

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 13**Abgabetermin Montag 10.2.2003 vor der Vorlesung**

1. Berechnen Sie die Inverse folgender Matrix durch Zeilenoperation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zeilenoperationen mit der um die Einheitsmatrix erweiterten Matrix:

$$\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
I \Leftrightarrow III, \frac{1}{3}I, \frac{1}{2}II, \frac{1}{3}III, \frac{1}{4}IV : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
II - I, IV - I : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
IV + II : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
\frac{1}{2}II, IV + 2 \cdot III : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
III + 4 \cdot IV, 3 \cdot IV : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
II + \frac{1}{2} \cdot III - 2 \cdot IV : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{8} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
I - II - III - IV : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{8} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}
\end{array}$$

also ist die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & 2 & -\frac{8}{3} & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

2. Seien $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^r m_j = d+1$ und $V_d = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq d\}$. Zeigen Sie

$$\Phi := \Phi_{\substack{a_1, \dots, a_r \\ m_1, \dots, m_r}} : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \\ p \mapsto (p(a_1), p'(a_1), \dots, p^{(m_1-1)}(a_1), \dots, p(a_r), p'(a_r), \dots, p^{(m_r-1)}(a_r))$$

ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraumisomorphismus.

Seien nun $m_1 = \dots = m_r = 2$. Bestimmen Sie die Urbilder der Einheitsvektoren $e_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ unter Φ (Hermite-Interpolation).

Lösung:

- (a) Wir zeigen zunächst daß Φ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraumisomorphismus ist:

Die $\mathbb{R}$ -Linearität von Φ ist klar.

Φ ist bijektiv, denn zu jedem $y = (y_1^0, \dots, y_1^{m_1-1}, \dots, y_r^0, \dots, y_r^{m_r-1})$ gibt es genau ein Polynom p vom Grad d mit $\Phi(p) = y$:

$p \in V_d$ hat $d+1$ Koeffizienten, die die $d+1$ linearen Gleichungen

$$p(a_1) = y_1^0, \dots, p^{(m_1-1)}(a_1) = y_1^{m_1-1}, \dots, p(a_r) = y_r^0, \dots, p^{(m_r-1)}(a_r) = y_r^{m_r-1}$$

erfüllen müssen. Um zu zeigen, daß dieses inhomogene lineare Gleichungssystem genau 1 Lösung hat, zeigen wir, daß das zugehörige homogene System

$$p(a_1) = 0, \dots, p^{(m_1-1)}(a_1) = 0, \dots, p(a_r) = 0, \dots, p^{(m_r-1)}(a_r) = 0$$

nur die triviale Lösung hat: Ist p eine Lösung des homogenen Systems, dann ist p ein Polynom vom Grad d , das a_1 als m_1 -fache Nullstelle, ..., a_r als m_r -fache Nullstelle hat und damit mit Vielfachheit gezählt $m_1 + \dots + m_r = d+1$ Nullstellen hat. Da ein Polynom vom Grad d aber höchstens d Nullstellen haben kann ist $p = 0$.

- (b) Hier ist

$$\Phi : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \\ p \mapsto (p(a_1), p'(a_1), \dots, p(a_r), p'(a_r))$$

und $d+1 = 2r$.

Wir suchen Polynome $g_i, h_i \in V_{2r-1} = V_d$ mit

$$\begin{aligned} g_i(a_j) &= \delta_{ij} & h_i(a_j) &= 0 \\ g'_i(a_j) &= 0 & h'_i(a_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

für alle $i, j = 1, \dots, r$, denn dann werden diese Polynome auf die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^{d+1}$ abgebildet. Da Φ ein Vektorraumisomorphismus ist, haben die Einheitsvektoren genau diese Urbilder, und die g_i und h_i bilden eine Basis von V_d .

Geben wir Funktionswerte und Ableitungen $y = (y_1, y'_1, \dots, y_r, y'_r)$ vor, dann ist das Interpolationspolynom

$$\Phi^{-1}(y) = \sum_{i=1}^r (y_i g_i(x) + y'_i h_i(x))$$

Nun zur Konstruktion der g_i, h_i :

Mit den Lagrangepolynomen

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \text{ für } i = 1, \dots, r$$

setzen wir

$$h_i(x) := L_i^2(x) (x - x_i)$$

Tatsächlich ist dann $\deg h_i = 2(r-1) + 1 = 2r - 1 = d$ und wegen $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ ist für alle $i, j = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned} h_i(x_j) &= 0 \\ h'_i(x_j) &= 2L_i(x_j) L'_i(x_j) (x_j - x_i) + L_i^2(x_j) = 0 + \delta_{ij}^2 = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Für g_i machen wir den Ansatz $g_i(x) = L_i^2(x) (c_i x + d_i)$ mit $c_i, d_i \in \mathbb{R}$. Für $i \neq j$ haben wir

$$\begin{aligned} g_i(x_j) &= 0 \\ g'_i(x_j) &= 2L_i(x_j) L'_i(x_j) (c_i x_j + d_i) + c_i L_i^2(x_j) = 0 \end{aligned}$$

Für $i = j$ wollen wir

$$\begin{aligned} 1 &= g_i(x_i) = L_i^2(x_i) (c_i x_i + d_i) = c_i x_i + d_i \\ 0 &= g'_i(x_i) = 2L_i(x_i) L'_i(x_i) (c_i x_i + d_i) + c_i L_i^2(x_i) = 2L'_i(x_i) (c_i x_i + d_i) + c_i \\ &= 2L'_i(x_i) + c_i = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} + c_i \end{aligned}$$

da

$$L'_i(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i, k}}^n \frac{x - x_l}{x_i - x_l}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems für c_i und d_i ist

$$c_i = -2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \quad d_i = 1 + 2x_i \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k}$$

also

$$g_i(x) = L_i^2(x) (c_i x + d_i) = L_i^2(x) \left(1 + 2(x_i - x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \right)$$

3. (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in $Gl(n, \mathbb{F}_q)$, wobei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen ist.
- (b) Sei $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q$. Bestimmen Sie experimentell oder theoretisch die Wahrscheinlichkeit, daß eine Matrix aus $Mat(n \times m, \mathbb{F}_q)$ nicht vollen Rang hat, bei Gleichverteilung der Elemente von $Mat(n \times m, \mathbb{F}_q)$, für $n = 3$, $m = 3, 4, 5$ und $q = 2, 3, 5, 7, 11$. Abgabe des Codes bitte als Ausdruck.

Lösung:

- (a) Wir zählen sukzessive die Anzahl der Möglichkeiten für die Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n$ einer invertierbaren Matrix über $\mathbb{F}_q$ ab:

Für v_1 haben wir $q^n - 1$ Möglichkeiten (n Einträge, 0-Vektor ausgeschlossen).

Für v_2 haben wir wieder q^n Möglichkeiten abzüglich der von v_1 linear abhängigen Möglichkeiten. Dies sind genau die $\mathbb{F}_q$ -Vielfachen von v_1 (incl. des Nullvektors $0 \cdot v_1$), d.h. wir haben $q^n - q$ zu v_1 linear unabhängige Möglichkeiten für v_2 .

Induktiv haben wir für v_{j+1} ebenso q^n -Möglichkeiten abzüglich der $\mathbb{F}_q$ -Linearkombinationen $v_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i v_i$ von $v_1, \dots, v_j$. Diese Linearkombinationen erzeugen einen Vektorraum V_j der Dimension j über $\mathbb{F}_q$, da $v_1, \dots, v_j$ linear unabhängig sind, also ist $|V_j| = q^j$.

Wir bekommen also die Formel

$$|Gl(n, \mathbb{F}_q)| = \prod_{j=0}^{n-1} (q^n - q^j) = q^{n^2} \prod_{l=1}^n \left(1 - \frac{1}{q^l}\right)$$

- (b) Das Maple-Skript zur experimentellen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit findet sich auf der Homepage der Vorlesung.

Die theoretische Lösung:

Sei $OE\ m \geq n$. Wir zählen die $A \in Mat(n \times m, \mathbb{F}_q)$ mit vollem Rang ab. Seien $v_1, \dots, v_n$ die Zeilen von A . Analog zu Aufgabenteil a. haben wir $q^m - 1$ Möglichkeiten für $v_1, \dots, q^m - q^{j-1}$ Möglichkeiten für $v_j, \dots, q^m - q^{n-1}$ Möglichkeiten für v_n . Insgesamt also

$$\prod_{j=0}^{n-1} (q^m - q^j)$$

verschiedene Matrizen von vollem Rang, also

$$q^{n \cdot m} - \prod_{j=0}^{n-1} (q^m - q^j)$$

Matrizen mit nicht vollem Rang. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit (für $n \leq m$)

$$P_{n,m,q} = 1 - \frac{1}{q^{n \cdot m}} \prod_{j=0}^{n-1} (q^m - q^j) = 1 - \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{q^{m-j}}\right) = \frac{1}{q^{m-n+1}} + O\left(\frac{1}{q^{m-n+2}}\right)$$

Wir untersuchen nun N zufällig gewählte Matrizen aus $Mat(n \times m, \mathbb{F}_q)$. Dies bedeutet, daß wir ein Zufallsexperiment mit 2 möglichen Ausgängen (nicht voller Rang oder voller Rang) N mal wiederholen. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich in einem einzelnen Experiment das Ergebnis "nicht voller Rang" ergibt ist $P := P_{n,m,q}$. Die einzelnen Zufallsexperimente sind unabhängig.

Diese Situation wird mit der Binomialverteilung beschrieben, die im 2. Teil der Vorlesung behandelt wird. X bezeichne die Zufallsvariable "Anzahl der Matrizen, die nicht vollen Rang haben" bei N Versuchen:

- Die Wahrscheinlichkeit daß x -mal "nicht voller Rang" auftritt ist

$$\binom{N}{x} P^x (1 - P)^{N-x}$$

- Der Erwartungswert von X ist

$$E(X) = N \cdot P$$

- Die Varianz von X ist

$$V(X) = N \cdot P \cdot (1 - P)$$

Entsprechend ist für die Zufallsvariable $\frac{X}{N}$ (geschätzte Wahrscheinlichkeit für nicht vollen Rang) der Erwartungswert

$$\frac{E}{N} = P$$

und die Varianz

$$\frac{V}{N^2} = \frac{P \cdot (1 - P)}{N}$$

Für $n = 3$ und $m = 3, 4, 5$ und $q = 2, 3, 5, 7, 11$ geben wir an:

- Die experimentell bestimmten Wahrscheinlichkeiten P_{ex}
- Die theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeiten P_{th}
- Die Approximation $P_{approx} = \frac{1}{q^{m-n+1}}$
- Für $N = 10000$ Versuche die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{Varianz} = \sqrt{\frac{V}{N^2}} = \frac{\sqrt{P \cdot (1 - P)}}{N}$$

m	q	P_{ex}	P_{th}	P_{approx}	σ
3	2	.6750	.6718750000	.5000000000	.004695306001
3	3	.4291	.4293552812	.3333333333	.004949841651
3	5	.2379	.2381440000	.2000000000	.004259476908
3	7	.1664	.1627978138	.1428571429	.003691811014
3	11	.1001	.09909960763	.0909090909	.002987957085
4	2	.3860	.3847656250	.2500000000	.004865398635
4	3	.1589	.1546004166	.1111111111	.003615233434
4	4	.0531	.04920371200	.0400000000	.002162931038
4	7	.0226	.02367091993	.02040816327	.001520217336
4	11	.0109	.009077254377	.008264462810	.0009484122432
5	2	.2068	.2053222656	.1250000000	.004039369169
5	3	.0529	.05283935564	.03703703704	.002237126687
5	5	.0103	.009904132096	.008000000000	.0009902545260
5	7	.0026	.003390031600	.002915451895	.0005812520354
5	11	.0010	.0008257689550	.0007513148009	.0002872432872

4. Seien $U, W \subset \mathbb{R}^5$ die Untervektorräume

$$U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \quad W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimmen Sie die Dimension von $U, W, U \cap W$ und $U + W$.

Lösung:

Seien

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben $u_3 = u_1 + u_2$, also $U = \text{span}(u_1, u_2)$ und u_1, u_2 sind offensichtlich linear unabhängig, denn $u_1, u_2 \neq 0$ und u_2 ist kein Vielfaches von u_1 . Damit ist $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$.

Wir bilden die Matrix mit Spalten $A = (w_1, w_2, w_3, u_1, u_2)$. Es ist also $\text{image } A = U + W$.

- Wir führen nun Zeilenoperationen mit A durch:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}I : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\
III - 3I, IV - I, V - 3I : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\
II \leftrightarrow IV : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\
III + 4II, IV - 3II, V + 5II : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \\
III \leftrightarrow V : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\
III + 2IV : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\
IV - 2III : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\
V - 2IV : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Wir können sofort ablesen:
 - $\dim_{\mathbb{R}} U + W = \dim \text{image } A = 4$
 - w_1, w_2, w_3, u_1 sind linear unabhängig, also eine Basis von $U + W$.

- Insbesondere sind auch w_1, w_2, w_3 linear unabhängig, also eine Basis von W und $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$.
- $\dim_{\mathbb{R}} \ker A = 1$.
- Wir können nun die Dimension und eine Basis von $U \cap W$ bestimmen:
Da w_1, w_2, w_3 und u_1, u_2 Basen von W bzw. U sind, ist

$$\begin{aligned} \ker A &\rightarrow U \cap W \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\mapsto x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = -x_4 u_1 - x_5 u_2 \end{aligned}$$

ein Vektorraumisomorphismus, denn zu jedem $v \in U \cap W$ gibt es eindeutig bestimmte x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 mit

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = v = -x_4 u_1 - x_5 u_2$$

also erhalten wir eine Basis von $U \cap W$ und $\dim_{\mathbb{R}} (U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}} \ker A = 1$. Konkret liefert Rückwärtseinsetzen in

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_5 \\ 0 \\ -x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

daß $x_4 = \frac{x_5}{2}$, $x_3 = x_5$, $x_2 = -x_5$, $x_1 = -x_5$, also

$$\ker A =_{\mathbb{R}} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und damit} \quad U \cap W =_{\mathbb{R}} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Natürlich haben wir auch mit der Dimensionsformel

$$\dim_{\mathbb{R}} (U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} W - \dim_{\mathbb{R}} (U + W) = 2 + 3 - 4 = 1$$

- Wir können auch feststellen, welche Teilmengen von $\{w_1, w_2, w_3, u_2, u_1\}$ eine Basis von $U + W$ bilden:
Wir formulieren zunächst allgemein:
Sei $A = (a_1, \dots, a_m) \in M(n \times m, \mathbb{R})$ und $\ker A =_{\mathbb{R}} \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ eine Basis des Kerns. Es ist also $\text{image } A =_{\mathbb{R}} \langle a_1, \dots, a_m \rangle$, $\dim \ker A = m - \text{rank } A$ und

$$\dim \text{image } A = \text{rank } A = m - k$$

Schreibe

$$W := (w_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k}} := (w_1, \dots, w_k)$$

Sei $I \subset \{1, \dots, m\}$ mit $|I| = \dim \text{image } A = m - k$. Es gilt dann:

$\{a_i \mid i \in I\}$ ist eine Basis von $\text{image } A$ genau dann wenn

$$\det (w_{i,j})_{\substack{i \in I^c \\ j=1, \dots, k}} \neq 0$$

Beweis:

OE können wir annehmen, daß $I = \{1, \dots, m-k\}$ und $I^c = \{m-k+1, \dots, m\}$.
Schreibe

$$W = \begin{pmatrix} W' \\ W'' \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ I^c \end{matrix}$$

Ist $\det W'' = 0$, dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, nicht alle 0, mit

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i w_i = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{m-k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =: \bar{w}$$

mit $\mu_1, \dots, \mu_{m-k} \in \mathbb{R}$, die nicht alle 0 sein können, da $w_1, \dots, w_k$ eine Basis von $\ker A$ bilden. Da außerdem $\bar{w} \in \ker A$, ist $\sum_{j=1}^{m-k} \mu_j a_j = 0$ d.h. $a_1, \dots, a_{m-k}$ sind linear abhängig.

Sind umgekehrt $a_1, \dots, a_{m-k}$ linear abhängig, dann gibt es $\mu_1, \dots, \mu_{m-k} \in \mathbb{R}$, nicht alle 0 mit $\sum_{j=1}^{m-k} \mu_j a_j = 0$, also ist

$$\bar{w} := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{m-k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A \text{ und } \bar{w} \neq 0$$

also gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit $\bar{w} = \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i$ und damit ist $\det W'' = 0$.

- In unserem Beispiel sind alle Einträge des Erzeugers von $\ker A$ ungleich 0, also ist jede 4-elementige Teilmenge von w_1, w_2, w_3, u_1, u_2 eine Basis von $U + W$.

5. Sei $T \subset Gl(n, \mathbb{R})$ die Teilmenge der Diagonalmatrizen von $Gl(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

- (a) T ist eine kommutative Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$.
- (b) Wenn $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $AD = DA$ für alle $D \in T$, dann ist A eine Diagonalmatrix, insbesondere T ist eine maximal große kommutative Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$.

Lösung:

- (a) Seien $D, F \in T$, also

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$D \cdot F = \begin{pmatrix} d_1 f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n f_n \end{pmatrix} = F \cdot D$$

Da $d_i \neq 0$ und $f_i \neq 0$ für alle i ist auch $d_i f_i \neq 0$ und damit $D \cdot F \in T$. Ebenso ist

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{-1} \end{pmatrix} \in T$$

und damit ist das Untergruppenkriterium erfüllt.

- (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und $D = (d_j)_{j=1,\dots,n}$. Dann ist

$$(A \cdot D)_{i,j} = a_{i,j} d_j$$

$$(D \cdot A)_{i,j} = a_{i,j} d_i$$

Für alle $i \neq j$ wählen wir eine Diagonalmatrix D mit $d_i \neq d_j$. Ist $A \cdot D = D \cdot A$, dann gilt

$$a_{i,j} \underbrace{(d_j - d_i)}_{\neq 0} = 0$$

also $a_{i,j} = 0$, also war A eine Diagonalmatrix.