } Q \\ \Rightarrow & f_P = (1, 4, 4, 1). \end{aligned}$$

Dimension 3: PS_3^m

- $PS_{(3,2)}^m - \dim Q = 1, \dim \Sigma = 2:$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 2, 1) \\ \Rightarrow & P = \text{shell bipyr } Q \quad P = \text{pyr bipyr } Q \\ \Rightarrow & f_P = (1, 5, 9, 6, 1) \quad f_P = (1, 5, 8, 5, 1) \end{aligned}$$

- $PS_{(3,1)}^m - \dim Q = 2, \dim \Sigma = 1:$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, k, k, 1), \quad k \geq 3 \\ \Rightarrow & P = \text{bipyr } Q \\ \Rightarrow & f_P = (1, k + 2, 3k, 2k, 1) \end{aligned}$$

Interessant ist es an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass man für $k = 3$ im unteren Fall ebenfalls $(1, 5, 9, 6, 4)$ als f -Vektor erhält; dieses Polytop enthält also sowohl ein spezielles 1- als auch ein spezielles 2-Simplex. Allgemein könnte es eine interessante Frage darstellen (die wir allerdings nicht behandeln), welche Bedingungen explizit gegeben sein müssen, damit ein Polytop ein spezielles i - und ein spezielles j -Simplex enthält.

Dimension 4: PS_4^m

- $PS_{(4,3)}^m - \dim Q = 1, \dim \Sigma = 3:$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 2, 1) \\ \Rightarrow & P = \text{shell}_2(\text{bipyr } Q) \quad P = \text{pyr shell bipyr } Q \quad P = \text{pyr}_2(\text{bipyr } Q) \\ \Rightarrow & f_P = (1, 6, 15, 18, 9, 1) \quad f_P = (1, 6, 14, 15, 7, 1) \quad f_P = (1, 6, 13, 13, 6, 1) \end{aligned}$$

- $PS_{(4,2)}^m - \dim Q = 2, \dim \Sigma = 2:$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, k, k, 1), \quad k \geq 3 \\ \Rightarrow & P = \text{shell bipyr } Q \quad P = \text{pyr bipyr } Q \\ \Rightarrow & f_P = (1, k + 3, 4k + 3, 6k, 3k, 1) \quad f_P = (1, k + 3, 4k + 2, 5k, 2k + 1, 1) \end{aligned}$$

- $PS_{(4,1)}^m$ – $\dim Q = 3$, $\dim \Sigma = 1$: Wir werden (und können) lediglich den Fall betrachten, dass Q ein 0/1–Polytop ist. In diesem Fall ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & f_Q = (1, 4, 6, 4, 1) & f_Q = (1, 5, 8, 5, 1) & f_Q = (1, 5, 9, 6, 1) \\
 \Rightarrow & & P = \text{bipy}_2 Q & \\
 \Rightarrow & f_P = (1, 6, 14, 16, 8, 1) & f_P = (1, 7, 18, 21, 10, 1) & f_P = (1, 7, 19, 24, 12, 1) \\
 \\
 & f_Q = (1, 6, 9, 5, 1) & f_Q = (1, 6, 11, 7, 1) & f_Q = (1, 6, 12, 8, 1) \\
 \Rightarrow & & P = \text{bipy}_2 Q & \\
 \Rightarrow & f_P = (1, 8, 21, 23, 10, 1) & f_P = (1, 8, 23, 29, 14, 1) & f_P = (1, 8, 24, 32, 16, 1) \\
 \\
 & f_Q = (1, 7, 12, 7, 1) & f_Q = (1, 8, 12, 6, 1) & \\
 \Rightarrow & & P = \text{bipy}_2 Q & \\
 \Rightarrow & f_P = (1, 9, 26, 31, 14, 1) & f_P = (1, 10, 28, 30, 12, 1) &
 \end{aligned}$$

Dimension 5: PS_5^m

- $PS_{(5,1)}^m$ – $\dim Q = 1$, $\dim \Sigma = 4$:

$$\begin{aligned}
 & f_Q = (1, 2, 1) \\
 \Rightarrow & P = \text{shell}_3(\text{bipy}_2 Q) & P = \text{pyr shell}_2(\text{bipy}_2 Q) \\
 \Rightarrow & f_P = (1, 7, 25, 60, 75, 35, 1) & f_P = (1, 7, 21, 33, 27, 10, 1) \\
 \\
 \Rightarrow & P = \text{pyr}_2(\text{shell bipy}_2 Q) & P = \text{pyr}_3(\text{bipy}_2 Q) \\
 \Rightarrow & f_P = (1, 7, 20, 29, 22, 8, 1) & f_P = (1, 7, 19, 26, 19, 7, 1)
 \end{aligned}$$

- $PS_{(5,2)}^m$ – $\dim Q = 2$, $\dim \Sigma = 3$:

$$\begin{aligned}
 & f_Q = (1, k, k, 1), \quad k \geq 3 \\
 \Rightarrow & P = \text{shell}_2(\text{bipy}_2 Q) & P = \text{pyr shell bipy}_2 Q \\
 \Rightarrow & f_P = (1, k + 4, 5k + 6, 10k + 4, 10k, 4k, 1) & f_P = (1, k + 4, 5k + 6, 10k + 3, 9k, 3k + 1, 1) \\
 \\
 & f_Q = (1, k, k, 1), \quad k \geq 3 \\
 \Rightarrow & P = \text{pyr}_2(\text{bipy}_2 Q) \\
 \Rightarrow & f_P = (1, k + 4, 5k + 5, 9k + 2, 7k + 1, 2k + 2, 1)
 \end{aligned}$$

- $PS_{(5,3)}^m$ – $\dim Q = 3$, $\dim \Sigma = 2$: Auch hier werden (und können) wir lediglich den Fall betrachten, dass Q ein 0/1–Polytop ist. In diesem Fall ergibt sich:

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 4, 6, 4, 1) \\ \Rightarrow P = \text{pyr bipyr } Q & \quad P = \text{shell bipyr } Q \\ \Rightarrow f_Q = (1, 7, 20, 30, 24, 9, 1) & \quad f_Q = (1, 7, 21, 34, 30, 12, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 5, 8, 5, 1) \\ \Rightarrow P = \text{pyr bipyr } Q & \quad P = \text{shell bipyr } Q \\ \Rightarrow f_Q = (1, 8, 25, 39, 31, 11, 1) & \quad f_Q = (1, 8, 26, 44, 39, 15, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 5, 9, 6, 1) \\ \Rightarrow P = \text{pyr bipyr } Q & \quad P = \text{shell bipyr } Q \\ \Rightarrow f_Q = (1, 8, 26, 43, 36, 13, 1) & \quad f_Q = (1, 8, 27, 49, 45, 18, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 6, 9, 5, 1) \\ \Rightarrow P = \text{pyr bipyr } Q & \quad P = \text{shell bipyr } Q \\ \Rightarrow f_Q = (1, 9, 29, 44, 33, 11, 1) & \quad f_Q = (1, 9, 30, 50, 42, 15, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 6, 11, 7, 1) \\ \Rightarrow P = \text{pyr bipyr } Q & \quad P = \text{shell bipyr } Q \\ \Rightarrow f_Q = (1, 9, 31, 52, 43, 15, 1) & \quad f_Q = (1, 9, 32, 58, 54, 21, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 6, 12, 8, 1) \\ \Rightarrow P = \text{pyr bipyr } Q & \quad P = \text{shell bipyr } Q \\ \Rightarrow f_Q = (1, 9, 32, 56, 48, 17, 1) & \quad f_Q = (1, 9, 33, 2, 60, 24, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 7, 12, 7, 1) \\ \Rightarrow P = \text{pyr bipyr } Q & \quad P = \text{shell bipyr } Q \\ \Rightarrow f_Q = (1, 10, 35, 57, 45, 15, 1) & \quad f_Q = (1, 10, 36, 64, 57, 21, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_Q = (1, 8, 12, 6, 1) \\ \Rightarrow P = \text{pyr bipyr } Q & \quad P = \text{shell bipyr } Q \\ \Rightarrow f_Q = (1, 11, 38, 58, 42, 13, 1) & \quad f_Q = (1, 11, 39, 66, 54, 18, 1) \end{aligned}$$

- $PS_{(5,4)}^m$ – $\dim Q = 4$, $\dim \Sigma = 1$: Behandeln wir aufgrund der Beliebigkeit von Q nicht mehr.

4 Ehrhart Polynome

In diesem Kapitel werden wir uns mit *Ehrhart Polynomen* (und den zugehörigen *Ehrhart-Reihen*) beschäftigen. Diese Polynome tauchen in natürlicher Weise auf, wenn man n -dimensionale, ganzzahlige Polytope mit dem \mathbb{Z}^n schneidet und danach das Polytop sukzessive mit ganzzahligen Skalaren streckt: Die jeweilige Anzahl der ganzzahligen Punkte des Polytopes wird dann, wie Ehrhart erstmals zeigen konnte, durch ein Polynom mit dem Skalar als Variable beschrieben.

Unangenehmerweise ist im Allgemeinen nichts über die Koeffizienten des Polynoms bekannt. Allerdings gelang es Stanley zu zeigen, dass sich die Berechnung der Ehrhart-Reihe auf die Berechnung des h -Polynoms der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung des betrachteten Polytops zurückführen lässt, sofern dieses komprimiert ist.

Leider lassen sich auch über h -Polynome kaum allgemeine Aussagen treffen. An dieser Stelle setzt Athanasiadis an – er konnte beweisen, dass sich Stanleys Satz entscheidend verallgemeinern lässt, sofern man zusätzlich voraussetzt, dass das betrachtete Polytop ein spezielles Simplex enthält, was der wesentliche Grund dafür ist, dass wir uns in dieser Arbeit mit dem Ehrhart-Polynom auseinandersetzen werden.

Wir gehen folgendermaßen vor: In Abschnitt 4.1 definieren wir das Ehrhart-Polynom sowie die Ehrhart-Reihe, geben einige Beispiele und präsentieren den oben bereits erwähnten Satz von Stanley (auf Beweise verzichten wir aus Platzgründen und verweisen auf die entsprechenden Literatur). In Abschnitt 4.2 widmen wir uns dem Theorem von Athanasiadis, das wir ausführlich inklusive des Beweises in seiner ursprünglichen Form diskutieren wollen. Im Anschluss wenden wir unsere Resultate aus Kapitel 3 auf das Theorem an und erörtern es nochmals vor diesem Hintergrund. Dadurch wird nicht nur bereits der noch fehlende Teil der theoretischen Grundlage für die algorithmische Umsetzung von Athanasiadis Theorem in Kapitel 5 gelegt, sondern diese erneute Betrachtung wird auch dazu führen, dass das in seiner ursprünglichen Form überraschende Resultat von Athanasiadis eine einfache und vollkommen natürliche Interpretation erhält.

4.1 Definition und ein Satz von Stanley

Wir beginnen mit der Definition des *Ehrhart-Polynoms* (vergl. [Sta06, Abschnitt 4.6, S. 235ff.]; dort findet der interessierte Leser auch den Nachweis, dass es sich bei $i(P, r)$ tatsächlich um ein (Quasi)-Polynom handelt):

Satz und Definition 4.1.1:

Sei P ein rationales, n -dimensionales Polytop. Dann ist die über P definierte Funktion

$$i_P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto i(P, r) := \#(rP \cap \mathbb{Z}^n)$$

ein quasi-Polynom in r – das sogenannte EHRHART QUASI-POLYNOM von P . Falls P ein ganzzahliges Polytop ist, dann ist das quasi-Polynom tatsächlich ein Polynom in (der Variablen) r – das EHRHART-POLYNOM von P .

Statt das Ehrhart-Polynom zu betrachten, ist es oftmals einfacher, mit der *Ehrhart-Reihe* zu arbeiten (vergl. [Rob07]):

Satz und Definition 4.1.2:

Die EHRHART-REIHE zu einem Ehrhart-Polynom $i(P, r)$ definieren wir durch

$$\sum_{r=0}^{\infty} i(P, r)t^r.$$

Es gilt stets

$$\deg(i(P, r)) = d \Leftrightarrow \sum_{r=0}^{\infty} i(P, r)t^r = \frac{g(t)}{(1-t)^{d+1}},$$

wobei $g(t)$ ein Polynom mit $\deg(g) \leq d$ ist.

Beispiel 4.1.3:

Wir betrachten einige sehr simple Polytope, um deren Ehrhart–Polynome zu berechnen:

- (a) Sei P der n -dimensionale Einheitswürfel im \mathbb{R}^n . Dann gilt offensichtlich (vergl. hierzu auch [Sta06, S. 235]):

$$i(P, r) = (r + 1)^n.$$

- (b) Sei S_2 das Standard-2-Simplex im \mathbb{R}^2 . Dann gilt:

$$i(S_2, r) = \sum_{j=1}^{r+1} j = (1 + r) \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right).$$

- (c) Sei S_3 das Standard-3-Simplex im \mathbb{R}^3 . Dann gilt:

$$i(S_3, r) = \sum_{j=0}^r i(S_2, j) = \sum_{j=1}^{r+1} rj - j^2 = (1 + r) \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{r}{3}\right).$$

Trotz der simplen obigen Beispiele bleibt, wie bereits eingangs erwähnt, im Allgemeinen das Probleme bestehen, dass sich keine Aussagen über die Koeffizienten von Ehrhart–Polynomen treffen lassen. Einen Lösungsansatz liefert der folgende wichtige Satz von Stanley, der die Ehrhart–Reihe von ganzzahligen Polytopen P mit komprimierter Ordnung τ ihrer Ecken in Relation zum h -Polynom der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung $\Delta_\tau(P)$ von P bzgl. τ setzt. Dieser Satz bildet eine Grundlage für Athanasiadis' paper [Ath05] bzw. sein Hauptresultat in demselbigen (Theorem 4.2.1 in dieser Arbeit).

Satz 4.1.4 (Stanley):

Falls P ein n -dimensionales, ganzzahliges Polytop in \mathbb{R}^n und τ eine komprimierte Ordnung seiner Ecken (und somit $\Delta_\tau(P)$ unimodular) ist, so gilt (vergl. [Ath05, S. 166, Lemma 2.2], [Sta80, Korollar 2.5]):

$$\sum_{r \geq 0} i(P, r)t^r = \frac{h(\Delta_\tau(P), t)}{(1-t)^{n+1}}.$$

4.2 Athanasiadis' Theorem

Es folgt nun das ebenfalls bereits mehrfach erwähnte Resultat von Athanasiadis (vergl. [Ath05, S. 168, Theorem 3.5]). Dieses stellt eine wesentliche Erweiterung des Satzes 4.1.4 dar, sofern das betrachtete Polytop P zusätzlich über ein spezielles Simplex verfügt. Insbesondere gestattet es für derartige Polytope, konkrete Aussagen über die Koeffizienten des Ehrhart–Polynoms zu treffen, was im Satz 4.1.4 noch nicht möglich war, da sich auch über die Koeffizienten des h -Polynoms von $\Delta_\tau(P)$ (bzgl. einer Ordnung τ) im Allgemeinen keine generellen Aussagen treffen lassen.

Der originale Beweis des Theorems, den wir hier ebenfalls diskutieren, ist zwar (nach der umfangreichen bereits geleisteten Vorarbeit in den Abschnitten 2 und 3.1) einfach, aber alles andere als anschaulich. Dass die in dem Theorem getroffene Aussage dennoch eine ganz natürliche und naheliegende ist, wird erst durch unsere im Abschnitt 3.2 neu gewonnenen Einsichten über Polytope mit speziellen Simlizes deutlich. Diese anschauliche Interpretation des Resultates werden wir im Anschluss an den originalen Beweis geben.

Theorem 4.2.1:

Sei P ein ganzzahliges Polytop mit $\dim(P) = n$ und $\tau := (v_p, \dots, v_1)$ eine Anordnung seiner Ecken, so dass

- (i) τ komprimiert ist und
- (ii) $\{v_1, \dots, v_m\}$ die Eckenmenge eines speziellen Simplexes Σ in P ist.

Dann gilt

$$\sum_{r \geq 0} i(P, r) t^r = \frac{h(t)}{(1-t)^{n+1}},$$

wobei $h(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_d t^d$ das h -Polynom des Randkomplexes eines simplizialen Polytopes Q der Dimension $d := n - m + 1$ ist, so dass $h(t)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\forall i \in \{0, \dots, d\} : h_i = h_{d-i} \text{ und } 1 = h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor d/2 \rfloor}.$$

Darüber hinaus kann Q so gewählt werden, dass sein Randkomplex isomorph zur rückwärtigen lexikographischen Triangulierung von $\mathcal{F}(P) \setminus \{v_1, \dots, v_m\}$ bzgl. der Ordnung $(v_p, v_{p-1}, \dots, v_{m+1})$ ist.

Beweis:

Sei $\sigma := \{v_1, \dots, v_m\}$ und sei $\Delta := \Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(P) \setminus \sigma)$ die rückwärtige lexikographische Triangulierung von $\mathcal{F}(P) \setminus \sigma$ bzgl. der Ordnung $\tau' := (v_p, v_{p-1}, \dots, v_{m+1})$. Wir verwenden zunächst den Satz 4.1.4 von Stanley und folgern aus diesem, dass

$$(*_1) \quad \sum_{r \geq 0} i(P, r) t^r = \frac{h(\Delta_{\tau}(P), t)}{(1-t)^{n+1}}.$$

Teil (i) von Lemma 3.1.7 impliziert

$$(*_2) \quad h(\Delta_{\tau}(P), t) = h(\Sigma * \Delta, t).$$

Gemäß Lemma 2.6.4 gilt

$$(*_3) \quad h(\Sigma * \Delta, t) = h(\Sigma, t) \cdot h(\Delta, t).$$

Außerdem wissen wir nach Lemma 2.2.8, dass

$$(*_4) \quad h(\Sigma, t) = 1,$$

wobei dieses Lemma nur gilt aufgrund der Definition von f - und h -Polynomen im Sinne von Satz und Definition 2.2.6 (vergl. hierzu Bemerkung 2.2.7). Aus $(*_1)$ bis $(*_4)$ folgt

$$\sum_{r \geq 0} i(P, r) t^r = \frac{h(\Delta, t)}{(1-t)^{n+1}}.$$

Aus Teil (ii) des Lemmas 3.1.7 folgt, dass Δ isomorph ist zum Rand eines simplizialen Polytopes Q der Dimension d ist. Die Aussagen über die Koeffizienten von $h(\mathcal{F}(\partial Q), t)$ folgen aus Satz 2.2.9.

□

Damit wir nachvollziehen können, warum die Aussage des Theorems gilt und was innerhalb des Beweises passiert, ist es insbesondere notwendig, $(*_2)$, $(*_3)$ und $(*_4)$ zu verstehen, denn $(*_1)$ ist lediglich wieder der Satz von Stanley und der letzte Satz bzgl. Teil (ii) aus Lemma 3.1.7 gilt im wesentlichen aufgrund der bereits in Abschnitt 2.3.2 gegebene geometrische Entsprechung der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung bzw. der pulling triangulation.

$(*_2)$: Entspricht exakt der Argumentation in Lemma 3.3.2 .

$(*_3)$, $(*_4)$: Man kann die Schritte $(*_3)$, $(*_4)$, wenn man $(*_2)$ verstanden hat, auf eine simple Weise über die zugehörigen f -Vektoren interpretieren, denn wegen

$$\Delta_{\tau}(P) = \Sigma * \Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$$

besteht jede k -Seite von $\Delta_{\tau}(P)$ genau aus den konvexen Hüllen aller i -Seiten von Σ und j -Seiten von $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$ mit $i + j = k - 1$ – dasselbe Prinzip, das wir schon bei der Diskussion

der kombinatorischen Struktur von Muscheln in Satz 3.2.14 kennengelernt haben. Überträgt man dies auf die zugehörigen f -Vektoren, so erhält man

$$f_{\Delta_\tau(P)} = f_\Sigma \underbrace{*}_{\text{Faltung}} f_{\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))} \Rightarrow f(\Delta_\tau(P), x) = f(\Sigma, x) \cdot f(\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))).$$

Mit Satz und Definition 2.2.6 lässt sich dies auf h -Polynome übertragen und sobald man Lemma 2.2.8, sprich $(*_4)$, einfach hinnimmt, hat man das gewünschte Resultat.

Wir möchten allerdings eine Interpretation, die die h -Polynome direkt erklärt, aus der $(*_4)$ hervorgeht und die insbesondere unsere Erklärung von $(*_2)$ aufgreift. Hierzu zunächst ein kleiner Exkurs darüber, wie sich h -Vektoren eines Simplicialkomplexes interpretieren lassen (vergl. hierzu [Zie07, S. 247f.]):

Bemerkung 4.2.2:

Sei P ein (reiner) n -dimensionaler Simplicialkomplex und $\widehat{F} := (F_1, \dots, F_k)$ eine Anordnung seiner maximalen Seiten, so dass \widehat{F} eine *shelling* von P ist (nicht zu verwechseln mit den Muscheln (shell P) aus Kapitel 3; für unsere Zwecke ist es nicht wichtig, was genau darunter zu verstehen ist (der interessierte Leser vergl. hierzu [Zie07, S. 233ff.] für die Details); es reicht, dass für alle Polytope und rückwärtige lexikographische Triangulierungen derselben stets eine solche shelling existiert (vergl. [Zie07, S. 240, Theorem 8.11; S. 243, Korollar 8.14 sowie S. 129 und S. 130 unten bzw. S. 145, Exercise 5.0]). Dann induziert \widehat{F} eine Partitionierung I_1, \dots, I_k von $\mathcal{F}(P)$, wobei

$$I_1 := F_1 \text{ und } \forall j \in \{2, \dots, k\} : I_j := \{G \in \mathcal{F}(P) \mid G \in F_j \wedge \forall i \in \{1, \dots, j-1\} : G \notin F_i\}.$$

Man definiere nun

$$M := \bigcup_{j=1}^k \{G \mid \dim(G) \text{ ist minimal in } I_j\}.$$

Dann ist der h -Vektor (h_1, \dots, h_n) dadurch gegeben, dass

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : h_i := \#\{G \in M \mid \dim(G) = i\};$$

der h -Vektor ist hierbei unabhängig von der gewählten shelling. Anschaulich bedeutet das: Man baut $\mathcal{F}(P)$ dadurch auf, dass man alle Facetten (in der durch die shelling induzierten Reihenfolge) schrittweise hinzufügt. Bei jedem Schritt merkt man sich jeweils die Seite niedrigster Dimension, die durch das Hinzufügen der jeweiligen Facette neu hinzugekommen ist. M ist die Menge all dieser Seiten. Dann ist der Eintrag h_i im h -Vektor die Anzahl der i -dimensionalen Seiten in M .

Diese Bemerkung erklärt nicht nur, dass $(*_4)$ trivialerweise gelten muss, da Σ lediglich eine maximale Seite hat, sondern sie erklärt auch (unabhängig von $(*_4)$), warum $(*_3)$ gelten muss: Nehmen wir an, $\widehat{F} := (F_1, \dots, F_k)$ sei eine shelling von $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$ mit zugehöriger Partitionierung I_1, \dots, I_k . Dann induziert die Tatsache, dass $\Delta_\tau(P)$ eine simpliciale Σ -Aufdickung von $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$ ist einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Facetten und den maximalen Seiten von $\mathcal{F}(\Delta_\tau(P))$ durch

$$\Phi : \forall i \in \{1, \dots, k\} : F_i \mapsto F'_i := \text{conv} \{\mathcal{V}(F_i), \mathcal{V}(\Sigma)\}.$$

Sei I'_1, \dots, I'_k die von \widehat{F}' induzierte Partitionierung von $\mathcal{F}(\Delta_\tau(P))$. Dann gilt aufgrund von Φ offenbar

$$\forall G \in \mathcal{F}(\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))) \subset \mathcal{F}(\Delta_\tau(P)), \forall j \in \{1, \dots, k\} : \\ \dim(G) \text{ ist minimal in } I_j \Leftrightarrow \dim(G) \text{ ist minimal in } I'_j.$$

Das bedeutet: Das Aufdicken aller Facetten von $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$ mit Σ hat, ganz so, wie man es intuitiv vermuten würde, keinen Einfluss auf die jeweiligen kleinsten (hinzukommenden)

Seiten beim Durchlaufen der dadurch induzierten Partitionierung von $\Delta_\tau(P)$ gegenüber der ursprünglichen Partitionierung von $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$. Insofern müssen die beiden h -Vektoren von $\Delta_\tau(P)$ und $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$ übereinstimmen.

5 Algorithmische Zerlegung von Polytopen mit speziellen Simplizes

Die wesentliche Fragestellung, die wir uns in diesem Kapitel stellen wollen, ist die folgende: Angenommen, wir betrachten ein Polytop P mit speziellem Simplex Σ und einer komprimierten Ordnung τ von $\mathcal{V}(P)$. Dann wissen wir nach Theorem 3.2.17, dass ein Polytop R definiert durch $\mathcal{F}(\partial R) := \mathcal{F}(P \setminus \Sigma)$ existiert mit

$$\exists i, j \in \mathbb{N} : P = \text{pyr}_i(\text{shell}_j(\text{bipyr } R))$$

und ferner garantiert das Theorem 4.2.1 die Existenz eines simplizialen Polytopes Q , dessen h -Polynom seines Randes dem h -Polynom der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung $\Delta_\tau(P)$ von P bzgl. einer Ordnung τ seiner Ecken entspricht und über die dort genannten Symmetrie- und Monotonie-Eigenschaften verfügt. Außerdem ist der Randkomplex dieses Polytop Q isomorph zur rückwärtigen lexikographischen Triangulierung $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$ bzgl. der durch τ induzierten Ordnung τ' .

Die Frage ist nun, ob sich diese Polytope R und Q algorithmisch konstruieren lassen (das Wort „dieses“ darf an dieser Stelle nicht falsch verstanden werden: Die Polytope R und Q sind natürlich nur kombinatorisch eindeutig, d. h. wenn wir hier oder auch im weiteren Verlauf von der Berechnung *des* Polytopes R bzw. Q sprechen, meinen wir stets die Berechnung *eines* konkreten, geometrischen Polytopes R bzw. Q , das die kombinatorischen Aussagen aus Theorem 3.2.17 bzw. Theorem 4.2.1 bzgl. eines gegebenen Polytopes P erfüllt). Falls sich diese Frage (prinzipiell) bejahen lässt, stellt sich außerdem die Frage, welche Informationen man über das Polytop P (und das spezielle Simplex Σ und die Ordnung τ) benötigt, um R und Q zu berechnen.

Zur Beantwortung dieser Fragen geben wir in Abschnitt 5.1 den Algorithmus als Pseudocode an; dieser Algorithmus besteht im Wesentlichen aus den zwei Unterfunktionen `Quotientenpolytop` und `ZieheEcken` (erstere berechnet R , zweitere berechnet Q), die wir dort im einzelnen diskutieren werden. In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass nicht nur Σ und τ gegeben sind, sondern P auch in doppelter Beschreibung vorliegt.

In Abschnitt 5.2 berechnen wir einige einfache Beispiele mit unserem Algorithmus: Zwei Birkhoff-Polytope (P_2 und P_3) und eins der Ordnungspolytope ($\mathcal{O}_{(1,2)}$), die wir im Zuge der Beispiele 2.5.12 und 3.1.5 bereits kennengelernt haben.

In Abschnitt 5.3 werden wir einerseits eine Optimierung des ursprünglichen Algorithmus vorstellen, indem wir nachweisen, dass einige der in der Unterfunktion `ZieheEcken` durchgeführten Berechnungen abgeschätzt werden können und zum anderen werden wir kurz diskutieren, warum man, wenn man lediglich mit einer \mathcal{V} - oder \mathcal{H} -Darstellung von P startet, zwar R berechnen kann, danach aber dessen doppelte Beschreibung benötigt, um Q auszurechnen.

5.1 Der Algorithmus

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels angekündigt, werden wir nun einen Algorithmus vorstellen, der, ausgehend von einem Polytop P in doppelter Beschreibung mit speziellem Simplex Σ und komprimierter Ordnung τ seiner Ecken, die Polytope $R := P/\Sigma$ (zur Erinnerung: dass es sich hierbei tatsächlich um ein Polytop handelt, folgt aus Satz 3.2.2) und Q (wobei Q ein simpliziales Polytop mit zu $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(\partial R))$ isomorphem Randkomplex ist; τ' ist hier wieder die durch τ induzierte Ordnung) in doppelter Beschreibung berechnet. Dabei wollen bzw. müssen wir so vorgehen, dass alle Resultate aus Athanasiadis' Theorem 4.2.1 erfüllt bleiben, was allerdings, wie wir gleich sehen werden, bei korrekter Berechnung der beiden Polytope ohnehin immer der Fall sein wird. Unser Ziel wird es sein also, das folgende Theorem zu beweisen:

Theorem 5.1.1:

Sei P ein m -dimensionales, komprimiertes, ganzzahliges Polytop mit $\mathcal{V}(P) := \{v_1, \dots, v_p\}$, einem speziellem Simplex Σ (wobei $\mathcal{V}(\Sigma) = \{v_1, \dots, v_n\}$) und einer Ordnung $\tau := (v_p, \dots, v_1)$ seiner Ecken. Dann kann aus einer doppelten Beschreibung (d. h. \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung) von P geome-

trisch und in doppelter Beschreibung ein Polytop R mit $\mathcal{F}(\partial R) = \mathcal{F}(P \setminus \Sigma)$ und ein simpliziales Polytop Q berechnet werden mit $\dim(Q) = d := m - n + 1$, $h_Q := (h_0, \dots, h_d)$, so dass

(a)

$$\sum_{r \geq 0} i(P, r) t^r = \frac{\sum_{j=0}^d h_j t^j}{(1-t)^{m+1}}$$

(b)

$$1 = h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor d/2 \rfloor} \wedge \forall i \in \{0, \dots, d\} : h_i = h_{d-i}$$

(c) Für $\tau' := (v_p, \dots, v_{n+1})$ gilt:

$$\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(P) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}) \text{ ist isomorph zu } \mathcal{F}(\partial Q).$$

Insbesondere ist es hierfür nicht notwendig, den Seitenverband $\mathcal{F}(P)$ zu kennen. Dies ist algorithmisch deshalb von wichtig, da für ein n -dimensionales Polytop die Hinzunahme einer weiteren Facette die Anzahl der Seiten von P um bis zu 2^n steigert (vergl. [The08, S. 38, Satz 3.44]).

Um den Beweis des Theorems zu erbringen reicht es offensichtlich einen entsprechenden Algorithmus anzugeben (wir werden hierbei der Übersicht halber nur Q als Ausgabe erhalten; R stellt im folgenden Algorithmus die Ausgabe der Funktion `Quotientenpolytop` und somit ein Zwischenresultat dar; wir gehen in Abschnitt 5.1.1 noch einmal darauf ein):

Eingabe: Polytop P mit $\dim(P) = m$, $\mathcal{V}(P) = \{v_1, \dots, v_p\}$, $\mathcal{H}(P) = \{H_1, \dots, H_q\}$, komprimierter, totaler Ordnung $\tau = (v_p, \dots, v_1)$ auf $\mathcal{V}(P)$, so dass $\Sigma := \text{conv}\{v_1, \dots, v_n\}$ spezielles Simplex von P ist.

Ausgabe: \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung eines simplizialen Polytopes Q , das die Eigenschaften aus 5.1.1 erfüllt.

- 1 $\mathcal{V}(R), \mathcal{H}(R), \mathcal{V}(Q), \mathcal{H}(Q) \leftarrow \emptyset$;
- 2 $(\mathcal{V}(R), \mathcal{H}(R)) \leftarrow \text{Quotientenpolytop}(\mathcal{V}(P), \mathcal{H}(P), \Sigma)$;
- 3 $(\mathcal{V}(Q), \mathcal{H}(Q)) \leftarrow \text{ZieheEcken}(\mathcal{V}(R), \mathcal{H}(R))$;
- 4 **return** $\mathcal{V}(Q), \mathcal{H}(Q)$;

Beschreibung

Gemäß Athanasiadis' Theorem 4.2.1 ist der Randkomplex unseres gesuchten Polytopes Q isomorph zur rückwärtigen lexikographischen Triangulierung des Teilkomplexes $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ bzgl. der vorgegebenen Ordnung τ (Bedingung (c)). Insbesondere ist durch diese Bedingung der Seitenverband von Q bereits festgelegt, da $\mathcal{F}(P)$, Σ und τ zur Eingabe gehören. Da die Bedingungen (a) und (b) ebenfalls allein vom Seitenverband $\mathcal{F}(Q)$ von Q abhängen, sind sie für den Algorithmus redundant. Die Berechnung von Q erfolgt in 2 Schritten:

- (1) Da gemäß Theorem 4.2.1 unser gesuchtes, simpliziales Polytop Q so gewählt werden kann, dass es isomorph ist zur rückwärtigen lexikographischen Triangulierung $\Delta_{\tau'}(\mathcal{F}(P) \setminus \Sigma)$ des Teilkomplexes $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ von P bzgl. der durch τ induzierten Ordnung τ' ist und $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ gemäß Satz 3.2.2 (vergl. hierzu auch Lemma 2.6.6) gerade der Randkomplex des Quotientenpolytopes $P \setminus V$ (wobei V der Unterraum parallel zum affinen Spann von Σ ist) von P ist, berechnen wir zunächst mit Hilfe der Funktion `Quotientenpolytop` das Quotientenpolytop R in doppelter Beschreibung mit

$$\mathcal{F}(\partial R) := \mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma),$$

aus $\mathcal{F}(P)$ und Σ .

- (2) Mit Hilfe der Funktion **ZieheEcken** berechnen wir ausgehend von R die Eckenmenge $\mathcal{V}(Q)$, indem wir die Ecken aus $\mathcal{V}(R)$ sukzessive so in die negativen Halbräume der Facetten von R verschieben, dass genau die im Falle einer rückwärtigen lexikographischen Triangulierung von $\mathcal{F}(\partial R)$ bzgl. τ' eingefügten Kanten (und damit auch: höherdimensionalen Seiten) zusätzlich im Seitenverband der konvexen Hülle des bestehenden Komplexes mit der verschobenen Ecke liegen. Da wir die Menge $\mathcal{H}(\mathcal{F}(\partial R))$ nach jeder Verschiebung aktualisieren, verfügen wir nach Betrachtung aller Ecken über die \mathcal{V} - und die \mathcal{H} -Darstellung des gesuchten Polytopes Q . Hierbei ist natürlich wieder zu beachten, dass es dabei nur um ein mögliches Polytop handelt, das die entsprechenden, im obigen Algorithmus formulierten Voraussetzungen erfüllt (genauer: Welches Polytop wir am Ende genau erhalten, hängt von der Art und Weise der Verschiebung der Ecken ab (vergl. Abschnitt 5.1.2). Da aber alle Resultate bzgl. dieses Polytopes Q sich nur auf dessen Seitenverband beziehen, ergibt es nur dann Sinn, von *dem* Polytop Q zu sprechen, wenn wir uns auf dessen kombinatorische Struktur beziehen).

Wir betrachten nun die in obigem Algorithmus verwendeten Funktionen **Quotientenpolytop** und **ZieheEcken**.

5.1.1 Die Funktion Quotientenpolytop

Function: Quotientenpolytop
Eingabe: Doppelte Beschreibung $\mathcal{V}(P) := \{v_0, \dots, v_p\}$, $\mathcal{H}(P) := \{H_1, \dots, H_q\}$ eines Polytopes P mit eines speziellen Simplex Σ (mit $\mathcal{V}(\Sigma) := \{v_0, \dots, v_m\}$).
Ausgabe: Doppelte Beschreibung $\mathcal{V}(R)$, $\mathcal{H}(R)$ des Quotientenpolytopes R von P mit

$$\mathcal{F}(\partial R) = \mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma).$$

```

1  $\mathcal{V}(R) \leftarrow \{v_{m+1}, \dots, v_p\}$ ;
2  $A \leftarrow$  affiner Grundraum von  $\mathcal{V}(R)$ ;
3 for ( $i$ , 1 to  $q$ , 1) do
4   forall  $i : H_i \cap A \neq A$  do
5      $H'_i \leftarrow H_i \cap A$ ;
6  $\mathcal{H}(R) \leftarrow \{H'_1, \dots, H'_q\}$ ;
7 return ( $\mathcal{V}(R)$ ,  $\mathcal{H}(R)$ );

```

Beschreibung

Die Eingabe in die Funktion **Quotientenpolytop** entspricht der des Algorithmus selbst. Die Ausgabe ist das gesuchte Quotientenpolytop $R := P/V$, dessen Rand gerade der Teilkomplex aller Seiten von P ist, die keine Ecken aus Σ enthalten. Wie oben bereits erwähnt, wissen wir aus Satz 3.2.2 bzw. Lemma 2.6.6, dass $\mathcal{F}(P) \setminus \mathcal{V}(\Sigma)$ tatsächlich Rand eines Polytopes ist und dass es sich hierbei um das Quotientenpolytop P/V handelt, wobei V der Unterraum parallel zum affinen Spann von Σ ist.

Die gesuchte \mathcal{V} -Darstellung von R ist gemäß der gewünschten Ausgabe trivial: Wir entfernen aus der Eckenmenge von P sämtliche Ecken aus Σ (Zeile 1). Um die \mathcal{H} -Darstellung von R zu berechnen, schneiden wir sämtliche Stützhyperebenen von P mit dem zuvor berechneten affinen Grundraum A von $\mathcal{V}(R)$ und definieren alle von A verschiedenen Schnitte (falls P eine Pyramide ist, liegt R in der Grundseite und damit auch in der entsprechenden Stützhyperebene) als \mathcal{H} -Darstellung von R (mehrfach vorkommende Stützhyperebenen werden entfernt) (Zeilen 2 bis 6). Dass es sich hierbei tatsächlich um die richtige \mathcal{H} -Darstellung handelt, ist leicht zu sehen:

Wir wissen $\mathcal{F}(\partial R)$ liegt in $\mathcal{F}(P)$. Dementsprechend gilt

$$\forall G \in \mathcal{F}(\partial R) \exists H_i \in \mathcal{H}(P) : G \in H_i.$$

Da $\forall G \in \mathcal{F}(\partial R) : G \in A$ nach Konstruktion gilt, folgt

$$\forall G \in \mathcal{F}(\partial R) \exists H'_i : G \in H'_i,$$

wobei H'_i im Sinne von Zeile 5 definiert ist. Da ferner gilt, dass der Schnitt aller H_i , die dieselbe maximale Seite von R stützen, nach dem Schneiden mit A übereinstimmen, und jede Stützhyperebene aus $\mathcal{H}(P)$, die nicht ganz A enthält, aus Dimensionsgründen immer eine maximale Seite von R stützt, folgt, dass die H'_i tatsächlich eine \mathcal{H} -Darstellung von R sind. In Zeile 7 geben wir die berechnete \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung von R als Ausgabe zurück.

5.1.2 Die Funktion ZieheEcken

Function: ZieheEcken

Eingabe: Doppelte Beschreibung $\mathcal{V}(R) := \{v_1, \dots, v_s\}, \mathcal{H}(R) := \{H_1, \dots, H_t\}$ des Quotientenpolytopes R .

Ausgabe: \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung des gesuchten Polytopes Q .

```

1 for (i, 1 to t, 1) do
2   w_i ← ι w ∈ ℝ^m : w ⊥ H_i ∧ |w| = 1 ∧ ∃ λ < 0 : λ w ∈ H_i;
3   ε_i ← min{d(v, H_i) | v ∈ V(R) ∧ v ∉ H_i};
4 W ← {w_1, ..., w_t};
5 ε ← ½ min{ε_1, ..., ε_t};
6 for (j, 1 to s, 1) do
7   H(v_j) ← {H ∈ H(R) | v_j ∈ H};
8   k ← #H(v_j);
9   B(v_j) ← {w_i ∈ W | H_i ∈ H(v_j)};
10  v'_j ← v_j + ∑_{r=1}^k ε/k · (-w_r) mit w_r ∈ B(v_j);
11  forall H_i ∈ H(v_j) do
12    G_i ← von H_i gestützte Facette aus F(R);
13    H(H_i) ← {F_1, ..., F_l | F_r ∈ conv(V(G_i) \ {v_j}), dim(F_r) = dim(G_i) - 1};
14    for (r, 1 to l, 1) do
15      H_{j_r} ← Stützhyperebene der Facette conv(V(F_r) ∪ {v'_j});
16      w_{j_r} ← ι w ∈ ℝ^m : w ⊥ H_{j_r} ∧ |w| = 1 ∧ ∃ λ < 0 : λ w ∈ H_{j_r};
17      H(R) ← {H_1, ..., H_t} \ {H_i} ∪ {H_{j_1}, ..., H_{j_l}};
18      W ← {w_1, ..., w_t} \ {w_i} ∪ {w_{j_1}, ..., w_{j_l}};
19  V(R) ← V(R) \ {v_j} ∪ {v'_j};
20  t ← #H(R);
21  for (i, 1 to t, 1) do
22    ε_i ← min{d(v, H_i) | v ∈ V(R) ∧ v ∉ H_i};
23  ε ← ½ min{|ε_1|, ..., |ε_t|};
24 return (V(R), H(R));
    
```

Beschreibung

Die Funktion `ZieheEcken` übernimmt die (in der Funktion `Quotientenpolytop` berechnete) Eckenmenge $\mathcal{V}(R) := \{v_1, \dots, v_s\}$ (wobei wir hier davon ausgehen, dass die Indizierung gemäß der durch τ induzierten Ordnung τ' erfolgt) und die Menge $\mathcal{H}(R) := \{H_1, \dots, H_t\}$ der Stützhyperebenen (der Facetten) von R . Die Ausgabe der Funktion besteht in der \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung des gesuchten Polytopes Q (also eines Polytopes, das die im Hauptalgorithmus formulierten Bedingungen (a) bis (c) erfüllt).

In der Zeilen 1 bis 3 berechnen wir zunächst zu jeder Stützhyperebene H_i einer Facette den zu ihr

orthonormalen Vektor w_i (so orientiert, dass $\mathcal{F}(\partial R) \in H_i^+$) sowie den kürzesten Abstand ε_i , den eine selbst nicht in der von H_i gestützten Facette liegende Ecke v aus $\mathcal{V}(R)$ hat (man beachte, dass die Strecke zwischen v und H_i , die diesen Abstand ε_i realisiert, im Allgemeinen nicht in $\mathcal{F}(R)$ liegt). Die Menge aller w_i bezeichnen wir mit W (Zeile 4), die Hälfte des Minimums aller ε_i bezeichnen wir als ε (Zeile 5).

Unser Ziel ist es nun, jede einzelne Ecke v_j aus $\mathcal{V}(R)$ sukzessive so in die negativen Halbräume der Stützhyper Ebenen, in denen sie liegt, zu verschieben, dass bei späterer Bildung der konvexen Hülle mit der verschobenen Ecke v'_j (und $\mathcal{V}(R) \setminus \{v_j\}$) einerseits genau die noch fehlenden Seiten aus $\Delta_{\tau'}(\partial R)$ „neu“ zu $\mathcal{F}(R)$ hinzukommen, andererseits aber alle Elemente aus $\mathcal{F}(R)$ mit Ausnahme von v_j selbst und derjenigen Seiten, in denen v_j liegt, erhalten bleiben. Dass dies dadurch möglich ist, dass wir die Ecken gemäß der durch τ induzierten Ordnung sukzessive in alle ihre negativen Halbräume verschieben, wissen wir aus Abschnitt 2.3.2 gemäß Korollar 2.3.7. Um eine bessere Anschauung dafür zu vermitteln, was passiert, wenn eine Ecke verschoben wird, geben wir zunächst einige Erläuterungen:

- (a) Zieht man eine Ecke v_j in die negativen Halbräume ihrer Stützhyper Ebenen und behält die Lage bzgl. der übrigen Stützhyper Ebenen H bei (belässt also v_j im positiven Halbraum der jeweiligen H), so gilt für jede Stützhyper Ebene H_i einer Facette F_i , die nicht Simplex ist und in der v_j liegt:

Die verschobene Ecke v'_j wird im daraus resultierenden $\mathcal{F}(R)$ adjazent zu allen Ecken aus F_i sein. Dementsprechend kommen gerade genau für alle $G \subset F_i$ mit $v_i \notin G$ die Seiten $\text{conv}\{v'_j, \mathcal{V}(G)\}$ zu $\mathcal{F}(R)$ hinzu (dies entspricht, wie wir in Abschnitt 2.3.2 gesehen haben, genau der pulling triangulation bzw. der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung). Die Facette F_i verschwindet aus $\mathcal{F}(R)$; alle Facetten, die v_j nicht enthielten, bleiben erhalten.

- (b) Verschiebt man eine Ecke v_j in die positiven Halbräume ihrer Stützhyper Ebenen und behält die Lage bzgl. der übrigen, v_j nicht enthaltenden Stützhyper Ebenen H bei (i. S. von (a)), so gilt für jede Stützhyper Ebene H_i einer Facette F_i , die nicht Simplex ist und in der v_j liegt: In F_i wird eine neue Facette G (also eine ridge ($\dim(R) - 2$ -Seite) von R) zwischen zu v_j adjazenten Ecken aus F_i eingefügt. Die Hyper Ebene H_i bleibt als Stützhyper Ebene in $\mathcal{F}(Q')$ (aufgrund der Überbestimmung durch die Facette F_i) erhalten. Gleichzeitig entsteht eine neue Facette von R aus der konvexen Hülle von G und der verschobenen Ecke v'_j in $\mathcal{F}(R)$ (hierbei wird davon ausgegangen, dass die Verschiebung nur so weit erfolgt, dass v'_j immer noch Ecke von R ist).

- (c) Verschiebt man eine Ecke v_j in die positiven oder negativen Halbräume ihrer Stützhyper Ebenen (i. S. von (a) bzw. (b)) und betrachtet die Stützhyper Ebene H_i einer Facette F_i , die ein Simplex ist und in der v_j liegt, so wird durch die Ersetzung von v_j durch v'_j die Stützhyper Ebene H_i durch

$$H'_i := \text{Stützhyper Ebene von } \text{conv}\{\mathcal{V}(F_i) \setminus \{v_j\} \cup \{v'_j\}\},$$

ersetzt. Diese Ersetzung verändert allerdings, im Gegensatz zu den beiden vorherigen Fällen, den f -Vektor (sprich: die kombinatorische Struktur) von R nicht.

- (d) Wird v_j in eine Stützhyper Ebene H verschoben (die v_j nicht enthält), so verändert sich – unabhängig davon, ob die v_j enthaltenden Facetten Simplizes sind oder nicht – aufgrund der Bildung der konvexen Hülle der in H liegenden Ecken oder, falls v_j in die von H gestützte Facette F verschoben wird und somit als Ecke komplett verschwindet, aufgrund der Bildung der konvexen Hülle der übrigen, von F verschiedenen, Facetten, die v_j enthalten, die kombinatorische Struktur von R .

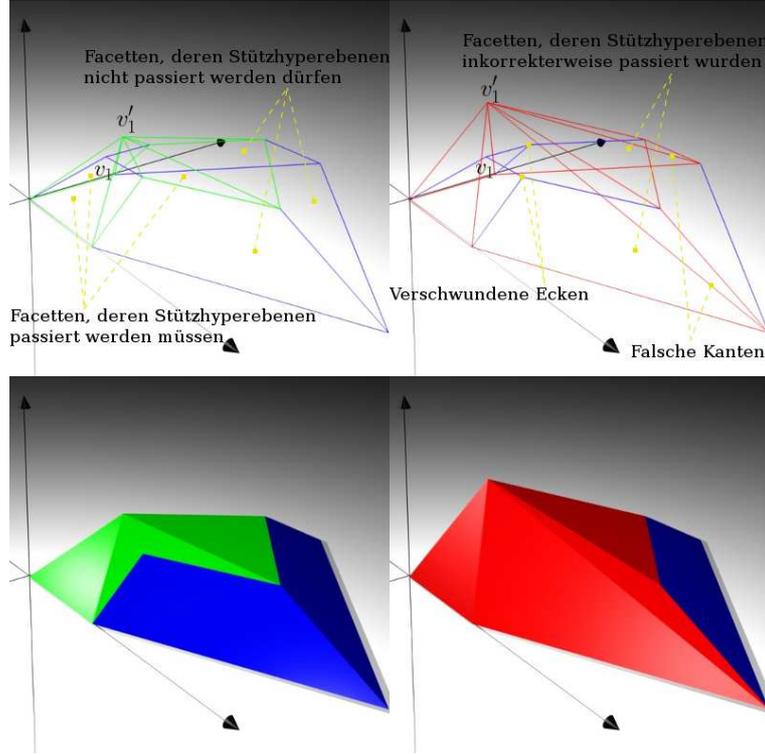


Abbildung 11: Die Ecke v_1 wird nach v'_1 gezogen – auf der linken Seite wird v_1 dabei genau in die negativen Halbräume ihrer Stützhyper Ebenen gezogen, auf der rechten Seite wird v_1 zu weit gezogen und passiert zwei Stützhyper Ebenen von v_1 nicht enthaltenden Facetten.

Die For-Schleife in den Zeilen 6 bis 23 beschreibt die sukzessive Verschiebung der Ecken von R in die negativen Halbräume ihrer jeweiligen Stützhyper Ebenen. Wir betrachten einen Durchlauf der Schleife für eine Ecke v_j :

Wir bezeichnen zunächst mit $\mathcal{H}(v_j)$ die Menge aller Stützhyper Ebenen, in denen v_j liegt; die Anzahl dieser Stützhyper Ebenen sei k . Unter der Menge $\mathcal{B}(v_j)$ fassen wir die definierenden orthonormalen Vektoren der Stützhyper Ebenen aus $\mathcal{H}(v_j)$ zusammen (Zeilen 7 bis 10).

Entscheidend ist die folgende Zeile 11, in der die Ecke v'_j berechnet wird, die durch Ziehen aus v_j entsteht: Ausgehend von Abschnitt 2.3.2 und den obigen Erläuterungen (a) bis (d) wissen wir, dass wir v_j in die negativen Halbräume aller H_i aus $\mathcal{H}(v_j)$ verschieben müssen, um genau die Seiten einzufügen, die auch im Falle der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung von $\mathcal{F}(\partial R)$ (bzgl. derselben Reihenfolge beim Durchlaufen der Ecken) eingefügt würden. Wegen (d) muss dabei jedoch sichergestellt sein, dass v_j während der Verschiebung keine der v_j nicht enthaltenden Stützhyper Ebenen berührt, geschweige denn passiert, damit die kombinatorische Struktur des Teils von $\mathcal{F}(R)$, der v_j nicht enthält, nicht verändert wird – hierin liegt die wesentliche Herausforderung. Diese Voraussetzungen können wir realisieren durch

$$v'_j := v_j + \sum_{r=1}^k \varepsilon/k \cdot (-w_r) \text{ mit } w_r \in \mathcal{B}(v_j),$$

denn nach Konstruktion in den Zeilen 1 bis 3 beträgt die Länge des Abstandes von v_j zu jeder Hyper Ebene H_i mindestens ε_i (d. h. $v_j + \varepsilon_i \cdot (-w_i) \in H_i^+$) und es gilt für jedes dieser w_i die Abschätzung (hierbei bezeichnet π_{-w_i} die Projektion eines Vektors auf den von $-w_i$ aufgespannten

Unterraum):

$$\begin{aligned} \pi_{-w_i} \left(\sum_{r=1}^k \varepsilon/k \cdot (-w_r) \right) &= \sum_{r=1}^k \varepsilon/k \cdot \pi_{-w_i}(-w_r) < \sum_{r=1}^k \varepsilon_i/k \cdot \pi_{-w_i}(-w_r) = \\ &= \varepsilon_i \cdot \sum_{r=1}^k \pi_{-w_i}(-w_r) \leq \varepsilon_i \cdot (-w_i). \end{aligned}$$

Somit wechselt die Ecke v_j lediglich den Halbraum der Stützhyperebenen aus $\mathcal{H}(v_j)$. Dass v'_j tatsächlich im negativen Halbraum aller Stützhyperebenen aus $\mathcal{H}(v_j)$ liegt, folgt sofort aus der Tatsache, dass die Winkel aller Paare $w_i, w_j \in \{w_1, \dots, w_r\}$ nach Konstruktion < 180 Grad sein müssen und somit eine Verschiebungen nicht durch eine andere aufgehoben werden kann.

Nun müssen die Mengen $\mathcal{V}(R)$ und $\mathcal{H}(R)$ sowie, als Folge daraus, die Menge W und die Zahl ε bezüglich der aus der Verschiebung von v_j nach v'_j resultierenden Änderungen aktualisiert werden, denn die Berechnung der Verschiebung von v_{j+1} (unter Berücksichtigung von (a) bis (d)) kann selbstverständlich nur auf Grundlage der aktuellen und nicht aufgrund der ursprünglichen \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung des Komplexes erfolgen. Diese Aktualisierung vollziehen wir in zwei Schritten:

- (1) In der For-Schleife in den Zeilen 11 bis 18 betrachten wir nacheinander aller $H_i \in \mathcal{H}(v_i)$, d. h. die Stützhyperebenen, die v_j enthalten. Wir möchten nun den unter (a) beschriebenen Vorgang algorithmisch umsetzen. Wir betrachten den Durchlauf der Schleife für eine Stützhyperebene $H_i \in \mathcal{H}(v_i)$:

Wir bezeichnen mit G_i die von H_i gestützte Facette aus $\mathcal{F}(R)$ (Zeile 12) und definieren $\mathcal{H}(H_i)$ als die Menge aller Seiten von $\text{conv}(\mathcal{V}(G_i) \setminus \{v_i\})$ mit Dimension $\dim(G_i) - 1$ (die Elemente aus $\mathcal{H}(H_i)$ sind also ridges von R) (Zeile 13). Wie bereits mehrfach an verschiedenen Stellen erwähnt (vergl. insbes. (a) sowie 2.3.2) bestehen die durch das Ziehen von v_j nach v'_j neu hinzukommenden Facetten gerade aus der konvexen Hülle von v'_j und den Facetten von $\text{conv}(\mathcal{V}(G_i) \setminus \{v_j\})$ (bzw. $\text{conv}(\mathcal{V}(G_i) \setminus \{v_j\})$ selbst, falls G_i ein Simplex ist), also den Elementen aus $\mathcal{H}(H_i)$, bestehen. Wir durchlaufen demnach in den Zeilen 14 bis 16 alle Elemente F_r aus $\mathcal{H}(H_i)$, bilden jeweils die konvexe Hülle zusammen mit v'_j und berechnen die jeweilige zugehörige Stützhyperebene H_{j_r} sowie den zu dieser Stützhyperebene gehörigen orthonormalen Vektor w_{j_r} (entsprechend den übrigen w_i orientiert). In der Zeile 17 aktualisieren wir die \mathcal{H} -Darstellung von R , indem wir die alte Stützhyperebene H_i streichen und die neu berechneten Stützhyperebenen H_{j_1}, \dots, H_{j_r} einfügen. Analog gehen wir in Zeile 18 bzgl. der Aktualisierung der Menge W der orthonormalen Vektoren der Stützhyperebenen vor.

- (2) In den Zeilen 19 bis 23 findet die Aktualisierung der Eckenmenge $\mathcal{V}(R)$, der die Mächtigkeit der Menge $\mathcal{H}(R)$ beschreibenden Zahl t , sowie die Aktualisierung bzw. neue Berechnung der Abstände ε_i und ε statt.

In der letzten Zeile erfolgt, nach Durchlaufen aller Ecken, die Ausgabe der veränderten Mengen $\mathcal{V}(R)$ und $\mathcal{H}(R)$ als \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Beschreibung des gesuchten Polytopes Q .

5.2 Beispiele

Wir berechnen mit Hilfe des in 5.1 definierten Algorithmus die Q -Polytope Q_{P_2}, Q_{P_3} und $Q_{\mathcal{O}_{(1,2)}}$ zu den Birkhoff-Polytopen P_2, P_3 und dem Ordnungspolytop $\mathcal{O}_{(1,2)}$.

5.2.1 Berechnung von Q_{P_2}

P_2 ist ein triviales Beispiel: P_2 ist gegeben durch die konvexe Hülle aus den Ecken (wir schreiben die Ecken hier als Matrizen. Die zugehörigen Vektoren ergeben sich durch Untereinanderschreiben der Spalten. Bezüglich der Ordnung τ der Ecken muss folgendes angemerkt werden: Die ersten n Ecken v_1, \dots, v_n bzgl. τ müssen die Ecken des speziellen Simplexes sein. Deren Anordnung

untereinander sowie die Anordnung der übrigen Ecken v_{n+1}, \dots, v_p ist jedoch gleichgültig, da an τ ansonsten lediglich die Forderung gestellt wird, dass die Ordnung komprimiert ist und dies ist für jede Anordnung der Ecken erfüllt, da Birkhoff-Polytope (d. h. jede Anordnung ihrer Ecken) komprimiert sind (vergl. Satz und Definition 2.4.3)).

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und besteht somit aus einer einzigen Kante im \mathbb{R}^4 in dem affinen Raum

$$A_{P_2} := v_1 + \lambda(v_2 - v_1),$$

und seine Facetten sind gerade die Ecken selbst (man beachte, dass P_2 (gemäß der vollständigen Beschreibung der Birkhoff-Polytope in Satz und Definition 2.4.3) 4 Facetten hat: jeweils gegeben durch die Matrizen mit 0-Einträgen in x_{ij} . Von diesen stimmen her jedoch jeweils zwei überein.). Somit erhalten wir folgende Stützhyperebenen:

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{x \in A_{P_2} \mid \forall i, j \in \{1, 2\} : i = j \Rightarrow x_{ij} \geq 0\} \\ H_2 &:= \{x \in A_{P_2} \mid \forall i, j \in \{1, 2\} : i \neq j \Rightarrow x_{ij} \geq 0\}. \end{aligned}$$

Aus Beispiel 3.1.4 wissen wir, dass das spezielle Simplex in P_2 gegeben ist durch die von der Permutation (12) erzeugte Untergruppe. Dies ist jedoch S_2 selbst und somit ist das spezielle Simplex Σ in diesem Fall P_2 selbst. Dementsprechend leichtes Spiel haben wir bei der Ausführung unseres Algorithmus: `Quotientenpolytop`($\mathcal{V}(P_2), \mathcal{H}(P_2), \Sigma, \tau$) liefert, da $\mathcal{F}(P) \setminus \{v_1, v_2\} = \emptyset$ sofort, dass

$$\mathcal{V}(R), \mathcal{H}(R) = \emptyset,$$

und somit

$$\mathcal{V}(Q), \mathcal{H}(Q) = \emptyset.$$

D. h. wir befinden uns an dieser Stelle direkt in einem Sonderfall, da es sich bei Q um ein Polytop handelt, für das gilt: $\mathcal{F}(\partial Q) = \emptyset$: Somit muss Q aus einer beliebigen Ecke bestehen, die, weil sie an dieser Stelle das Innere des Polytopes Q beschreibt, welches bei der Betrachtung von $\mathcal{F}(\partial Q)$ verschwindet, nicht in $\mathcal{V}(P_2)$ auftaucht. Insofern kann Q als ein beliebiger Punkt im Inneren von P_2 gewählt werden, denn die leere Seite liegt trivialerweise im Rand von P (die Ecke muss per Konvention im Inneren liegen, da wir sonst P_2 nicht als dessen Bipyramide auffassen können). Damit stimmt auch die von Athanasiadis in Theorem 4.2.1 angegebene Dimensionsformel, denn:

$$d = \dim(P_2) - \#\mathcal{V}(\Sigma) + 1 = \dim(P_2) - (\dim(\Sigma) + 1) + 1 = 1 - (1 + 1) + 1 = 0.$$

5.2.2 Berechnung von Q_{P_3}

P_3 ist gegeben durch die konvexe Hülle aus den folgenden Ecken:

$$\begin{aligned} v_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ v_4 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_5 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nachrechnen ergibt folgenden affinen Grundraum

$$A_{P_3} := v_1 + \lambda_2(v_2 - v_1) + \lambda_3(v_3 - v_1) + \lambda_4(v_4 - v_1) + \lambda_5(v_5 - v_1).$$

Nach 2.4.3 besitzt P_3 9 Facetten (auch hier gegeben durch alle doppelt stochastischen Matrizen mit Einträgen $x_{ij} = 0$). Daraus erhalten wir folgende Stützhyperebenen:

$$\forall k \in \{1, \dots, 9\} : H_k^+ := \{x \in A_{P_3} \mid \forall i, j \in \{1, 2, 3\} : \lfloor (k-1)/3 \rfloor = i-1 \wedge (k-1) = j-1 \pmod{3} \Rightarrow x_{ij} \geq 0\}$$

Hierbei gilt nach Beispiel 3.1.4 und den Voraussetzungen von Theorem 4.2.1, dass

$$\mathcal{V}(\Sigma) = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Demnach liefert $\text{Quotientenpolytop}(\mathcal{V}(P_3), \mathcal{H}(P_3))$

$$\mathcal{V}(R) = \{v_4, v_5, v_6\},$$

woraus folgt, dass der affine Grundraum von R

$$A_R := v_4 + \lambda(v_5 - v_4) + \mu(v_6 - v_4)$$

ist und der Schnitt der H_k mit A_R ergibt

$$\forall k \in \{1, \dots, 9\} : H_k^+ := \{x \in A_R \mid \forall i, j \in \{1, 2, 3\} : \lfloor (k-1)/3 \rfloor = i-1 \wedge (k-1) = j-1 \pmod{3} \Rightarrow x_{ij} \geq 0\};$$

wobei gilt: $H_1 = H_6 = H_8$, $H_2 = H_4 = H_9$ und $H_3 = H_5 = H_7$. Somit folgt

$$\mathcal{H}(R) = \{H_1, H_2, H_3\}.$$

Wir wenden $\text{ZieheEcken}(\mathcal{V}(R), \mathcal{H}(R))$ an. Natürlich könnte man – pragmatisch betrachtet – an dieser Stelle aufhören, da die Eingabe hier bereits aus einem 2–Simplex besteht. Wir werden jedoch, auch wenn hier lediglich Ecken verschoben und Stützhyperebenen verändert (nicht jedoch eine durch mehrere ersetzt) werden, das Ziehen einer Ecke exemplarisch berechnen, um den Ablauf des Algorithmus zu veranschaulichen. Auf die Berechnung von mehr als einer Ecke verzichten wir zum einen, weil der Ablauf sich danach wiederholt, zum anderen (und insbesondere) aus Platzgründen. Wir beginnen mit der Berechnung der definierenden Vektoren der Stützhyperebenen (wir gehen stets von der euklidischen Metrik aus) und der ε_i . Wegen (vergl. Zeile 2 ZieheEcken)

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : w_i \in A_R \wedge |w_i| = 1 \wedge w_i \perp H_i \wedge w_i \in H_i^+$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(v_4 - 0,5(v_5 + v_6)) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ w_2 &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(v_5 - 0,5(v_4 + v_6)) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ w_3 &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(v_6 - 0,5(v_4 + v_5)) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wegen

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : \varepsilon_i := \min\{d(v, H_i) \mid v \notin H_i\} \Rightarrow v_{i+3} - \varepsilon_i w_i \in H_i$$

erhalten wir

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Wir ziehen nun v_4 nach v'_4 . Es gilt

$$\mathcal{H}(v_4) = \{H_2, H_3\}, \quad k = 2, \quad \mathcal{B}(v_j) = \{w_2, w_3\}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} v'_4 &= v_4 + \frac{\varepsilon}{2}(w_2 + w_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir müssen nun die Stützhyperebenen aus $\mathcal{H}(v_4)$ aktualisieren. Für H_2 erhalten wir:

$$G_2 = \text{conv} \{v_4, v_6\}, \quad \mathcal{H}(H_2) = \{v_6\}$$

somit gibt es genau eine neue Stützhyperebene (da G_2 selbstverständlich bereits Simplex war) und zwar H_{2_1} , die $\text{conv} \{v'_4, v_6\}$ stützen muss. Wir berechnen

$$v_6 - v'_4 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & -6 \\ 7 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir wissen bereits, dass es zur Berechnung der Stützhyperebenen ausreicht, die erste Zeile zu betrachten. Aus der Definition von A_R folgt

$$x \in A_R \Leftrightarrow (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)^T \Rightarrow x_{11} = 1 - x_{12} - x_{13}.$$

Da H_{2_1} definiert wird durch die Gerade $g: v'_4 - \rho(v_6 - v'_4)$ folgt

$$x \in g \Leftrightarrow (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T = (6 - 6\rho, 1 - \rho, 1 + 7\rho)^T \Rightarrow x_{13} = -7x_2 + 6$$

Zusammengenommen und da v_5 im positiven Halbraum liegen muss, erhalten wir

$$H_{2_1}^+ = \{x \in A_R \mid x_{11} - 6x_{12} \leq 5\}.$$

Den definierenden w_{2_1} Vektor zu H_{2_1} erhalten wir durch $w_{2_1} \in A_R$, $|w_{2_1}| = 1$ und

$$\langle w_{2_1}, v_6 - v'_4 \rangle = 0$$

Wegen $w_{2_1} \in A_R$ gilt:

$$w_{2_1} = \rho \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Zusammengenommen folgt

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 - \mu & 1 & \mu \\ 1 & \mu & -1 - \mu \\ \mu & -1 - \mu & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & -6 \\ 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow 6(1 + \mu) - 1 - 7\mu = 0 \Rightarrow \mu = 5$$

und somit

$$w_{2_1} = \rho \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus $|w_{2_1}| = 1$ folgt schließlich

$$\sqrt{\rho^2 \cdot 3 \cdot (36 + 1 + 25)} = 1 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{186}}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} H_{3_1} &= \{x \in A_R \mid x_{11} - 6x_{13} \leq 5\}, \\ w_{3_1} &= \frac{1}{\sqrt{186}} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.2.3 Berechnung von $Q_{\mathcal{O}(1,2)}$

Die konvexe Hülle von $\mathcal{O}(1,2)$ ist gegeben durch die Ecken:

$$v_1 := (0, 0, 0)^T, \quad v_2 := (0, 1, 1)^T, \quad v_3 := (1, 1, 1)^T, \quad v_4 := (0, 1, 0)^T, \quad v_5 := (0, 0, 1)^T,$$

wobei die Ecken v_1 bis v_3 die Ecken des speziellen Simplexes Σ sind (man beachte für die Anwendung des Algorithmus auf $\mathcal{O}(1,2)$ und auch für die Eingabedaten die Beispiele 2.5.12 (c) und 3.1.5 (iii), in denen wir bereits mit diesem Polytop gearbeitet haben.). Wir haben folgende Stützhyper Ebenen in $\mathcal{H}(\mathcal{O}(1,2))$:

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}, & H_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 1\}, & H_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}, \\ H_4 &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\}, & H_5 &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}. \end{aligned}$$

Quotientenpolytop $(\mathcal{V}(\mathcal{O}(1,2)), \mathcal{H}(\mathcal{O}(1,2)), \Sigma, \tau)$ liefert

$$\mathcal{V}(R) = \{v_4, v_5\}.$$

Wir erhalten demnach den affinen Grundraum

$$A_R = (0, 1, 0)^T + \lambda \cdot (0, -1, 1)^T \quad (\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 - x_3)$$

und berechnen daraus $\mathcal{H}(R)$. Da $H_1 \cap A_R = A_R$ wird diese Stützhyper Ebene aussortiert. Für die übrigen ergibt sich

$$\begin{aligned} H_2 \cap A_R = H_5 \cap A_R &= \{x \in A_R \mid x_2 = 1\} \\ H_3 \cap A_R = H_4 \cap A_R &= \{x \in A_R \mid x_3 = 1\} \end{aligned}$$

d. h.

$$\mathcal{H}(R) = \{H_2, H_3\}.$$

Wir wenden wie im vorherigen Beispiel $\text{ZieheEcken}(\mathcal{V}(R), \mathcal{H}(R))$ an und erhalten direkt

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)^T, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)^T$$

und

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir ziehen v_4 nach v'_4 und erhalten

$$v'_4 = (0, 1, 0)^T - \varepsilon \cdot (0, -1, 1)^T = \left(0, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

Die einzige neue Stützhyper Ebene in $\mathcal{H}(v_4)$ ist

$$H_{2_1}^+ = \left\{x \in A_R \mid x_2 \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \quad \text{mit } w_{2_1} = w_2$$

Wir definieren $H_2 := H_{2_1}$ und aktualisieren – es ergibt sich:

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \varepsilon = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir ziehen v_5 nach v'_5 :

$$v'_5 = (0, 0, 1)^T - \varepsilon \cdot (0, 1, -1)^T = \left(0, -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Als neue Stützhyperebene erhalten wir

$$H_{3_1}^+ = \left\{x \in A_R \mid x_2 \geq -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \text{ mit } w_{3_1} = w_3.$$

Wir verzichten auf nochmalige Aktualisierung von ε und erhalten als Ausgabe

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Q) &= \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right) \right\}, \\ \mathcal{H}(Q) &= \left\{ \left\{x \in A_R \mid x_2 \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{x \in A_R \mid x_2 \geq -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \right\}. \end{aligned}$$

5.3 Optimierungen des Algorithmus

Wie bereits zu Beginn des Kapitels angekündigt, werden wir nun mögliche Optimierungen des in Abschnitt 5 vorgestellten Algorithmus diskutieren. Der erste Schritt wird in Abschnitt 5.3.1 darin bestehen, die nach dem Ziehen jeder Ecke anfallenden Berechnungen der Abstände ε_i durch Abschätzen signifikant zu reduzieren. Wir zeigen außerdem, dass nicht auf alle diese Berechnungen verzichtet werden kann, da für bestimmte Abstände keine allgemeine Abschätzung möglich ist. In Abschnitt 5.3.2 erörtern wir den Fall, dass ein Polytop P mit speziellem Simplex Σ und komprimierter Ordnung τ lediglich in \mathcal{V} - oder \mathcal{H} -Darstellungen vorliegt und welche Möglichkeiten es an dieser Stelle gibt, dennoch eine Zerlegung durchzuführen.

5.3.1 Vereinfachte Bestimmung der maximalen Ziehdistanz

Nach gegenwärtigem Stand der Funktion `ZieheEcken` muss nach jedem Verschieben einer Ecke der Abstand ε kontrolliert werden, da sich der minimale Abstand einer Ecke zu einer Stützhyperebene aufgrund der neu hinzugekommenen Stützhyperebenen reduziert haben könnte (vergl. hierzu die Zeilen 21 bis 23 in `ZieheEcken`).

Wir wollen nun zeigen, dass lediglich einmal zu Beginn (d. h. vor dem ersten Verschieben einer Ecke) der Abstand ε berechnet werden muss und nach dem Verschieben jeder Ecke v_j lediglich der Abstand aller Ecken v_k , die mit v_j in mindestens einer gemeinsamen Facette liegen, zu den durch das Verschieben von v_j neu entstandenen Stützhyperebenen überprüft werden muss, um den neuen ε -Wert bestimmen zu können (bisher mussten nach jedem Verschieben der Abstand aller Ecken zu allen Stützhyperebenen überprüft werden). Wir formulieren dies als Satz:

Satz 5.3.1:

Sei $\mathcal{V}(R) := \{v_1, \dots, v_s\}$ und $\mathcal{H}(R) := \{H_1, \dots, H_t\}$ eine doppelte Beschreibung des Quotientenpolytopes $R := P/\Sigma$ wie bei der Eingabe von `ZieheEcken`.

Es sei $\forall j \{0, \dots, s\} : \varepsilon^{(j)}$ der aktualisierte Abstand ε nach dem Verschieben der j -ten Ecke aus `ZieheEcken` (Zeilen 21 bis 23: $\varepsilon^{(j)}$ wird hier definiert als der halbe minimale Abstand einer Ecke zu einer Stützhyperebene, wobei $\varepsilon^{(0)} := \varepsilon$ (mit ε im Sinne von Zeile 5) vor dem ersten Verschieben gesetzt wird).

Insofern reicht es tatsächlich, Ecken des Typs $(*_1)$ zu betrachten.

Wir behalten die obigen Bezeichnungen bei und definieren außerdem (s. Graphik):

$$\begin{aligned} a &:= d(v_k, H_{j_i}) & b &:= d(v_k, H_i) \\ c &:= d(v_j, H_k) & f &:= d(v'_j, H_k) \\ \alpha &:= \angle(H_i, H_{j_i}) & \beta &:= \angle(H_i, H_k) \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun ein worst case Szenario, d. h. es soll durch die Verschiebung von v_j nach v'_j und die daraus resultierende Drehung von H_i um r (bzw. die daraus entstehende neue Stützhyperebene H_{j_i}) der Abstand einer Ecke v_k aus H_k zu H_{j_i} möglichst gering werden. Gesucht ist also das Verhältnis von a zu b im ungünstigsten Fall. Wegen

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta)},$$

lässt sich das Problem auf das Verhältnis der Winkel zwischen H_k und der gedrehten Stützhyperebene H_{j_i} zum Winkel der ursprünglichen Stützhyperebenen H_k und H_i zurückführen. Dieses ist aber aufgrund der Wechselwinkelbeziehung an der ridge r auch gegeben durch das Verhältnis von f zu c , also gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{c} \quad \Rightarrow \quad (*_2) \quad a = \frac{f}{c} \cdot b.$$

Da wir den Fall betrachten möchten, dass a möglichst klein wird, müssen wir b und f/c nach unten abschätzen. Für b gilt nach Konstruktion:

$$b \geq 2 \cdot \varepsilon^{(j-1)},$$

da $\varepsilon^{(j-1)}$ definiert ist als der halbe minimale Abstand einer Ecke zu einer Stützhyperebene nach dem Verschieben der Ecken v_1 bis v_{j-1} .

Von f wissen wir, dass es sich hierbei um den Abstand der Ecke v_j zu H_k (d. i. c) abzüglich der Strecke, die sich v_j beim Verschieben nach v'_j auf H_k zubewegt hat, handelt. Da allerdings nach Konstruktion $d(v_k, v'_k) = \varepsilon^{(j-1)}$, muss gelten:

$$f \geq c - \varepsilon^{(j-1)}.$$

Setzen wir nun $c := \lambda \cdot \varepsilon^{(j-1)}$ für ein passendes $\lambda \in \mathbb{R}$ (mit $\lambda \geq 2$ nach derselben Argumentation wie bei b), so gilt

$$\frac{f}{c} \geq \frac{(\lambda - 1) \cdot \varepsilon^{(j-1)}}{\lambda \cdot \varepsilon^{(j-1)}} \geq \frac{1}{2}.$$

Einsetzen in $(*_2)$ liefert

$$(*_3) \quad a \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \varepsilon^{(j-1)} = \varepsilon^{(j-1)}.$$

Da $\varepsilon^{(j)}$ definiert wird als der halbe minimale Abstand einer Ecke zu einer Stützhyperebene nach dem Verschieben der Ecke v_j nach v'_j folgt hieraus die Behauptung. □

Wir wollen nun noch anhand eines Beispiels demonstrieren, dass sich beim Verschieben von v_j nach v'_j keine allgemeinen Aussagen über die Abstände solcher Ecken $w \in \mathcal{V}(Q') \setminus \{v_j\}$, die in mindestens einer v_j enthaltenden Facette liegen, zu Stützhyperebenen treffen lassen, da diese Abstände beliebig klein werden können:

Beispiel 5.3.2:

Wir betrachten einen Ausschnitt aus einem Polytop im \mathbb{R}^3 :

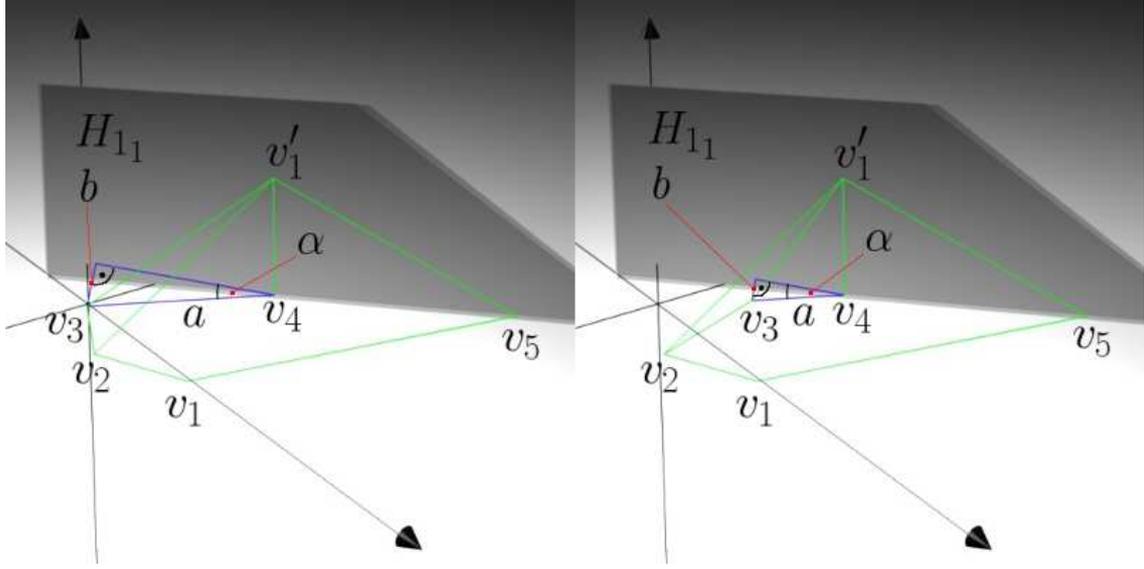


Abbildung 13: v_1 wurde nach v_1' verschoben. Der Abstand $b := d(v_3, H_{1_1})$ hängt lediglich von der Position von v_3 innerhalb der ursprünglichen Facette $\text{conv}\{v_1, \dots, v_5\}$ ab.

Wir gehen davon aus, dass im Zuge unseres Algorithmus v_1 um die Distanz ε nach v_1' verschoben wird. v_1 liegt außer in $F := \text{conv}\{v_1, \dots, v_5\}$ noch in zwei weiteren Facetten (in Abb. 13 nicht eingezeichnet), die F in den Kanten $[v_1, v_2]$ bzw. $[v_1, v_5]$ schneiden. Durch die Verschiebung entstehen aus F drei neue Facetten

$$F_1 := \text{conv}\{v_1', v_4, v_5\}, \quad F_2 := \text{conv}\{v_1', v_3, v_4\}, \quad F_3 := \text{conv}\{v_1', v_2, v_3\}.$$

Wir betrachten die Stützhyperebene H_{1_1} von F_1 : Nach der Bestimmung der durch die Verschiebung neu entstandenen Stützhyperebenen muss ε aktualisiert werden. Wir haben in Satz 5.3.1 gezeigt, dass für alle Ecken, die nicht in einer gemeinsamen Facette mit v_1 liegen, der Abstand zu den neu entstandenen Facetten mindestens ε beträgt. Für Ecken, die mit v_1 in einer Facette (hier: F) liegen, trifft dies allerdings im Allgemeinen nicht zu, wie Abbildung 13 zeigt: Die linke und die rechte Graphik unterscheidet sich ausschließlich in der Position der Ecke v_3 . Die blauen Dreiecke links und rechts setzen sich jeweils zusammen aus v_4 , v_3 und dem Punkt in H_{1_1} , für den $d(v_3, H_{1_1})$ minimal ist (aus diesem Grund sind diese Dreiecke rechtwinklig). Man erkennt, dass, wenn v_3 auf der durch $[v_3, v_4]$ definierten Gerade auf v_4 zubewegt wird, die jeweiligen blauen Dreiecke ähnlich sind, da α konstant bleibt. Somit ergibt sich die Beziehung:

$$d(v_3, H_{1_1}) = a \cdot \tan(\alpha).$$

Dementsprechend konvergiert der Abstand:

$$\lim_{a \rightarrow 0} d(v_3, H_{1_1}) = 0.$$

Dieses Beispiel lässt sich problemlos in höhere Dimensionen übertragen, wenn man v_4 nicht als Ecke sondern als Schnitt zweier ridges von F auffasst.

5.3.2 Reduzierung der Eingabedaten

Wir geben an dieser Stelle einige Anmerkungen für den Fall, dass wir ein Polytop P mit speziellem Simplex Σ und komprimierter Ordnung betrachten, auf das wir unseren Algorithmus anwenden wollen, von dem wir allerdings nicht alle Eingabedaten kennen, um zu klären, welche Optionen sich jeweils bieten.

Spezielles Simplex und Ordnung

Es ist relativ offensichtlich, dass wir nicht umhin kommen, Σ zu kennen, da wir diese Information benötigen, um überhaupt `Quotientenpolytop` starten zu können. Wir sind hier (d. h. in Kapitel 5) stets stillschweigend davon ausgegangen, dass Σ in \mathcal{V} -Darstellung vorliegt. Der Algorithmus ließe sich allerdings ohne großen Mehraufwand dahingehend erweitern, dass er auch mit einer \mathcal{H} -Darstellung operieren kann. Die Stützhyperebenen müssten dann (falls bei der Eingabe noch nicht geschehen) in den Grundraum von P eingebettet werden und zwar derart, dass diese eingebettete Stützhyperebene auch von P nur die Seite, die der Facette von Σ entspricht, stützt (und keine höherdimensionale Seite). Dann müssten lediglich alle Ecken von P einmal durchlaufen werden, um zu entscheiden, ob sie zu Σ gehören oder nicht. Danach könnte der Algorithmus wie gewohnt laufen.

Ob wir bzgl. der Ordnung τ Spielraum haben, hängt von der Art des Polytopes ab. Sofern wir über alle anderen Eingabedaten verfügen, ist τ für `Quotientenpolytop` nicht von Belang. Für `ZieheEcken` benötigen wir in jedem Fall *eine* Ordnung der Ecken. Ist P komprimiertes Polytop, muss die Ordnung nicht zwingend vorgegeben sein. In diesem Fall reicht es, wenn wir zunächst in beliebiger Reihenfolge die Ecken von Σ ziehen und danach, ebenfalls in beliebiger Reihenfolge, die von R , sofern wir von der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung von P bzgl. *derselben* Reihenfolge ausgehen. Ist P nicht für jede Ordnung der Ecken komprimiert, müssen wir eine komprimierte Ordnung τ als Eingabe vorgeben, da ansonsten Satz 4.1.4 und damit auch Theorem 4.2.1 nicht mehr anwendbar wäre.

\mathcal{V} -Darstellung

Ist von P neben Σ und τ lediglich die \mathcal{V} -Darstellung bekannt, können wir mit `Quotientenpolytop` sofort die \mathcal{V} -Darstellung von R berechnen. Sofern es uns nur um R ginge und wir uns mit einer \mathcal{V} -Darstellung dieses Polytopes zufrieden gäben, hätten wir keinerlei Probleme. Ein Problem entsteht allerdings in dem Moment, in dem wir Q berechnen wollen, denn wenn wir lediglich $\mathcal{V}(R)$ in `ZieheEcken` eingeben würden, könnten wir die Ecken nicht ziehen: Wir wüssten zwar, wo die ursprünglichen Ecken (geometrisch) liegen und in welcher Reihenfolge sie gezogen werden müssten, aber wir verfügten über keinerlei Information, in welche Richtung und wie weit die jeweilige Ecke v_j gezogen werden dürfte bzw. müsste, da für die Bestimmung der Richtung alle Stützhyperebenen bekannt sein müssen, in denen v_j liegt (die gezogene Ecke v'_j muss in allen negativen Halbräumen liegen) und für die maximale Distanz bekannt sein muss, wie der geringste Abstand von v_j zu einer Stützhyperebene einer v_j nicht enthaltenden Facette ist (was in unserem Algorithmus durch die Berechnung von ε abgeschätzt wird). Natürlich ist es nicht notwendig, für das Ziehen einer Ecke exakt das von uns in der Funktion `ZieheEcken` angegebene Verfahren zu verwenden, aber das zuvor beschriebene Problem taucht unabhängig vom gewählten Verfahren auf: Die Berechnung jeder möglichen Ziehrichtung und -distanz setzt eine Betrachtung der Stützhyperebenen von R voraus!

Die einzige Möglichkeit, die sich demnach im Fall einer auf \mathcal{V} -Darstellung reduzierten Eingabe zur Berechnung von Q bietet, ist, nach der Berechnung von $\mathcal{V}(R)$ daraus $\mathcal{H}(R)$ (und damit die Standardeingabedaten für `ZieheEcken`) zu bestimmen. Der einzige Vorteil ist, dass dies zumindest schneller geht, als direkt aus den Ecken von P dessen \mathcal{H} -Darstellung zu berechnen, da `Quotientenpolytop` bereits die Ecken des speziellen Simplexes von P aussortiert hat und dementsprechend R über weniger Ecken und eine niedrigere Dimension als P verfügt.

\mathcal{H} -Darstellung

Kennen wir neben Σ (wir gehen hier von einer \mathcal{H} -Darstellung aus) und τ lediglich die \mathcal{H} -Darstellung von P ist die Situation im Allgemeinen noch komplizierter als im Fall der \mathcal{V} -Darstellung: Im Gegensatz zum Fall der lediglich vorliegenden \mathcal{V} -Darstellung kann aus der \mathcal{H} -Darstellung von P nicht direkt die \mathcal{H} -Darstellung von R berechnet werden, da dafür der affine Grundraum von R bekannt sein muss, wovon nicht ausgegangen werden kann. Leider gestaltet sich die Berechnung dieses Grundraumes im geometrischen Fall als schwierig: Im kombinatorischen Fall kann man (vergl.

hierzu Definition 2.6.5) den Quotientenraum bzgl. des affinen Grundraumes von Σ betrachten und dann eine beliebige Einbettung in einen entsprechenden niedrigerdimensionaleren Raum wählen. Im geometrischen Fall funktioniert dies nicht, da es lediglich genau eine Einbettung (bzw. genau einen affinen Unterraum des Grundraumes von P) gibt, der alle Ecken aus R enthält, die aber nicht gegeben sind. Man verdeutliche sich dies etwa an $\mathcal{O}_{(1,2)}$ in \mathcal{H} -Darstellung (vergl. hierzu Beispiel 3.1.5 sowie Abbildung 9 auf Seite 25f.; wir lassen hier die Tatsache außer Acht, dass es sich um ein 0/1-Polytop handelt, da hiervon im allgemeinen nicht ausgegangen werden kann): Die Kenntnis des affinen Grundraums von Σ liefert zwar, dass die Basis des affinen Grundraums A_R von R linear unabhängig zu $(0, 1, 1)^T$ und $(1, 1, 1)^T$ sein muss, was allerdings nicht weiterhilft. Auch die Kenntnis des f -Vektors von $\mathcal{O}_{(1,2)}$ liefert lediglich die zusätzliche Bedingung, dass A_R eine der Kanten von Σ schneidet. Selbst die Information, dass A_R in der Stützhyperebene der Grundseite liegt, reicht nicht aus. A_R kann hier also nur durch Berechnung von $\dim(A_R) + 1$ affin unabhängigen Ecken von R berechnet werden, die wiederum nur durch das Schneiden von Stützhyperebenen berechenbar sind. Daraus lässt sich $\mathcal{H}(R)$ in gewohnter Weise berechnen.

Auf die Berechnung der übrigen Ecken kann für die \mathcal{H} -Darstellung von R verzichtet werden. Für die Berechnung von Q allerdings muss zunächst $\mathcal{V}(R)$ aus $\mathcal{H}(R)$ berechnet werden, da offenbar die Ecken von R bekannt sein müssen, wenn sie in `ZieheEcken` in die negativen Halbräume ihrer Stützhyperebenen gezogen werden sollen.

5.4 Laufzeitanalyse

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es nicht, eine möglichst scharfe Schranke für die Laufzeit des Algorithmus zu finden. Es geht vielmehr darum, eine ungefähre Einordnung zu ermöglichen und insbesondere nachzuweisen, dass der Algorithmus in Polynomialzeit läuft. Konkret zeigen wir den folgenden Satz:

Satz 5.4.1:

Sei wieder $n := \dim(P)$, $p := \#\mathcal{V}(P)$ und $s := \#\mathcal{V}(Q)$. Dann läuft `Quotientenpolytop` in $O(p \cdot n^3)$ und `ZieheEcken` in $O(s^6)$ und damit insbesondere der gesamte Algorithmus in Polynomialzeit.

Beweis:

Wir setzen als bekannt voraus, dass ein $n \times n$ lineares Gleichungssystem in $O(n^3)$ gelöst werden kann. Wir definieren

$$q := \#\mathcal{H}(P), \quad m := \dim(\Sigma), \quad h := \dim(R), \quad s := \#\mathcal{V}(R), \quad t := \#\mathcal{H}(R), \\ l := \text{Max. Anzahl Facetten einer Facette von } R$$

und betrachten zunächst den Pseudocode von `Quotientenpolytop`: Die Berechnung von $\mathcal{V}(R)$ ist linear. Die Berechnung von A , für die $h + 1$ affin unabhängige Ecken gefunden werden müssen, hat folgendes worst-case Szenario: Die ersten h betrachteten Ecken $B_1 := \{v_{m+1}, \dots, v_{m+h+1}\}$ sind affin unabhängig, die nachfolgend betrachteten $p - (m + h + 3)$ Ecken sind affin abhängig. Die Überprüfung entspricht der Lösung von $p - (m + h + 3)$ $n \times n$ linearen Gleichungssystemen sowie der Lösung von je einem $2 \times 2, \dots, (h - 1) \times (h - 1)$ linearen Gleichungssystem (sowie evtl. einem weiteren $n \times n$ LGS um eine Koordinatendarstellung zu erhalten). Dementsprechend können wir den Aufwand abschätzen durch

$$(p - (m + n + 2)) \cdot O(n^3) + \sum_{i=1}^{h-1} O(i^3) < O(p \cdot n^3).$$

Die Zeilen 3 bis 5 entsprechen höchstens q mal dem Gleichsetzen von $H_i \in \mathcal{H}(P)$ mit A , was bedeutet, dass jeweils ein $n \times n$ LGS gelöst werden muss. Somit ergibt sich hier für den Aufwand $O(q \cdot n^3)$, woraus folgt, dass der Gesamtaufwand von `Quotientenpolytop` bei

$$O((p + q) \cdot n^3)$$

liegt.

Wir betrachten nun den Pseudocode von **ZieheEcken**: Die Berechnung der w_i in den ersten beiden Zeilen entspricht offenbar gerade dem Lösen eines LGS für jede Hyperebene, d. h.

$$t \cdot O((h-1)^3)$$

(Normierung und Orientierung haben lineare Laufzeit). Für die Berechnung der ε_i in Zeile 3 müssen für jede Hyperebene H_i für alle Ecken, die nicht in H_i liegen, die Abstände zu H_i berechnet werden. Dadurch, dass die w_i bekannt sind, ergibt sich hierfür, da mindestens h Ecken in H_i liegen, eine Laufzeit von

$$t \cdot (s-h) \cdot O(h).$$

Die Zeilen 6 bis 10 sind für die Laufzeit nicht relevant. Allerdings muss darauf hingewiesen werden, dass ab Zeile 6 jede Operation für jede Ecke zu erfolgen hat. In Zeile 12 wird für jede Hyperebene $H_i \in \mathcal{H}(v_j)$ jede Ecke aus $\mathcal{V}(R)$ darauf getestet, ob sie in H_i liegt. Da dieser Test in linearer Zeit bewältigt werden kann, ergibt sich als Laufzeit (k war in Zeile 8 definiert als Anzahl der Stützhyperebenen aus $\mathcal{H}(R)$, die v_j enthalten)

$$s \cdot k \cdot s \cdot O(h).$$

Um die Facetten von $\mathcal{H}(H_i)$ zu berechnen, die mit v'_j eine neue Stützhyperebene bilden, können alle $H \in \mathcal{H}(R) \setminus \{H_i\}$ mit H_i geschnitten werden. Anschließend werden zunächst alle $v \in \mathcal{V}(R)$ darauf überprüft, ob sie in H_i liegen und die, für die dies zutrifft, überprüft man darauf, ob sie in den Schnitten liegen. Das ergibt eine Laufzeit von

$$s \cdot k \cdot (s + (t-1) \cdot \#\mathcal{V}(H_i)).$$

Als aufwendig stellen sich die Zeilen 15 und 16 aufgrund einer weiteren Schleife heraus: Alle Laufzeiten müssen hier mit $s \cdot k \cdot l$ multipliziert werden. Da wir wissen, dass die Berechnung der Stützhyperebene von $\text{conv}(\mathcal{V}(F_r) \cup \{v'_j\})$ und des zugehörigen orthonormalen Vektors jeweils Aufwand $O((h-1)^3)$ hat, ergibt sich in Zeile 15 und 16 insgesamt jeweils ein Aufwand von

$$s \cdot k \cdot l \cdot O((h-1)^3).$$

Die restlichen Zeilen sind zu vernachlässigen bis auf Zeile 22, die offenbar s mal den Aufwand von Zeile 3 hat, d. h.

$$s \cdot t \cdot (s-h) \cdot O(h).$$

Fassen wir nun zusammen, so sieht man, dass für die Bestimmung der Laufzeit alle Zeilen bis auf 1 / 2, 15 und 16 vernachlässigt werden können. Aus diesen erhalten wir eine Laufzeit von

$$O((t+2 \cdot s \cdot k \cdot l) \cdot (h-1)^3) = O((2 \cdot s \cdot k \cdot l) \cdot (h-1)^3) < O(s^6).$$

□

A Notationen

Wir geben an dieser Stelle noch einmal eine Übersicht über die wichtigsten, in dieser Arbeit verwendeten Notationen jeweils in der Reihenfolge ihrer Verwendung:

Notation	Referenz	Bedeutung
$\mathcal{V}(P), \mathcal{H}(P)$	Von Beginn an	<i>Eckenmenge</i> bzw. <i>Menge der Stützhyperebenen</i> eines Polytopes oder polytopalen Komplexes P (in Anlehnung an \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung).
$\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(\partial P)$	Def. 2.2.3, S. 5	<i>Seitenkomplex</i> bzw. <i>Randkomplex</i> eines Polytopes P .
f_P, h_P	Def. 2.2.4, 2.2.5, S. 6	f - bzw. h - <i>Vektor</i> eines Polytopes oder polytopalen Komplexes P .
$f(P, x), h(P, x)$	Satz u. Def. 2.2.6, S. 7	f - bzw. h - <i>Polynom</i> eines Polytopes oder polytopalen Komplexes P .
$\Delta(\mathcal{F})$	Def. 2.3.1, S. 8	<i>Triangulierung</i> eines polytopalen Komplexes \mathcal{F} .
$\Delta_\tau(\mathcal{F})$	Def. 2.3.2, S. 9	<i>Rückwärtige lexikographische Triangulierung</i> eines polytopalen Komplexes \mathcal{F} bzgl. einer Ordnung τ .
P_n	Satz u. Def. 2.4.3, S. 13	<i>Birkhoff-Polytop</i> aller doppelt stochastischen $n \times n$ Matrizen.
$\mathcal{O}(\Omega)$	Def. 2.5.1, S. 15	<i>Ordnungspolytop</i> einer partiell geordneten Menge Ω .
$\mathcal{O}_{(1,1,1)}, \mathcal{O}_{(2,1)}, \mathcal{O}_{(1,2)}$	Bsp. 2.5.12, S. 19ff.	Spezielle Ordnungspolytope.
$\Delta_1 * \Delta_2$	Def. 2.6.1, S. 20	<i>Simpliziale Vereinigung</i> zweier Simplizialkomplexe Δ_1 und Δ_2 .
P/V	Def. 2.6.5, S. 21	<i>Quotientenpolytop</i> eines Polytopes P bzgl. eines Untervektorraumes $V \subset \mathbb{R}^n$.
PS	Def. 3.2.1, S. 28	<i>Menge der Polytope mit speziellen Simplizes</i> (vergl. ebd. für entsprechende Untermengen).
bipyr Q	Kor. 3.2.8, S. 30	<i>Bipyramide</i> eines polytopalen Komplexes Q .
pyr _{i} (Q), pyr Q	Kor. 3.2.10, S. 31f.	$(i$ - <i>te</i>) <i>Pyramide</i> eines polytopalen Komplexes Q .
shell _{i} (Q), shell Q	Satz u. Def. 3.2.12, S. 32	$(i$ - <i>te</i>) <i>Muschel</i> eines polytopalen Komplexes Q .
$i(P, r)$	Satz u. Def. 4.1.1, S. 45	<i>Ehrhart-Polynom</i> eines Polytopes P .

Abbildungsverzeichnis

1	Ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für einen polytopalen Komplex.	6
2	Ein nicht reiner polytopaler Komplex (Gittermodell).	6
3	Ein Sechseck vor und nach der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung. . .	10
4	Der Rand des 3-dimensionalen Einheitswürfels vor und nach der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung (Gittermodell).	10
5	Die Ordnungspolytope $\mathcal{O}_{(1,1,1)}$, $\mathcal{O}_{(2,1)}$ und $\mathcal{O}_{(1,2)}$ (jeweils als Gittermodell).	19
6	Zwei Simplicialkomplexe Δ_1 und Δ_2 sowie deren simpliciale Vereinigung $\Delta_1 * \Delta_2$ als Gittermodell und mit Seitenflächen.	21
7	Die vier speziellen 1-Simplizes in einem 3-dimensionalen Würfel (Gittermodell). . .	23
8	Das spezielle 1- und 2-Simplex in einer 3-dimensionalen Bipyramide mit dreieckiger Grundseite (Gittermodell).	23
9	Die Ordnungspolytop $\mathcal{O}_{(2,1)}$ und $\mathcal{O}_{(1,2)}$ jeweils mit und ohne spezielles Simplex (Gittermodell).	24
10	Beispiel für die Konstruktion einer Muschel durch Bildung der Pyramide und anschließendes Herausschieben der Ecken aus der Grundseite.	35
11	Beispiel für korrektes und inkorrektes Ziehen einer Ecke im Zuge von ZieheEcken	55
12	Graphik zum Beweis von Satz 5.3.1 über die Abschätzung des minimalen Abstandes bestimmter Ecken zu Stützhyperebenen nach dem Ziehen einer Ecke im Zuge von ZieheEcken	62
13	Graphik zum Gegenbeispiel einer universellen Anwendung von Satz 5.3.1 auf alle Ecken.	64

Sämtliche Abbildungen wurden von mir erstellt. Hierzu wurden folgende Hilfsmittel verwendet:

- Die Abbildung 4 wurde mit INKSCAPE und GIMP erstellt.
- Die Abbildungen 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 13 wurden mit BLENDER erstellt und mit GIMP bearbeitet.
- Die Abbildung 12 wurde mit GIMP erstellt.

Bei den aufgelisteten Programmen handelt es sich im einzelnen um:

- GIMP (<http://www.gimp.org/>): Ein Programm zur Bildbearbeitung.
- INKSCAPE (<http://www.inkscape.org/>): Ein Programm zur Erstellung und Bearbeitung von Vektorgraphiken.
- BLENDER (<http://www.blender.org/>): Ein Programm zur Erstellung von 3D-Modellen.

Sämtliche Programme sind open source und können auf den oben angegebenen Webseiten kostenfrei bezogen werden.

Literatur

- [Ath05] Christos A. Athanasiadis. Ehrhart polynomials, simplicial polytopes, magic squares and a conjecture of stanley. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (583):163–174, 2005.
- [BN08] Victor Batyrev and Benjamin Nill. Combinatorial aspects of mirror symmetry. *Contemporary Mathematics*, 452:35–66, 2008.
- [BR07] Winfried Bruns and Tim Römer. h-vectors of gorenstein polytopes. *Journal of Combinatorial Theory*, 114:65–77, 2007.
- [CHT07] Aldo Conca, Serkan Hosten, and Rekha R. Thomas. Nice initial complexes of some classical ideals. *Contemporary Mathematics*, 423:11–42, 2007.
- [Grü02] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. Springer Verlag, 2002.
- [Hib01] Hidefumi Ohsugi & Takayuki Hibi. Convex polytopes all of whose reverse lexicographic initial ideals are squarefree. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(9):2541–2546, 2001.
- [Hib05] Hidefumi Ohsugi & Takayuki Hibi. The h-vector of a gorenstein toric ring of a compressed polytope. *the electronic journal of combinatorics*, 11(2):?, 2005.
- [Rob07] Matthias Beck & Sinai Robins. *Computing the Continuous Discretely*. Springer Verlag, 2007.
- [Sta80] Richard P. Stanley. Decompositions of rational convex polytope. *Annals of Discrete Mathematics*, (6):333–342, 1980.
- [Sta86] Richard P. Stanley. Two poset polytopes. *Discrete & Computational Geometry*, (1):9–26, 1986.
- [Sta06] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 1. Cambridge University Press, 2006.
- [The08] Michael Joswig & Thorsten Theobald. *Algorithmische Geometrie*. Vieweg Verlag, 2008.
- [Tza06] Eleni Tzanaki. Polygon dissections and some generalizations of cluster complexes. *Journal of combinatorial theory*, 113(6):1189–1198, 2006.
- [Wel05] Victor Reiner & Volkmar Welker. On the charney–davis and neggers–stanley conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, (109):247–280, 2005.
- [Zie04] Michael Joswig & Günther M. Ziegler. Convex hulls, oracles, and homology. *Journal for Symbolic Computation*, (38):1247–1259, 2004.
- [Zie07] Günther M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag, 2007.