WS 02/03

Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 12

Abgabetermin Montag 3.2.2003 vor der Vorlesung

1. Begründen Sie, warum die folgenden Teilmengen keine Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ sind:

$$U := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\right\}$$
$$S := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$W := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Lösung:

- Sei $(x,y) \in U$ mit $y \neq 0$, also $y > 0$. Wäre U ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, dann müsste auch das Inverse $-(x,y) = (-x,-y) \in U$ sein, jedoch ist $-y < 0$.
  Zum Bsp. $(0,1) \in U$ jedoch $-(0,1) = (0,-1) \notin U$.
- Sei $(x,y) \in V$ mit $y \neq 0$. Wäre S ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, müsste auch der mit $\frac{2}{y} \in \mathbb{R}$ skalarmultiplizierte Vektor $\left(\frac{2}{y}\right) \cdot (x,y) = \left(\frac{2}{y}x, 2\right) \in V$ sein, jedoch ist $\left(\frac{2}{y}x\right)^2 + 2^2 > 2^2 > 1$.
  Zum Bsp. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in V$ jedoch $4 \cdot \left(0, \frac{1}{2}\right) = (0,2) \notin V$.
- W enthält nicht das neutrale Element $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

2. Sei für $d \geq 2$

$$V_d = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq d\}$$

der Vektorraum der Polynome in 1 Variable vom Grad $\leq d$.

Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen Untervektorräume von V_d sind, und bestimmen Sie bei den Untervektorräumen die Dimension:

$$U_1 = \{p \in V_d \mid p(0) = 0\}$$
$$U_2 = \{p \in V_d \mid p(0) = 1\}$$
$$U_3 = \{p \in V_d \mid p(1) = 0\}$$
$$U_4 = \left\{p \in V_d \mid \int_0^1 p(x)\,dx = 0\right\}$$
$$U_5 = \{p \in V_d \mid p'(0) + p''(0) = 0\}$$
$$U_6 = \{p \in V_d \mid p'(0) \cdot p''(0) = 0\}$$

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned} V_d &= \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq d\} \\ &=_{\mathbb{R}} \left\langle 1, x, ..., x^d \right\rangle \end{aligned}$$

$1, x, ..., x^d$ sind linear unabhängig, also eine $\mathbb{R}$-Vektorraumbasis und damit $\dim_{\mathbb{R}} V_d = d + 1$.

Für ein Polynom $p = a_0 + a_1 x + ... + a_d x^d \in V_d$ gilt:

- $p \in U_1 \Leftrightarrow 0 = p(0) = a_0$
- $p \in U_2 \Leftrightarrow 1 = p(0) = a_0$
- $p \in U_3 \Leftrightarrow 0 = p(1) = a_0 + ... + a_d$
- $p \in U_4 \Leftrightarrow 0 = \int_0^1 p(x)\, dx = \left[a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + ... + \frac{a_d}{d+1} x^{d+1}\right]_0^1 = a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_d}{d+1}$
- $p \in U_5 \Leftrightarrow 0 = p'(0) + p''(0) = a_1 + 2 \cdot a_2$
- $p \in U_6 \Leftrightarrow 0 = p'(0) \cdot p''(0) = a_1 \cdot 2 \cdot a_2 \Leftrightarrow 0 = a_1 \cdot a_2$

  Also:
- $U_1 =_{\mathbb{R}} \left\langle x, ..., x^d \right\rangle$. Damit ist U_1 ein Untervektorraum. Da $1, x, ..., x^d$ sind linear unabhängig waren, sind es auch $x, ..., x^d$ und bilden damit eine Basis von U_1, also $\dim_{\mathbb{R}} U_1 = d$.
- Für alle $p \in U_2$ gilt $p \neq 0$, d.h. U_2 enthält nicht $0 \in V_d$ und ist deshalb kein Untervektorraum.
- $U_3 =_{\mathbb{R}} \left\langle x^d - 1, ..., x - 1 \right\rangle$. Die eine Inklusion ist klar. Ist andererseits $p = a_0 + a_1 x + ... + a_d x^d$ mit $0 = a_0 + ... + a_d$, dann ist

  $$a_d \cdot \left(x^d - 1\right) + ... + a_1 \cdot (x - 1) = a_d x^d + ... + a_1 x - (a_d + ... + a_1) = p$$

  Insbesondere ist U_3 ein Untervektorraum. Die Erzeuger $x^d - 1, ..., x - 1$ sind linear unabhängig und damit eine Basis von U_3, denn sind $a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}$ mit

  $$0 = a_d \left(x^d - 1\right) + ... + a_1 (x - 1) = a_d x^d + ... + a_1 x - (a_d + ... + a_1)$$

  dann sind $a_d = ... = a_1 = a_d + ... + a_1 = 0$, da $x^d, ..., 1$ eine Basis von V_d bilden. Damit ist $\dim U_3 = d$.
- $U_4 =_{\mathbb{R}} \left\langle x^d - \frac{1}{d+1}, ..., x - \frac{1}{2} \right\rangle$. Die eine Inklusion ist wieder klar.

  Ist andererseits $p = a_0 + a_1 x + ... + a_d x^d$ mit $0 = a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_d}{d+1}$, dann ist

  $$a_d \cdot \left(x^d - \frac{1}{d+1}\right) + ... + a_1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = a_d x^d + ... + a_1 x - \left(\frac{a_d}{d+1} + ... + \frac{a_1}{2}\right) = p$$

  Insbesondere ist U_4 ein Untervektorraum. Wie bei U_3 zeigt man, daß die Erzeuger linear unabhängig sind und damit eine Basis von U_4 bilden. Damit ist $\dim U_4 = d$.

- $U_5 =_{\mathbb{R}} \left\langle x^d, ..., x^3, x^2 - 2 \cdot x, 1 \right\rangle$. Die eine Inklusion ist wieder klar.
  Ist andererseits $p = a_0 + a_1 x + ... + a_d x^d$ mit $0 = a_1 + 2 \cdot a_2$, dann ist

$$a_d \cdot x^d + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x\right) + a_0 \cdot 1 = p$$

  Insbesondere ist U_5 ein Untervektorraum. Wie bei U_3 zeigt man, daß die Erzeuger linear unabhängig sind und damit eine Basis von U_5 bilden. Damit ist $\dim U_5 = d$.
- U_6 ist kein Untervektorraum, denn $x, x^2 \in U_6$ jedoch $x + x^2 \notin U_6$. Bem: U_6 ist die Vereinigung von zwei d-dimensionalen Untervektorräumen:

$$U_6 =_{\mathbb{R}} \left\langle 1, x^2, x^3, ..., x^d \right\rangle \cup {}_{\mathbb{R}} \left\langle 1, x, x^3, ..., x^d \right\rangle$$

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie AB und BA. Können Sie $AB \neq BA$ auch ohne Rechnung einsehen?

Lösung:

$$AB = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Da $A \in M(2 \times 4, \mathbb{R})$ und $B \in M(4 \times 2, \mathbb{R})$ ist $AB \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $BA \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ und können damit nicht gleich sein.

4. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir wenden den Gauß-Algorithmus an auf die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ III-I \\ IV-I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 24 \\ 0 & 7 & 26 & 63 & 124 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-3\cdot II \\ IV-7\cdot II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 42 & 96 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2}III \\ IV-6\cdot III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

also $x_4 = 4$, $x_3 = 6 - 3 \cdot 4 = -6$, $x_2 = 4 - 2 \cdot (-6) - 3 \cdot 4 = 4$, $x_1 = 1 - 4 + 6 - 4 = -1$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. (a) Sei V ein d-dimensionaler Vektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ mit p Elementen. Zeigen Sie V hat p^d Elemente.
   (b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendliche Dimension hat.

Lösung:

(a) Da $\dim_{\mathbb{F}_p} V = d$ gibt es einen $\mathbb{F}_p$-Vektorraumisomorphismus $V \to (\mathbb{F}_p)^d$. $(\mathbb{F}_p)^d$ ist die Menge der d-Tupel aus $\mathbb{F}_p$ hat also p^d Elemente.

(b) Jeder endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist abzählbar, da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist, jedoch $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Alternative Lösung:

(b') Wir zeigen, daß die Elemente von $S = \{\ln p \mid p \in \mathbb{N} \text{ prim}\}$ $\mathbb{Q}$-linear unabhängig sind. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, hat dann $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendliche Dimension.

Seien also $p_1, ..., p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen und $x_k \in \mathbb{Q}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \ln p_k = 0$$

Nach Multiplizieren mit den Nennern der x_k können wir annehmen, daß die $x_k \in \mathbb{Z}$ sind. Wir haben nun

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{x_k}\right) = 0 \quad \text{d.h.} \quad \prod_{k=1}^{n} p_k^{x_k} = 1 \quad \text{also}$$

$$\prod_{\substack{k=1 \\ x_k \geq 0}}^{n} p_k^{x_k} = \prod_{\substack{k=1 \\ x_k < 0}}^{n} p_k^{-x_k}$$

und damit alle $x_k = 0$ mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.