Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 14

Abgabetermin Montag 17.2.2003 vor der Vorlesung

1. Bestimmen Sie die $t \in \mathbb{R}$, sodaß folgendes lineares Gleichungssystem eine Lösung besitzt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2-2t+1 \\ t^2-t+1 \\ t \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie die Lösungsmengen.

Lösung:

Zeilenoperationen mit der erweiterten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & t^2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 & t^2-2t+1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & t^2-t+1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

$$II-2I, III+IV-4I: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & t^2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & -t^2-2t+1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2t^2-t+1 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & 4 & -4t^2+t \end{pmatrix}$$

$$(-1)\,II, III-2II, III+3II: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & t^2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & t^2+2t-1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & -5t+3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 & -t^2+7t-3 \end{pmatrix}$$

$$IV-III, \frac{1}{2}III: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & t^2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & t^2+2t-1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -\frac{5}{2}t+\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t^2+2t \end{pmatrix}$$

Wir sehen $\dim \operatorname{image} A = \operatorname{rank} A = 3$ und $\dim \ker A = 2$.

Notwendig und hinreichend für die Existenz einer nichttrivialen Lösung des inhomogenen Systems ist $-t^2+2t=0$, d.h. $t=0$ oder $t=2$. Wir führen dennoch die weiteren

Zeilentransformationen für allgemeines t durch:

$$II - III, I - 2III: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -3 & t^2+5t-3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & t^2+\frac{9}{2}t-\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -\frac{5}{2}t+\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t^2+2t \end{pmatrix}$$

$$I - II: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2}t-\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & t^2+\frac{9}{2}t-\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -\frac{5}{2}t+\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t^2+2t \end{pmatrix}$$

Den 2-dim Lösungsraum des homogenen Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können wir parametrisieren durch x_4 und x_5. Er ist also

$$N := \ker A = span \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Die gesuchten Lösungsräume des inhomogenen Systems können wir dann schreiben als

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + N \quad \text{für } t = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{21}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + N \quad \text{für } t = 2$$

wobei wir bei der Bestimmung der partikulären Lösungen $x_4 = x_5 = 0$ gewählt haben.

2. Berechnen Sie über $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7$ die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Z}/7)$$

Lösung:

Wir führen Zeilenoperationen mit der erweiterten Matrix durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$II - 2I, III - 3I: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$III + \overset{-\frac{5}{6}=}{5} II, IV + 5II: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$III \leftrightarrows IV: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{=\frac{1}{6}}{6} II, \overset{=\frac{1}{3}}{5} III, 5IV: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$III - 4IV, II - 2IV: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$II - 2III, I - 3III: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - 2II: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

also ist die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sei K ein Körper und G die Gruppe

$$G := Gl\,(n, K) \times Gl\,(m, K)$$

(a) Zeigen Sie

$$\begin{array}{lcl} G \times M\,(n \times m, K) & \to & M\,(n \times m, K) \\ ((B, A)\,, C) & \mapsto & (B, A) \cdot C = BCA^{-1} \end{array}$$

ist eine Gruppenoperation auf $M\,(n \times m, K)$.

(b) Diese Operation hat genau $\min\,(n, m) + 1$ Bahnen.

Lösung:

(a) Das neutrale Element in G ist $e = (E_n, E_m)$ und die Gruppenstruktur gegeben durch komponentenweise Multiplikation

$$(B_2, A_2) \circ (B_1, A_1) = (B_2 B_1, A_2 A_1)$$

Die gegebene Abbildung ist eine Gruppenoperation:

- Offenbar ist $E_n C E_m^{-1} = C$.
- Sind $(B_1, A_1)\,, (B_2, A_2) \in G$, dann gilt

$$\begin{aligned} (B_2, A_2) \cdot ((B_1, A_1) \cdot C) &= (B_2, A_2) \cdot B_1 C A_1^{-1} = B_2 B_1 C A_1^{-1} A_2^{-1} = \\ &= (B_2 B_1)\, C\, (A_2 A_1)^{-1} = (B_2 B_1, A_2 A_1) \cdot C \\ &= ((B_2, A_2) \circ (B_1, A_1)) \cdot C \end{aligned}$$

(b) Jede elementare Spaltentransformation ist Rechtsmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix, jeder elementare Zeilentransformation ist Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix. Durch elementare Zeilen und Spaltentransformationen läßt sich jede Matrix A auf die Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & 0 & & \end{pmatrix} \; k$$

bringen. Da sich durch elementare Zeilen- und Spaltentransformationen der Rang nicht ändert, ist die Normalform durch $k = \operatorname{rank} A$ eindeutig bestimmt, und jede Bahn enthält eine eindeutig bestimmte Normalform. Wir haben somit eine bijektive Abildung zwischen der $\min\,(n, m) + 1$ elementigen Menge der Normalformen und der Menge der Bahnen.

4. Seien $a_1, ..., a_{d+1} \in \mathbb{R}$. Die Matrix

$$A_{d+1}(a_1, ..., a_{d+1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^d \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^d \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{d+1} & a_{d+1}^2 & \cdots & a_{d+1}^d \end{pmatrix}$$

heißt Vandermondsche Matrix. Zeigen Sie

$$\det A_{d+1}(a_1, ..., a_{d+1}) = \prod_{1 \le i < j \le d+1} (a_j - a_i)$$

Was hat diese Determinante mit Interpolation zu tun?

Lösung:

Beweis mit Induktion nach der Dimension der Matrix:

Induktionsanfang 2×2: $\det A_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$.

Induktionsschritt $d \times d \mapsto (d+1) \times (d+1)$:

Wir ziehen in $A_{d+1}(a_1, ..., a_{d+1})$ von der j-ten Spalte das a_1-fache der $(j-1)$-ten Spalte ab, beginnend mit der letzten Spalte bis zur 2. Spalte. Dies ergibt:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2 a_1 & \cdots & a_2^d - a_2^{d-1} a_1 \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_3 a_1 & \cdots & a_3^d - a_3^{d-1} a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{d+1} - a_1 & a_{d+1}^2 - a_{d+1} a_1 & \cdots & a_{d+1}^d - a_{d+1}^{d-1} a_1 \end{pmatrix}$$

Nun ziehen wir von der 2. bis letzten Zeile die 1. Zeile ab:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2 a_1 & \cdots & a_2^d - a_2^{d-1} a_1 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_3 a_1 & \cdots & a_3^d - a_3^{d-1} a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{d+1} - a_1 & a_{d+1}^2 - a_{d+1} a_1 & \cdots & a_{d+1}^d - a_{d+1}^{d-1} a_1 \end{pmatrix}$$

Mit der Multilinearität der Determinante ziehen wir aus der j-ten Zeile $a_j - a_1$ heraus für $j = 2, ..., d+1$:

$$\det A_{d+1}(a_1, ..., a_{d+1}) = \det A'' = \prod_{j=2}^{d+1} (a_j - a_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_2^{d-1} \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & a_3^{d-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & a_{d+1} & \cdots & a_{d+1}^{d-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{d+1} (a_j - a_1) \cdot \det A_d(a_2, ..., a_{d+1})$$

$$= \prod_{j=2}^{d+1} (a_j - a_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le d+1} (a_j - a_i) = \prod_{1 \le i < j \le d+1} (a_j - a_i)$$

mit der Induktionsvoraussetzung.

Wollen wir für Stützstellen $a_1, ..., a_{d+1} \in \mathbb{R}$ und Stützwerte $f_1, ..., f_{d+1}$ ein Polynom $p = c_0 + c_1 x + ... + c_d x^d$ vom Grad d finden mit $p(a_i) = f_i \ \forall i = 1, ..., d+1$, d.h.

$$\sum_{j=0}^{d} c_j (a_i)^j = f_i \text{ für } i = 1, ..., d+1$$

dann ist dies äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^d \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^d \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{d+1} & a_{d+1}^2 & \cdots & a_{d+1}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{d+1} \end{pmatrix}$$

für die Koeffizienten von p. Dieses Gleichungssystem hat eine eindeutig bestimmte Lösung, d.h. es existiert ein eindeutig bestimmtes Interpolationspolynom, genau dann, wenn

$$0 \neq \det A = \prod_{1 \leq i < j \leq d+1} (a_j - a_i)$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Stützstellen paarweise verschieden sind.

5. Sei $A \in M(3 \times 2, K)$ und $B \in M(2 \times 3, K)$ und $C = AB$. Zeigen Sie $\det C = 0$.

   Lösung:

   Wir haben Vektorraumhomomorphismen

$$K^3 \xrightarrow{B} K^2 \xrightarrow{A} K^3$$

   Da $\dim \operatorname{image}(A) = \operatorname{rank} A \leq 2$ und $\operatorname{image}(AB) \subset \operatorname{image}(A)$, also ist auch $\operatorname{rank} C = \dim \operatorname{image}(AB) \leq 2$, also $\det C = 0$.