WS 02/03 Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Nachübungsblatt

Abgabe 10.4.2003 (Zi. 425-429, in Geb. 27.1)

1. Sei G die Automorphismengruppe des Würfels mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Zeigen Sie, daß man G als Untergruppe von $O(3)$ auffassen kann und geben Sie ein Element in jeder Konjugationsklasse C an:

C	$\lvert C\rvert$
id	1
Drehungen um Eckendiagonalen um $\pm 120°$	8
Drehungen um Kantenmittendiagonalenen um 180°	6
Drehungen um Seitenmittendiagonalen um 180°	3
Drehungen um Seitenmittendiagonalen um $\pm 90°$	6
Punktspiegelung = Drehspiegelung um 180°	1
Drehspiegelungen um $\pm 60°$ mit Eckendiagonalen als Eigenraum	8
Spiegelungen an einer Ebene durch 2 Kanten	6
Spiegelungen an den Koordinatenebenen	3
Drehspiegelungen um $\pm 90°$ mit Koordinatenachsen als Eigenräume	6

2. Zeigen Sie: Die Automorphismengruppe des Würfels G wird von der Drehung $\alpha = (2,3,5,4)$ um 90° und der Drehspiegelung $\beta = (1,5,3,6,2,4)$ um 60° erzeugt, und diese erfüllen die Relationen $\alpha^4 = 1$, $\beta^6 = 1$, $(\alpha\beta)^2 = e$, $(\alpha^{-1}\beta^2)^2 = e$. Dabei bezieht sich die Nummerierung $1, ..., 6$ auf die übliche Nummerierung der Seiten eines Spielwürfels.

3. Wenn Sie 1 und 2 gelöst haben:

   Rechnen Sie nach, daß die entsprechenden Matrizen, die Relationen erfüllen.

4. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in End\left(\mathbb{R}^3\right)$$

   Bestimmen Sie

   (a) das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ von A

   (b) die Eigenwerte und Eigenräume von A

   (c) die Jordansche Normalform von A.

5. Lösen Sie folgende Kongruenzen simultan:
$$x \equiv 205 \bmod 1984$$
$$x \equiv 360 \bmod 403$$

6. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{-n}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot 2^{-n}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n!}$$

7. Bestimmen Sie welche 3-elementigen Teilmengen der Spalten von

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

8. (a) Überprüfen Sie den Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix aus Aufgabe 4.
   (b) Beweisen Sie den Satz von Cayley-Hamilton für halbeinfache Endomorphismen.

9. Bestimmen Sie das asymptotische Wachstum von

$$y = \sqrt[3]{\ln x + \sqrt{x}}$$
$$y = x + e^{\sin x}$$
$$y = \sqrt{x + \sin e^x}$$

für $x \to \infty$.

10. Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}}$ in $x_0 = \frac{1}{2}$ bis zur Ordnung 5.

11. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine 4-mal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

mit $\xi \in \,]a,b[$ (Insbesondere werden nicht nur quadratische, sondern auch kubische Polynome durch die Faßregel exakt integriert).

12. Lösen Sie von Ihnen ausgewählte Aufgaben in Forster Analysis 1.

13. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$$
$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$
$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x\,(x+a)} - x$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

14. Berechnen Sie die Stammfunktionen von

$$f_1(x) = \sin(2x)\, e^{\sin x}$$
$$f_2(x) = \sin(\ln x)$$
$$f_3(x) = x\sqrt{1+x}$$
$$f_4(x) = \frac{2}{x^3+x^2+x+1}$$
$$f_5(x) = \frac{6}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$$

15. Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Was bedeuten folgende Eigenschaften und welche Implikationen gelten:

   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow n \geq N$
   (c) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
   (d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
   (e) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0 : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

16. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

   Für die Fibonaccizahlen $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ gilt:

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$$

17. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

18. Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem Wachstum für $x \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \sqrt{1+x^4} \\
f_2(x) &= x^3 \\
f_3(x) &= e^{x \ln x} \\
f_4(x) &= e^{1+\ln x} \\
f_5(x) &= e^{\frac{1}{x^2}} \\
f_6(x) &= \frac{x^{10}}{x^7-1} \\
f_7(x) &= xe^{-x} \\
f_8(x) &= \ln x
\end{aligned}
$$

19. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie

$$\ker A \subset \ker A^2$$

Zeigen Sie, daß nicht immer Gleichheit gilt.

20. Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass aus dem Gedächtnis.

21. Definieren Sie den Konvergenzradius einer Potenzreihe und geben Sie eine Formel für den Konvergenzradius an..

22. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\ln(1+x)) = (\ln(1+x))''$ in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$.