Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 10

Abgabetermin Montag 20.1.2003 vor der Vorlesung

1. Leiten Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegung die Stammfunktion $\int f(x)\,dx$ der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$
$$f(x) := \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$
auf ihrem Definitionsbereich D her.

   Lösung:

   Partialbruchzerlegung von f:

   Die Nullstellen von $x^2 - 3x + 2$ sind $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = 1$ bzw. 2, damit $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ und $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

   Wir bekommen die Partialbruchzerlegung durch Bestimmung von α, β in
$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} = \frac{\alpha x - 2\alpha + \beta x - \beta}{(x-1)(x-2)} = \frac{(\alpha + \beta)x - (2\alpha + \beta)}{x^2 - 3x + 2}$$
   d.h. $\alpha + \beta = 0$ und $2\alpha + \beta = -1$, also $\alpha = -1$ und $\beta = 1$, d.h.
$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$
   Damit:
$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)$$

2. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ im Nullpunkt.

   Hinweis: Verwenden Sie die Partialbruchzerlegung.

   Lösung:

   Mit der oben bestimmten Partialbruchzerlegung ist
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$$
   Mit der geometrischen Reihe
$$\tfrac{1}{1-x} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ für } |x| < 1 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^n \text{ für } |x| < 2$$
   also
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - 2^{-(n+1)}\right) \cdot x^n \text{ für } |x| < 1$$

3. Geben Sie die Grenzfunktion
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$
in ihrem Konvergenzintervall in geschlossener Form an.

Lösung:

Wir schreiben
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)'$$
und
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$
Damit
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x \cdot (1+x)}{(x-1)^3}$$

4. Konvergieren die folgenden Reihen?

   (a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

   (b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$$

   Hinweis: Integralkriterium.

   Lösung:

   (a) Mit dem Integralkriterium konvergiert die geg. Reihe genau dann, wenn
$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$
   existiert. Für $b > 0$ haben wir
$$\int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^b \frac{1}{\ln x} (\ln x)' \, dx \overset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{\ln 2}^{\ln b} = \ln \ln b - \ln \ln 2 \overset{b \to \infty}{\to} \infty$$
   also konvergiert die Reihe nicht.

   (b) Hier müssen wir
$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$$
   betrachten. Für $b > 0$ haben wir
$$\int_2^b \frac{1}{x (\ln x)^2} dx = \int_2^b \frac{1}{(\ln x)^2} (\ln x)' \, dx \overset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{\ln 2}^{\ln b} = -\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \overset{b \to \infty}{\to} \frac{1}{\ln 2}$$
   also konvergiert die Reihe.

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $x_0, x \in I$. Zeigen Sie, daß für das Restglied $R_{n+1}(x)$ der Taylorformel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

gilt: Ist $p \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq p \leq n+1$, dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1-p}}{n!} \frac{(x-x_0)^p}{p}$$

Lösung:
Aus der Vorlesung kennen wir die exakte Darstellung des Restglieds

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Wir können auf das Integral den Mittelwertsatz der Integralrechnung mit der Gewichtsfunktion

$$\varphi(t) = (x-t)^{p-1}$$

anwenden, denn $\varphi(t) \geq 0\ \forall t \in [x_0, x]$ bzw. $\varphi(t) \leq 0\ \forall t \in [x, x_0]$. Dieser liefert zu jedem x ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} \left((x-t)^{n-(p-1)} f^{(n+1)}(t) \right) (x-t)^{p-1}\, dt \\
&= \frac{1}{n!} (x-\xi)^{n-(p-1)} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} (x-t)^{p-1}\, dt \\
&= \frac{1}{n!} (x-\xi)^{n-(p-1)} f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^p}{p} \right]_{x_0}^{x} \\
&= \frac{1}{n!} (x-\xi)^{n-(p-1)} f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^p}{p}
\end{aligned}$$

Insbes. erhalten wir für $p = n+1$ die Lagrangesche Form des Restglieds.