Dipl.–Math. Timo de Wolff
FB 12 – Institut für Mathematik
Mail: `wolff(at)math.uni-frankfurt.de`
`http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/dm/personen/dewolff/index.html`

Das Art Gallery Problem

Mustervorlesung zur Einführungswoche im WiSe 2009/10

8. Oktober 2009

Das Themengebiet, dem diese Mustervorlesung zuzuordnen ist, ist die *Diskrete Mathematik* — diese beschäftigt sich, grob gesagt, mit Strukturen, deren Elemente voneinander separiert (*diskretisiert*) werden können. Darunter fallen beispielsweise:

- Endliche Mengen und Körper
- Graphentheorie
- Codes
- Kryptographie
- Gitter (z. B. $\mathbb{Z}^n$)
- Diskrete Geometrie (geometrische Strukturen, die durch endliche viele Punkte definiert werden, z. B. Polyeder)
- Kombinatorische Optimierung

Wir werden uns in dieser Vorlesung mit *Graphentheorie* beschäftigen. Viele praktische Probleme können durch Graphen modelliert werden. In der Graphentheorie werden solche Probleme diskutiert und man versucht, allgemeine Eigenschaften von Graphen zu verstehen und zu beweisen.

Zur Motivation einige Probleme, die durch Graphen beschrieben werden können:

- **Finden kürzester Wege**: Beispiele hierfür sind das *Königsberger Brückenproblem* (Euler bewies, dass es nicht möglich ist, die sieben (zu seiner Zeit) in Königsberg vorhandenen Brücken *genau* einmal zu überqueren und zum Ausgangsort zurückzukehren) und das *Chinesische Postbotenproblem* (Ein Postbote muss alle Straßen seines Bezirks einmal durchlaufen. Ist dies möglich, ohne eine Straße mehrfach entlang laufen zu müssen? Falls nein: Was ist ein kürzester Weg für seine Tour?)
- **Einbettbarkeit**: Ist es möglich einen bestimmten Graphen überschneidungsfrei in die Ebene einzubetten? Vielzitiertes Beispiel: Gegeben seien drei Häuser, jedes davon soll durch eine Leitung mit Elektrizitäts–, Wasser– und Gaswerk verbunden werden, ohne dass sich zwei Leitungen überschneiden. Ist dies möglich? (Antwort: Nein!)
- **Färbbarkeitsprobleme**: Klassisches Beispiel ist die Frage, wie viele Farben man benötigt, um eine Landkarte so einzufärben, dass je zwei angrenzende Länder keine gemeinsame Farbe besitzen.
- **Zuordnungsprobleme**: Beispielsweise: Gegeben seien eine Menge von Personen und eine Menge von zu erledigenden Aufgaben. Jede Person kann sich nur einer Aufgabe widmen und ist nur zur Erledigung bestimmter Aufgaben in der Lage. Gibt es eine Zuordnung der Personen auf die Aufgaben, so dass alle Aufgaben erledigt werden können?

Wir werden uns in dieser Vorlesung mit dem *Art Gallery problem* befassen: Wie viele Personen (Wächter) benötigt man höchstens, um alle Punkte eines Gebäudes (eines Museums) gleichzeitig im Blick zu haben? Wir nehmen an, jeder Wächter hat 360 Grad Blickradius und ist stationär (etwa eine Kamera), es gibt keine Gegenstände, die die Sicht versperren und wir betrachten nur einen einzelnen Raum. Der Raum sei darstellbar als *Polygonzug* (d.h. eine Menge von Ecken, die durch Kanten verbunden sind, von jeder Ecke gehen zwei Kanten aus, die Kanten überschneiden sich nicht und bilden einen Kreis).
Als zentrales Resultat dieser Vorlesung werden wir mit Hilfe von Graphentheorie beweisen, dass man höchstens $\frac{n}{3}$ (abgerundet) Wärter benötigt, falls der Raum n Ecken hat. Als ersten Schritt müssen wir definieren, was ein *Graph* ist und einige weitere Terminologie einführen.

Definition 1:
Ein Graph $G := (V, E)$ besteht aus einer endlichen Eckenmenge (oder auch Knotenmenge) V und einer Kantenmenge E, wobei E aus zweielementigen Teilmengen von Elementen aus V besteht, d.h.

$$E \quad \subseteq \quad \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V\}.$$

- Eine Folge $W := (e_1, \ldots, e_n)$ von Kanten aus E, die Ecken $v_0, v_1, \ldots, v_n$ aus V verbindet, heißt ein Weg in G. Wir bezeichnen mit $\alpha(W)$ die Anfangsecke (hier: v_0) und mit $\omega(W)$ die Endecke (hier: v_n) von W.
- Gilt $\alpha(W) = \omega(W)$, so heißt W geschlossen, sind zudem alle Ecken von W verschieden, so heißt W ein Kreis.
- Existiert zu je zwei beliebigen Ecken $v_1, v_2 \in V$ ein Weg W mit $\alpha(W) = v_1$ und $\omega(W) = v_2$, so heißt G zusammenhängend. Enthält G keine Kreise und ist zudem zusammenhängend, so heißt G ein Baum.
- Die Anzahl der Kanten $l(W)$, die in einem Weg W enthalten sind (hier: n Stück), bezeichnen wir als Länge von W.

Beispiel 2:
Einige Beispiele für Graphen:

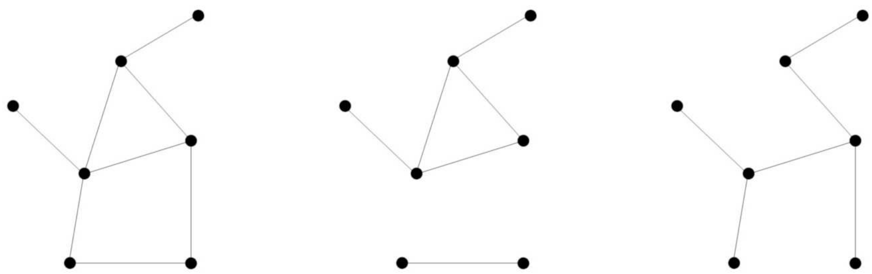

Abbildung 1: Von links nach rechts: Ein Graph, ein nicht zusammenhängender Graph und ein Baum.

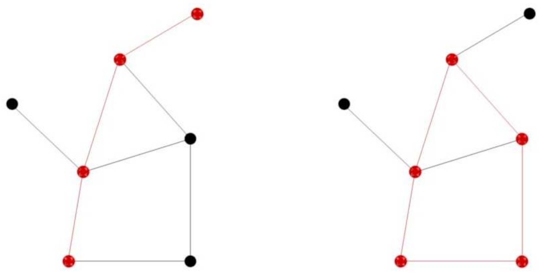

Abbildung 2: Links: Ein Weg der Länge drei (rot). Rechts: Ein Kreis in einem Graphen (rot).

Definition 3:
Ein Graph $G := (V, E)$ heißt PLANAR (oder PLÄTTBAR), falls er so in den $\mathbb{R}^2$ (die Ebene) eingebettet werden kann, dass sich keine seiner Kanten überschneiden. Liegen zudem alle Ecken an äußeren Gebieten, so heißt G OUTERPLANAR.

Beispiel 4:
Beispiele für planare, outerplanare und nicht planare Graphen:

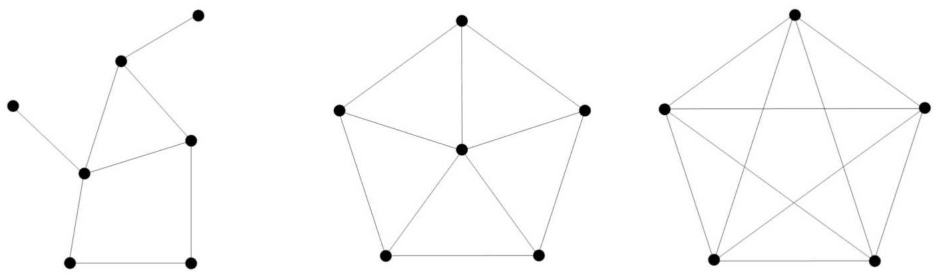

Abbildung 3: Von links nach rechts: Ein planarer Graph, ein planarer aber nicht outerplanarer Graph und ein nicht planarer Graph.

Definition 5:
Sei $G := (V, E)$ ein Graph. Für jedes $v \in V$ heißt die Anzahl $\delta(v)$ der Kanten, die v enthalten, der GRAD von v. Ferner definieren wir den MAXIMALGRAD durch

$$\Delta(G) \quad := \quad \max_{v \in V} \delta(v),$$

d.h. als den maximalen Grad aller Ecken in V.

Lemma 6:
Jeder outerplanare Graph G mit 4 oder mehr Ecken besitzt mindestens zwei Ecken vom Grad 2, die nicht benachbart (d.h. durch eine Kante verbunden) sind.

Beweis:
Übung! (Vollständige Induktion)

$\square$

Wir wollen uns nun mit der Färbbarkeit eines Graphen beschäftigen. Die Idee ist, dass ein Graph *k–färbbar* heißen soll, falls es möglich ist, jede Ecke des Graphen mit einer aus k verschiedenen Farben einzufärben, derart dass keine zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, dieselbe Farbe haben. Wir definieren dies formal:

Definition 7:
Sei $G := (V, E)$ ein Graph. Dann heißt G k–FÄRBBAR, falls eine Abbildung

$$c : V \to \{1, \dots, k\}$$

existiert mit

$$\{v_1, v_2\} \in E \quad \Rightarrow \quad c(v_1) \neq c(v_2).$$

Die kleinste natürliche Zahl k, für die G k–färbbar ist, heißt die CHROMATISCHE ZAHL $\chi(G)$ von G.

Beispiel 8:
Frage nach Färbbarkeit einer Landkarte entspricht der Frage nach einer oberen Schranke für $\chi(G)$, falls G planar.

Beispiel 9:
Sei $G := (V, E)$ ein Graph mit $V := \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann ist die GREEDY–FÄRBUNG definiert durch

$$c : V \to \{1, \dots, k\}, \quad v_i \mapsto \min(\{1, \dots, k\} \backslash \{c(v_j) \mid j < i \text{ und } \exists e \in E : e = \{v_i, v_j\}\}),$$

d. h. bei der Greedy Färbung werden die Ecken (gemäß einer festgelegten Ordnung) sukzessive durchschritten und jede Ecke wird mit der Farbe belegt, die die niedrigste Nummer unter c hat und mit der noch kein Nachbar von der jeweiligen Ecke versehen wurde.

Bemerkung 10:
Die Anzahl der bei der Greedy–Färbung verwendeten Farben hängt im Allgemeinen von der Anordnung der Ecken ab.

Satz und Definition 11:
Sei $G := (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

$$\chi(G) \quad \leq \quad \Delta(G) + 1.$$

Beweis:
Sei $v_j \in V$ beliebig. Wir betrachten die Greedy–Färbung c auf G. Im ungünstigsten Fall haben bereits alle Nachbarn von v_j verschiedene Farben und es gilt $\delta(v_j) = \Delta(G)$. Daraus folgt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

□

Definition 12:
Sei $G := (V, E)$ ein Graph. Dann heißt G k–DEGENERIERT, falls es eine Anordnung der Ecken gibt, so dass jedes $v \in V$ hinter höchstens k seiner Nachbarn liegt.

Korollar 13:
Für einen k–degenerierten Graph G gilt

$$\chi(G) \quad \leq \quad k + 1.$$

Beweis:
Wie Satz und Definition 11.

□

Satz 14:
Jeder outerplanare Graph $G := (V, E)$ ist 2–degeneriert und somit 3–färbbar

Beweis:
Definiere eine Ordnung $(v_1, \ldots, v_n)$ auf V folgendermaßen: Gemäß Lemma 6 existieren zwei nicht benachbarte Ecken mit Grad 2. Wähle eine der beiden als v_n und lösche sie samt der beiden sie enthaltenden Kanten aus G. Der resultierende Graph G' hat $n-1$ Ecken und ist wieder outerplanar, somit kann Lemma 6 erneut angewendet werden. Fahre sukzessive fort bis v_3. Damit ist G 2–degeneriert und mit Korollar 13 3–färbbar.

□

Damit haben wir alles, was wir benötigen, um die Anzahl der Wächter im Museum nach oben zu beschränken.

Theorem 15:
Für jeden Raum eines Museums reichen $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter, falls der Raum n Ecken hat ($\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl $\leq \frac{n}{3}$).

Beweis:
Wir können den Raum als Polygonzug auffassen, d.h. als outerplanaren Graphen $G := (V, E)$, der aus genau einem Kreis besteht. G habe n Ecken. Wir konstruieren G' aus G durch überschneidungsfreies Einfügen von $n-2$ Kanten im Inneren von G, so dass jedes Gebiet im Inneren ein Dreieck ist (wir *triangulieren* — man überlege sich, warum dies immer möglich ist). Steht ein Wächter in einem Dreieck, sieht er offenbar jeden Punkt im Dreieck. Idee: Wähle $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Ecken von G', so dass jedes Dreieck von G' eine dieser Ecken hat.
G' ist ebenfalls outerplanar (wir haben am äußeren Gebiet und an den Ecken von G nichts geändert). Damit ist G' 2–degeneriert und insbesondere 3–färbbar. Wir wählen eine solche Färbung. Dann müssen die Ecken jedes Dreiecks drei verschiedene Farben haben und eine Farbe ist an höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Ecken gewählt worden. Wähle diese als Position der Wächter.

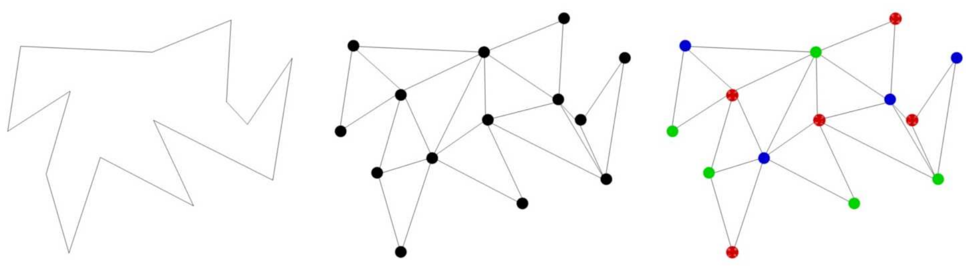

Abbildung 4: Von links nach rechts: Ein Beispiel für einen Museumsraum, der Raum als triangulierter Graph mit 14 Ecken, der dreigefärbte Graph — die blauen Ecken sind eine Auswahl für Standorte von $\lfloor \frac{14}{3} \rfloor = 4$ Wächtern.

□

Abbildungsverzeichnis

Alle Graphiken wurden mit dem open source 3D creator Blender erstellt. Siehe:

`www.blender.org`

Literatur

[Aig06] Martin Aigner. *Diskrete Mathematik*. Vieweg Verlag, 2006.

[Fel] Stefan Felsner. Vorlesungsskript Graphentheorie. Technische Universität Berlin.

[The] Thorsten Theobald. Vorlesungsskript Diskrete Mathematik. J. W. Goethe–Universität, Frankfurt / Main.