WS 02/03 Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Übungsblatt 11

Abgabetermin Montag 27.1.2003 vor der Vorlesung

1. Sei a_n die n-te Fibonaccizahl.

   (a) Zeigen Sie, daß im Konvergenzradius $R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ um 0 gilt
   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegung die Taylorreihe von $\frac{x}{1-x-x^2}$ um 0.

2. Zeigen Sie:

   (a) Die Reihe
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos\left(n^2 x\right)$$
   mit $x \in \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und f ist unendlich oft differenzierbar und
   $$f^{(2k+1)}(0) = 0$$
   $$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4k}}{2^n}$$

   (b) Die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ hat Konvergenzradius 0.
   Hinweis: Es reicht, $f^{(2k)}(0)$ durch einen geeigneten Summanden abzuschätzen.

3. Zeigen Sie: Die Folge der auf $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen
   $$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$$
   konvergiert gleichmäßig gegen die Betragsfunktion $|x|$.

4. Seien T bzw. D in die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ (Radius 1) einbeschriebene Tetraeder bzw. Dodekaeder. Bestimmen Sie die Länge der Kanten von T bzw. D.

5. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes p von der Geraden $L = q + \mathbb{R} \cdot v$, wobei
   $$q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } p = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$