WS 02/03 Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 11

Abgabetermin Montag 27.1.2003 vor der Vorlesung

1. Sei a_n die n-te Fibonaccizahl.

   (a) Zeigen Sie, daß im Konvergenzradius $R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ um 0 gilt

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegung die Taylorreihe von $\frac{x}{1-x-x^2}$ um 0.

Lösung:

(a) Seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ die Fibonaccizahlen und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Es gilt

$$x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_1 x - a_0 = f(x) - x$$

also

$$\left(1 - x - x^2\right) \cdot f(x) = x$$

d.h.

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

im Konvergenzradius.

(b) Partialbruchzerlegung von f:

Die Nullstellen des Nenners sind $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Mit den Kehrwerten

$$\alpha := \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1}{x_2} \quad \text{und} \quad \beta := \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1}{x_1}$$

ist

$$1 - x - x^2 = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) = (1 - \beta x) \cdot (1 - \alpha x)$$

Damit:

$$\frac{x}{1-x-x^2} \overset{!}{=} \frac{a}{(1-\alpha x)} + \frac{b}{(1-\beta x)} = \frac{a(1-\beta x)+b(1-\alpha x)}{1-x-x^2} = \frac{(a+b)-(a\beta+b\alpha)x}{1-x-x^2}$$

also $b=-a$ und $-1 = a\beta + b\alpha = a(\beta-\alpha) = a\left(-\sqrt{5}\right)$, d.h. $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, also

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) x^n\end{aligned}$$

wenn wir dies in geometrische Reihen entwickeln. Da $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < \left|\frac{1}{\beta}\right|$ ist der Konvergenzradius $\frac{1}{\alpha} = x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Da die beiden Potenzreihendarstellungen von f gleich sein müssen, bekommen wir wieder die Formel

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$$

für die Fibonaccizahlen (vergl. Aufgabe 2, Blatt 5).

2. Zeigen Sie:

   (a) Die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos\left(n^2 x\right)$$

   mit $x \in \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und f ist unendlich oft differenzierbar und

   $$\begin{aligned} f^{(2k+1)}(0) &= 0 \\ f^{(2k)}(0) &= (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4k}}{2^n}\end{aligned}$$

   (b) Die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ hat Konvergenzradius 0.
   Hinweis: Es reicht, $f^{(2k)}(0)$ durch einen geeigneten Summanden abzuschätzen.

Lösung:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ hat die Reihe wegen $\left|\frac{1}{2^n}\cos\left(n^2x\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}$ die von x unabhängige konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ und konvergiert deshalb gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Damit ist f stetig.

Die Reihen der $2k$-ten bzw. $(2k+1)$-ten Ableitungen

$$(-1)^k \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k}}{2^n}\cos\left(n^2x\right) \quad \text{bzw.} \quad (-1)^{k+1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k+2}}{2^n}\sin\left(n^2x\right)$$

haben die von x unabhängigen konvergenten Majoranten

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k}}{2^n} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k+2}}{2^n}$$

(Quotientenkriterium $\frac{\frac{(n+1)^{4k}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{4k}}{2^n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{4k}}{2} < Konst < 1$ für n genügend groß, denn $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{4k} = 1$) und konvergieren deshalb ebenfalls gleichmäßig. Damit ist f unendlich oft differenzierbar mit

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k}}{2^n}\cos\left(n^2x\right)$$

bzw.

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k+2}}{2^n}\sin\left(n^2x\right)$$

Im Nullpunkt:

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k}}{2^n} \quad \text{bzw.} \quad f^{(2k+1)}(0) = 0$$

(b) Wir haben

$$\left|f^{(2k)}(0)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k}}{2^n} > \frac{m^{4k}}{2^m} = \frac{\left(m^2\right)^{2k}}{2^m}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Für den $2k$-ten Summanden in der Taylorreihe gilt also

$$\left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}\right| > \frac{\left(m^2\cdot|x|\right)^{2k}}{2^m\,(2k)!}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Speziell für $m = 2k$:

$$\left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}\right| > \frac{\left((2k)^2\cdot|x|\right)^{2k}}{2^{2k}\,(2k)!} > \frac{\left((2k)^2\cdot|x|\right)^{2k}}{2^{2k}\,(2k)^{2k}} = (k\cdot|x|)^{2k}$$

Wegen $\lim_{k\to\infty}(k\cdot|x|)^{2k} = \infty$ für alle $x \neq 0$ sind damit die Taylorsummanden nicht beschränkt, also die Taylorreihe divergent für alle $x \neq 0$.

3. Zeigen Sie: Die Folge der auf $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen
$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$$
konvergiert gleichmäßig gegen die Betragsfunktion $|x|$.

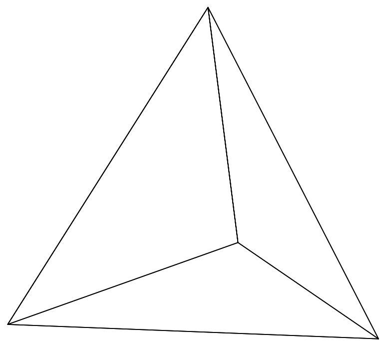
Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist
$$\begin{aligned}
|f_n(x) - |x|| &= \left| \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - \sqrt{x^2} \right| = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - \sqrt{x^2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - \sqrt{x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + \sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + \sqrt{x^2}} \\
&\leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$
unabhängig von x. Zu gegebenen $\varepsilon > 0$ wählen wir also N, sodaß $\sqrt{\frac{1}{N}} < \varepsilon$, und dann gilt
$$|f_n(x) - |x|| < \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \geq N$$

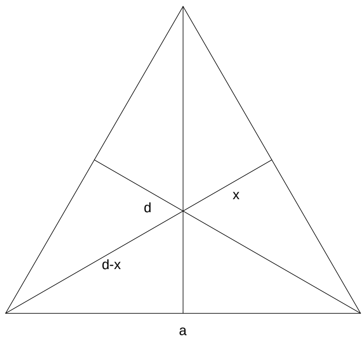
4. Seien T bzw. D in die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ (Radius 1) einbeschriebene Tetraeder bzw. Dodekaeder. Bestimmen Sie die Länge der Kanten von T bzw. D.

Lösung:

- Für den Tetraeder:

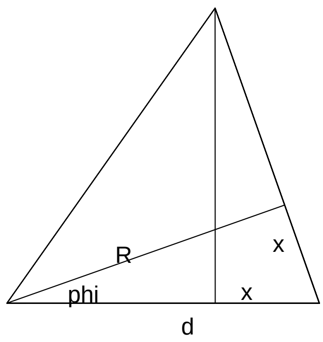


Sei a die Kantenlänge. Wir betrachten zunächst eine Seitenfläche von T, d.h. ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a:



Für die Höhe d im Dreieck gilt $d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ d.h. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Für den senkrechten Abstand x des Mittelpunkts des Dreiecks zu einer Seite gilt $(d-x)^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ d.h. $x = \frac{d^2 - \frac{a^2}{4}}{2d} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Nun betrachten wir die Ebene durch 2 Ecken von T und den Mittelpunkt von T:



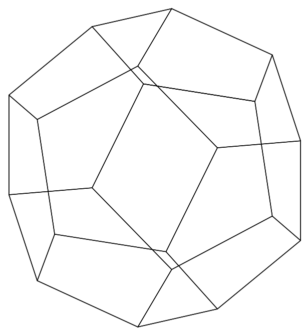
Wir haben $\frac{x}{d} = \sin\varphi$ und $\frac{d-x}{R} = \cos\varphi$, also

$$1 = \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{d-x}{R}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\right)^2 + \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2\sqrt{3}}}{R}\right)^2$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right)a^2}{R^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\frac{a^2}{R^2}$$

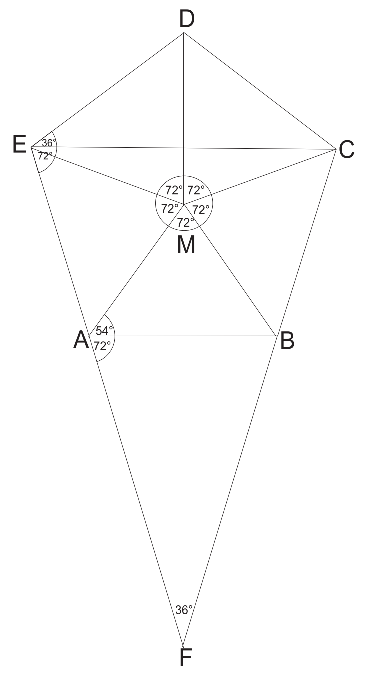
also $R = \frac{3}{2\sqrt{6}}a$.

Für $R = 1$ bekommen wir also $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

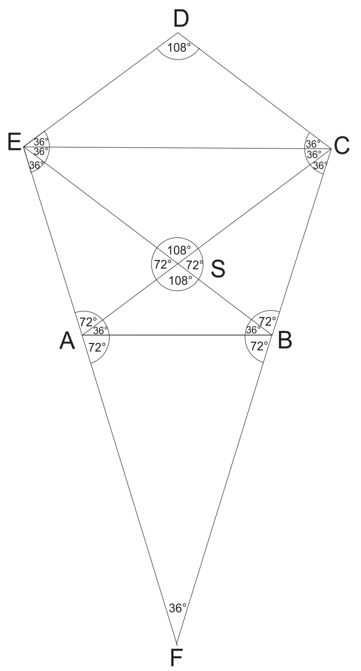
- Für den Dodekaeder:



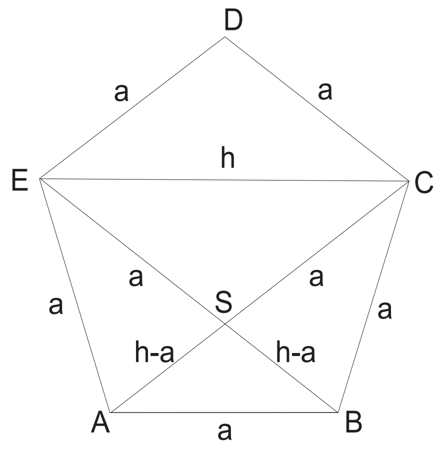
Sei a die Kantenlänge. Wir betrachten wieder eine Seitenfläche von D, d.h. ein regelmäßiges Fünfeck mit Seitenlänge a und bestimmen die Länge h der Sehne. Zunächst bestimmen wir die Winkel im regelmäßigen Fünfeck:



Da $\frac{360°}{5} = 72°$ ist $\sphericalangle BAM = \frac{180°-72°}{2} = 54°$, also der Winkel zwischen den Fünfeckseiten $2 \cdot 54° = 108°$. Damit ist $\sphericalangle BAF = 180° - 108° = 72° = \sphericalangle CEF$, also $\sphericalangle CED = 108° - 72° = 36°$. Wegen der Rotationssymmetrie des regelmäßigen Fünfecks kennen wir damit alle Winkel in folgender Zeichnung:



Also ist das Dreieck SBC gleichschenklig, d.h. $\overline{SC} = a$:



Da die Dreiecke ABS und CES ähnlich sind, gilt:

$$\frac{h-a}{a} = \frac{a}{h}$$

d.h. $h^2 - ah = a^2$, also

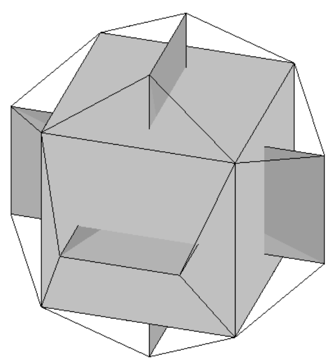
$$h = \tau \cdot a$$

mit dem Goldenen Schnitt

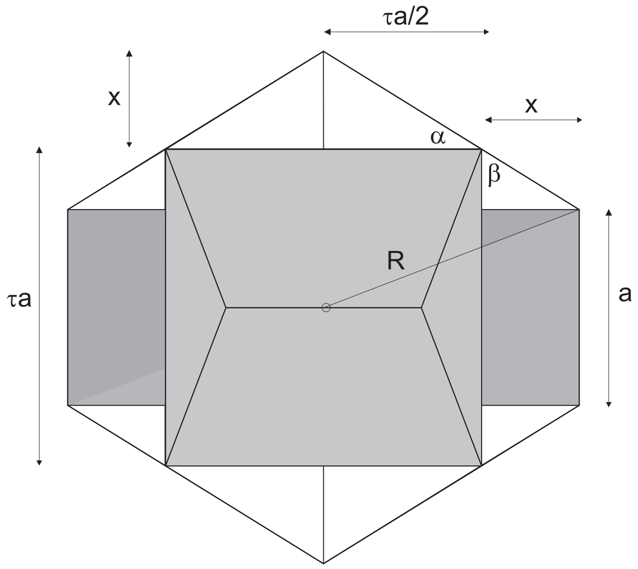
$$\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

der die Gleichung $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ erfüllt.

Im Dodekaeder hat jede Sehne eines Seitenfünfecks eine parallele Sehne auf dem gegenüberliegenden Seitenfünfeck. Damit können wir aus 12 Sehnen ein Parallelepiped mit Seitenlänge $\tau \cdot a$ konstruieren, das wegen der Dodekaedersymmetrie ein Würfel mit Seitenlänge $\tau \cdot a$ sein muß. Die restlichen $20 - 8 = 12$ Ecken des Dodekaeders bilden 3 zueinander paaweise senkrechte Rechtecke:



Wir betrachten nun die durch eines der Rechtecke definierte Schnittebene im Dodekaeder:



Da $\alpha + \beta = 90°$ gilt

$$\frac{x}{\frac{a(\tau-1)}{2}} = \frac{a\frac{\tau}{2}}{x}$$

also $x^2 = a\frac{\tau}{2}\frac{a(\tau-1)}{2} = a^2\frac{\tau^2-\tau}{4} = a^2\frac{1}{4}$, also

$$x = \frac{1}{2}a$$

Bemerkung: Wir haben gezeigt, daß das Rechteck die selbe Fläche $a^2 \cdot \tau^2$ hat wie die Seitenfäche des Würfels.

Für den Radius gilt dann mit $\tau^2 - \tau - 1 = 0$

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\tau}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left(2 + \tau^2 + 2\tau\right) \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left(2 + \tau^2 + 2\tau^2 - 2\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 3\tau^2 \end{aligned}$$

also

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}\tau \cdot a$$

d.h. $a = \frac{2}{\tau\sqrt{3}}R$. Für $R = 1$ bekommen wir also

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{3}$$

5. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes p von der Geraden $L = q + \mathbb{R} \cdot v$, wobei

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } p = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir bestimmen zunächst das eindeutige $x = q + \lambda \cdot v \in L$, sodaß

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x - p, v \rangle = \langle q + \lambda \cdot v - p, v \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \lambda \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -4 + \lambda \cdot 2 \end{aligned}$$

also $\lambda = 2$ d.h.

$$x = q + \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da der senkrechte Abstand der kürzeste ist, ist

$$d(p, L) = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$