Mathematatik für Informatiker I, WS 02/03

Frank-Olaf Schreyer

February 27, 2003

Kapitel I: Zählen und Symmetrie

1 Mengen, Logik, Beweismethoden

Menge, Element, Teilmengen, Anzahl, Durchschnitt, Vereinigung, disjunkt, Komplement, Gesetze von de Morgen, Kartesisches Produkt, Potenzmenge Beweismethoden: a) Widerspruchsbeweis, b) Vollstïdige Induktion. Satz unendlich viele Primzahlen. Aussagenlogik, und, oder ,$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, de Morgen. Prinzip der vollständigen Induktion, $|2^M| = 2^{|M|}$, Summen, Produktzeichen, Beispiele von Summationsformeln, Binomialkoeffizienten und binomische Formel.

2 Abbildungen

Abbildung, Bild, Urbild, Graph, reellwertige Funktionen, Definitionsbereich, injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrabbildung, Anzahl, Schubfachprinzip, N^M, charakteristische Funktion χ_A, $2^M \cong \{0,1\}^M$, Komposition, Existenz- und Allquantor.

3 Äquivalenzrelationen und Kongruenzen

Äquivalenzrelation, Beispiele, kongruent modulo m, Äquivalenzklasse, Repräsentanten, Quotient, Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}/n$, ggT, kgV, Euklidischer Algorithmus, Primfaktorzerlegung, Chinesischer Restsatz.

4 Gruppen und Symmetrie

Gruppe, neutrales Element, inverses Element, abelsch, Permutationen, Symmetriegruppen: Quadrat, Tetraeder. Gruppenoperation, Bahnen, Stabilisator, Untergruppenbedingung, Indexformel, Ordnung, Bahnengleichung und Anwendungen, Gruppenhomomorphismus, Isomorphie, Normalteiler, Wortgruppen, Homorphiesatz. Permutationen: Zykelschreibweise, Transpositionen, Signatur, alternierende Gruppe.

Kapitel II: Die reellen Zahlen

5 Körperaxiome

Körper, Beispiele: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/p$, Gegenbeispiele: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/ab$

6 Die Anordnungsaxiome

$>$, absolut Betrag, Dreiecksungleichung, Archimedisches Axiom, Irrationalität von $\sqrt{2}$ und Golden Schnitt (inkommensurabel).

7 Konvergenz

Folgen, Fibonacci Zahlen, Konvergenz, Limes, Cauchy-Folge, Vollständigkeitsaxiom, Intervallschachtelung. Existenz der reellen Zahlen: Cauchy-Folgen/Nullfogen, Dedekindsche Schnitte, floats (?). Beschränkt, monoton, Teilfogen, Bolzano-Weierstraß, Existenz der Quadratwurzel.

8 Die komplexen Zahlen

Komplexe Zahlenebene, Realteil, Imaginärteil, Betrag, Konjugation, Geometrie der Multiplikation, Fundermentalsatz der Algebra (ohne Beweis).

9 Reihen

Reihe, Grenzwert, Partialsummen, Geometrische Reihe, harmonische Reihe, b-adische Brüche. Konvergenzkriterien: alternierende Reihen, Leibniz Kriterium, absolute Konvergenz, Majoranten Kriterium, Quotienten Kriterium. Umordnung von Reihen, Potenzreihen, Konvergenzradius.

10 Punktmengen

Häufungspunkt, Supremum, Infimum, Konvergenz gegen ∞, lim sup, abzählbar, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Kapitel III: Reelle Funktionen

11 Stetigkeit

Stetig, rationale Funktionen, Folgenkriterium, Grenzwerte von Funktionen, Zwischenwertsatz, beschränkt, Minimum, Maximum, Monotonie, streng monoton, Umkehrfunktionen, k-te Wurzel.

12 Differenzierbarkeit

Differenzenquotient, Ableitung, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion.

13 Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Lokales Extremum, Mittelwertsatz, hinreichendes Kriterium für Extrema, Wendepunkt, konkav, konvex, Newtonverfahren.

14 Spezielle Funktionen

Expontialfunktionen, Additionstheorem, $y' = cy$, Logarithmus, beliebige Potenzen, Trigonometrische Funktionen: sin, cos, Parametriesierung des Kreis, $y'' = -y$, tan, cotan, arcsin, arctan

15 Asymptotisches Verhalten

Rationale Funktione, Division mit Rest für Polynome, o, O, Ω-Notation, Regel von l'Hospital.

16 Integration

Treppenfunktion, Ober- und Untersumme, bestimmtes Integral, gleichmässig stetig, Mittelwertsatz der Integralrechnung, Riemannsche Summen, Stammfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Substitutionsregel, partielle Integration, Partialbruchzerlegung.

17 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale, Integralkriterium für Konvergenz von Reihen.

18 Taylorreihe

Taylorformel, Lagrange Form des Restglieds, Tayloreihe, Pathologien der Taylorreihe, Binomische Reihe

19 Konvergenz von Funktionenfolgen

Grenzfunktion, punktweise und gleichmässige Konvergenz, Vertauschung von Grenzprozessen, Anwendungen auf Potenzreihen, Logarithmus Reihe, arctan, arcsin, Abelscher Grenzwertsatz.

Kapitel IV: Lineare Algebra

20 $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$

Punkte im $\mathbb{R}^3$, Vektoraddition, Skalarmultiplikation, Skalarprodukt, Euklidische Norm, Pythagoras, Parallelogrammgleichung, Cauchy-Schwarz, Dreiecksungleichung, senkrecht, Abstände von Geraden und Punkten.

21 Vektorräume

K-Vektorraum, Beispiele, $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$, Untervektoraum, Erzeuger, lineare Abhängigkeit, Basis, Austauschsatz, Dimension, Basisergänzungssatz.

22 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Matrizen, Matrizenprodukt, elemetare Zeilenoperationen, Gaußalgorithmus, Aufwand.

23 Matrizen und lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen, Isomorphismus, Iso induziert durch Basis, Matrixdarstellung von linearen Abbildungen, invertierbare Matrizen, $GL(n, K)$, Berechnung der Inversen, Basiswechselformel, Kern, Bild, Rang, Normalform von linearen Abbildungen, Dimensionsformel für Kern und Bild, Struktursatz für die Lösungenmenge linearer Gleichungssysteme, Isomorphie Kriterium, Summen und Durchnitte von Unterräumen, Dimensionsformel.

24 Determinanten

Volumen Interpretation, Eigenschaften, Existenz und Eindeutigkeit von det. Permutationsformel, Kroneckersymbol, transponierte Matrix, Determinantenproduktsatz, Elementarmatrizen, Kstchensatz, Laplacescher Entwicklungssatz, Cofaktormatrix, Cramersche Regel.

25 Endomorphismen und Eigenwerte

Endomorphismen $f \in End(V)$, Basistransformationsformel, $det(f)$, Invertierbarkeit, Eigenvektor, Eigenwert, Eigenraum, lineare Unbhängigkeit von Eigenräumen, direkte Summe, Berechnung von Eigenwerten, charakteristische Polynom, Spur, halbeinfache Endomorphismen, Diagonalisierbarkeitskriterium, Fasern der charakteristischen Abbildung $M(n \times n, K) \to K^n, A \mapsto$ Koeffizienten von χ_A, nilpotente Matrizen, Jordansche Normalform, Satz von Cayley-Hamilton.

26 Orthogonale und symmetrische Matrizen

Orthogonale Matrizen, $O(n), SO(n)$, Orthonormalbasis, $O(2), O(3)$, symmetrische Matrizen, Hauptachsentransformation.

27 Der projektive Raum und Dualität

Perspektivisches Zeichnen, Distanzpunkte, Horizont, $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}^n$, homogene Koordinaten, Standardatlas, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, Möbiusband, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und Hopffaserung, Automorphismen von $\mathbb{P}^n$. Dualraum $V^* = Hom(V, K)$, duale Basis, Beispiel: Auswertung und Lagrange Interpolationspolynome, Faßregel, Satz $dimV < \infty \Rightarrow V \cong (V^*)^*$. $\mathbb{P}^2$, $\check{\mathbb{P}}^2$ und duale Aussagen: Satz von Pascal und Desargue, $(C^*)^* = C$ für ebene Kurven, (ohne Beweise).