WS 02/03 Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Übungsblatt 13

Abgabetermin Montag 10.2.2003 vor der Vorlesung

1. Berechnen Sie die Inverse folgender Matrix durch Zeilenoperation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Seien $a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $m_1, ..., m_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^{r} m_j = d + 1$ und $V_d = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq d\}$. Zeigen Sie

$$\begin{array}{rccl} \Phi := \Phi_{\substack{a_1,...,a_r \\ m_1,...,m_r}} : & V_d & \to & \mathbb{R}^{d+1} \\ & p & \mapsto & \left(p(a_1), p'(a_1), ..., p^{(m_1-1)}(a_1), ..., p(a_r), p'(a_r), ..., p^{(m_r-1)}(a_r)\right) \end{array}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus.

Seien nun $m_1 = ... = m_r = 2$. Bestimmen Sie die Urbilder der Einheitsvektoren $e_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ unter Φ (Hermite-Interpolation).

3. (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in $Gl(n, \mathbb{F}_q)$, wobei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen ist.

   (b) Sei $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$. Bestimmen Sie experimentell oder theoretisch die Wahrscheinlichkeit, daß eine Matrix aus $Mat(n \times m, \mathbb{F}_p)$ nicht vollen Rang hat, bei Gleichverteilung der Elemente von $Mat(n \times m, \mathbb{F}_p)$, für $n = 3$, $m = 3, 4, 5$ und $p = 2, 3, 5, 7, 11$. Abgabe des Codes bitte als Ausdruck.

4. Seien $U, W \subset \mathbb{R}^5$ die Untervektorräume

$$U = span\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \quad W = span\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Bestimmen Sie die Dimension von $U, W, U \cap W$ und $U + W$.

5. Sei $T \subset Gl(n, \mathbb{R})$ die Teilmenge der Diagonalmatrizen von $Gl(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

   (a) T ist eine kommutative Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$.

   (b) Wenn $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $AD = DA$ für alle $D \in T$, dann ist A eine Diagonalmatrix. Mit anderen Worten: T ist eine maximal große kommutative Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$.