PROF. DR. FRANK-OLAF SCHREYER
JANKO BOEHM

Mathematik für Informatiker I
Übungsblatt 14

Abgabetermin Montag 17.2.2003 vor der Vorlesung

1. Bestimmen Sie die $t \in \mathbb{R}$, sodaß folgendes lineares Gleichungssystem eine Lösung besitzt
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 - 2t + 1 \\ t^2 - t + 1 \\ t \end{pmatrix}$$
und bestimmen Sie die Lösungsmengen.

2. Berechnen Sie über $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7$ die Inverse von
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in M\left(4 \times 4, \mathbb{Z}/7\right)$$

3. Sei K ein Körper und G die Gruppe
$$G := Gl\left(n, K\right) \times Gl\left(m, K\right)$$
   (a) Zeigen Sie
$$\begin{array}{lcl} G \times M\left(n \times m, K\right) & \to & M\left(n \times m, K\right) \\ \left(\left(B, A\right), C\right) & \mapsto & BCA^{-1} \end{array}$$
   ist eine Gruppenoperation auf $M\left(n \times m, K\right)$.
   (b) Diese Operation hat genau $\min\left(n, m\right) + 1$ Bahnen.

4. Seien $a_1, ..., a_{d+1} \in \mathbb{R}$. Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^d \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^d \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{d+1} & a_{d+1}^2 & \cdots & a_{d+1}^d \end{pmatrix}$$
heißt Vandermondsche Matrix. Zeigen Sie
$$\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq d+1} \left(a_j - a_i\right)$$
Was hat diese Determinante mit Interpolation zu tun?

5. Sei $A \in M\left(3 \times 2, K\right)$ und $B \in M\left(2 \times 3, K\right)$ und $C = AB$. Zeigen Sie $\det C = 0$.