Mathematik für Informatiker I
Prof . Dr. Frank-Olaf Schreyer, Janko Böhm
Musterlösung Blatt 1

Aufgabe 1

Eine Logelei von Zweistein: Rezept zu einer Bratensosse:
a. Man nehme Thymian und dazu von Majoran und Salbei mindestens ein Gewürz.
b. Man nehme sowohl Salbei als auch Majoran.
c. Man nehme sowohl Oregano als auch Chilipulver.
d. Man nehme weder Salbei noch Thymian und von Oregano und Chilipulver allenfalls eines.
e. Man nehme weder Oregano noch Majoran.
f. Man nehme weder Chilipulver noch Salbei.
Dazu der Kommentar des Kochs:
"Wenn man jede einzelne dieser Vorschriften nicht befolgt, dann hat man das richtige Rezept."
Wie würzt er seine Bratensoße?
Lösung:
Wir verwenden die Buchstaben T, M, S, O, C für die Aussagen "nehme Thymian",..., "nehme Chili" und formulieren $a, ..., f$ und deren Negation in Aussagenlogik:

$$\begin{array}{lcllcl}
a & = & T \wedge (M \vee S) & \neg a & = & \neg T \vee (\neg M \wedge \neg S) \\
b & = & S \wedge M & \neg b & = & \neg S \vee \neg M \\
c & = & O \wedge C & \neg c & = & \neg O \vee \neg C \\
d & = & (\neg S \wedge \neg T) \wedge \neg (O \wedge C) & \neg d & = & (S \vee T) \vee (O \wedge C) \\
e & = & \neg O \wedge \neg M & \neg e & = & O \vee M \\
f & = & \neg C \wedge \neg S & \neg f & = & C \vee S
\end{array}$$

Wir müssen berechnen $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d \wedge \neg e \wedge \neg f =$

$$\begin{aligned}
&= (\neg T \vee (\neg M \wedge \neg S)) \wedge (\neg S \vee \neg M) \wedge \underline{(\neg O \vee \neg C) \wedge ((S \vee T) \vee (O \wedge C))} \wedge (O \vee M) \wedge (C \vee S) \\
&= \underline{(\neg T \vee (\neg M \wedge \neg S))} \wedge (\neg S \vee \neg M) \wedge \neg (O \wedge C) \wedge (S \vee T) \wedge (O \vee M) \wedge (C \vee S) \\
&= \underline{(\neg T \vee \neg M)} \wedge (\neg T \vee \neg S) \wedge \underline{(\neg S \vee \neg M)} \wedge \neg (O \wedge C) \wedge (S \vee T) \wedge (O \vee M) \wedge (C \vee S) \\
&= \underline{(\neg M \vee (\neg T \wedge \neg S))} \wedge (\neg T \vee \neg S) \wedge \neg (O \wedge C) \wedge \underline{(S \vee T)} \wedge (O \vee M) \wedge (C \vee S) \\
&= \underline{\neg M} \wedge (\neg T \vee \neg S) \wedge \neg (O \wedge C) \wedge (S \vee T) \wedge \underline{(O \vee M)} \wedge (C \vee S) \\
&= \neg M \wedge \underline{O} \wedge (\neg T \vee \neg S) \wedge \underline{(\neg O \vee \neg C)} \wedge (S \vee T) \wedge (C \vee S) \\
&= \neg M \wedge O \wedge \underline{\neg C} \wedge (\neg T \vee \neg S) \wedge (S \vee T) \wedge \underline{(C \vee S)} \\
&= \neg M \wedge O \wedge \neg C \wedge \underline{S} \wedge \underline{(\neg T \vee \neg S)} \wedge (S \vee T) \\
&= \neg M \wedge O \wedge \neg C \wedge \underline{S \wedge \neg T \wedge (S \vee T)} \\
&= \neg M \wedge O \wedge \neg C \wedge S \wedge \neg T
\end{aligned}$$

Der Koch verwendet also Oregano und Salbei, aber kein Majoran, kein Chili und kein Thymian.
Beachten Sie, daß sich die Lösung völlig mechanisch berechnen läßt.

Aufgabe 2

Seien folgende Aussagen gegeben:

α. $(A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg B$

β. $(\neg A \vee B) \Rightarrow \neg C$

γ. $\neg(\neg A) \Rightarrow \neg C \wedge \neg B$

$$\text{mit}\quad \begin{array}{l} A: \text{Der Herbst ist sonnig} \\ B: \text{Der Wein ist teuer} \\ C: \text{Der Ertrag ist gering} \end{array}$$

Übersetzen Sie α, β und γ jeweils eine umgangssprachliche Formulierung. Welche Aussagen machen Sinn?
Negieren Sie α, β und γ.
Formulieren Sie auch die Negation umgangssprachlich.
Lösung:
Umgangssprachliche Formulierungen:

α	Wenn der Herbst sonnig und der Ertrag hoch war, dann ist der Wein billig
β	Wenn der Herbst verregnet oder der Wein teuer ist, dann ist der Ertrag hoch
γ	Wenn der Herbst sonnig ist, dann ist der Ertrag hoch und der Wein billig

α macht Sinn, β ist Unsinn und γ ist auch nicht korrekt, denn der Ertrag könnte auch niedrig sein, obwohl der Herbst sonnig war.
Die Negationen:

$$\begin{aligned} \neg\alpha &= \neg((A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg B) \\ &= \neg(\neg(A \wedge \neg C) \vee \neg B) \\ &= A \wedge \neg C \wedge B \end{aligned}$$

Der Herbst ist sonnig, der Ertrag hoch und der Wein teuer.

$$\begin{aligned} \neg\beta &= \neg((\neg A \vee B) \Rightarrow \neg C) \\ &= \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg C) \\ &= (\neg A \vee B) \wedge C \end{aligned}$$

Der Ertrag ist gering, und wenn der Herbst sonnig war, ist der Wein teuer.

$$\begin{aligned} \neg\gamma &= \neg(A \Rightarrow \neg C \wedge \neg B) \\ &= \neg(\neg A \vee (\neg C \wedge \neg B)) \\ &= A \wedge (C \vee B) \end{aligned}$$

Der Herbst ist sonnig, und wenn der Ertrag hoch war, ist der Wein teuer.

Aufgabe 3

Seien die Zahlen $1, ..., 101$ in irgendeiner Reihenfolge gegeben. Zeigen Sie, daß 11 davon aufsteigend oder absteigend sortiert sind.
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Menge von Paaren und verwenden Sie das Schubfachprinzip.
Lösung:
Sei $a_1, ..., a_{101}$ die Folge der Zahlen von 1 bis 101 in irgendeiner Reihenfolge.
Wir müssen zeigen, $\exists\ i_1, ..., i_{11} \in \{1, ..., 101\}$ mit $i_1 < ... < i_{11}$, sodaß $a_{i_1} < ... < a_{i_{11}}$ oder $a_{i_1} > ... > a_{i_{11}}$ gilt.

- Seien

$$\begin{aligned} w(k) &:= \text{die maximale Länge einer wachsenden Unterfolge, die mit } a_k \text{ beginnt} \\ f(k) &:= \text{die maximale Länge einer fallenden Unterfolge, die mit } a_k \text{ beginnt} \end{aligned}$$

  Wir definieren die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \{1, ..., 101\} & \to & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ & k & \mapsto & (w(k), f(k)) \end{array}$$

- φ ist injektiv, denn ist $k \neq l$, also OE $k < l$ und

$$\begin{aligned} a_k < a_l &\text{ dann ist } w(k) \geq w(l) + 1 \\ a_k > a_l &\text{ dann ist } f(k) \geq f(l) + 1 \end{aligned}$$

  also in beiden Fällen $\varphi(k) \neq \varphi(l)$

- Angenommen es gibt keine 11 Zahlen $i_1, ..., i_{11} \in \{1, ..., 101\}$ mit $i_1 < ... < i_{11}$, sodaß $a_{i_1} < ... < a_{i_{11}}$ oder $a_{i_1} > ... > a_{i_{11}}$, dann wäre

$$\varphi(k) \in \{1, ..., 10\} \times \{1, ..., 10\}\ \ \forall k = 1, ..., 101$$

  Da φ injektiv ist, folgt

$$101 \leq |\{1, ..., 10\} \times \{1, ..., 10\}| = 100$$

  ein Widerspruch.

Aufgabe 4

a. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Lösung:

Wir zeigen für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ die Aussage

$$A\,(n): \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsanfang $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

also $A\,(1)$ stimmt.

Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$*:*

Unter Verwendung der Aussage $A\,(n-1)$, die nach Induktionsvoraussetzung gilt, haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 &= \\
&\stackrel{A(n-1)}{=} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} + n^2 \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

b. Stellen Sie eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

auf und beweisen Sie diese.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} & \text{also Grad 2 in } n \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{also Grad 3 in } n \end{array}$$

Wir nehmen also an, daß die gesuchte Formel Grad 4 in n hat und setzen an

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e$$

Es gilt die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} n^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \\ &= \left(a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e\right) \\ &- \left(a \cdot (n-1)^4 + b \cdot (n-1)^3 + c \cdot (n-1)^2 + d \cdot (n-1) + e\right) \\ &= 4an^3 + (3b - 6a)\, n^2 + (-3b + 4a + 2c)\, n - c + d + b - a \end{aligned}$$

also

$$(4a - 1)\, n^3 + (3b - 6a)\, n^2 + (-3b + 4a + 2c)\, n + (-c + d + b - a) = 0$$

Da diese Formel für alle n gelten muß, verschwinden die Koeffizienten vor jeder n-Potenz, also

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} \\ b &= 2a = \frac{1}{2} \\ c &= \frac{1}{2}(3b - 4a) = \frac{1}{4} \\ d &= c - b + a = 0 \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun noch e aus der Formel für $n = 1$:

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = a + b + c + d + e = 1 + e$$

also $e = 0$. Damit haben wir

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

Wir zeigen diese Formel nochmals mit vollständiger Induktion:

Zu zeigen ist die Aussage

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Induktionsanfang $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1 \cdot 4}{4}$$

also gilt $A(1)$.

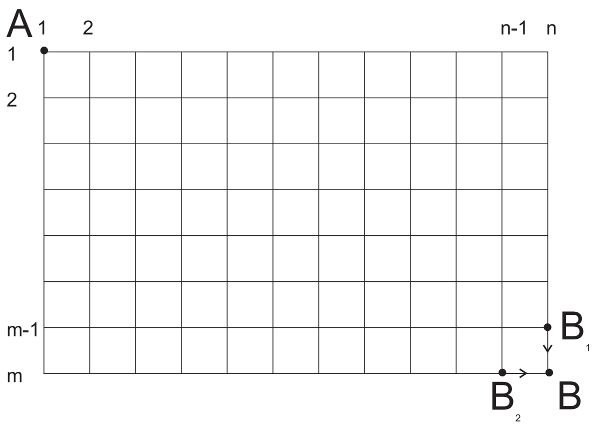
Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$*:*

Unter Verwendung der Aussage $A(n-1)$, die nach Induktionsvoraussetzung gilt, haben wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3 &= \\ &\overset{A(n-1)}{=} \frac{n^2(n-1)^2}{4} + n^3 \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

Aufgabe 5

In einem amerikanischen Stadtplan mit n Avenues und m Streets wollen Sie von Punkt A nach Punkt B gehen. Wieviele kürzeste Wege gibt es?
Beweisen Sie die Formel mit vollständiger Induktion.
Lösung:



Sei $\alpha(n,m)$ die Anzahl der kürzesten Wege von A nach B und $l(n,m)$ deren Länge.
Wir zeigen mit vollständiger Induktion für alle $s \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ die Aussage

$$\begin{aligned} A(s): \quad & \forall n,m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ mit } n+m=s \text{ gilt:} \\ & \alpha(n,m) = \tbinom{n+m-2}{n-1} \\ & l(n,m) = n+m-2 \end{aligned}$$

Induktionsanfang $s=2$:
Es gibt genau 1 kürzesten Weg. Dieser hat die Länge 0, also gilt $A(2)$.
Induktionsschritt $s-1 \mapsto s$:
$\forall n,m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $n+m=s$ gilt:
Jeder Weg von A nach B geht entweder durch den Punkt $B_1 = (m-1,n)$ oder durch den Punkt $B_2 = (m,n-1)$. Unter Verwendung der Aussage $A(s-1)$, die nach Induktionsvoraussetzung gilt, haben wir

$$l(n-1,m) \overset{A(s-1)}{=} n+m-3 \overset{A(s-1)}{=} l(n,m-1)$$

Damit sind die kürzesten Wege von A nach B_1 und von A nach B_2 gleich lang.
Die Menge der kürzesten Wege von A nach B ist also gleich

der Menge die kürzesten Wege von A nach B_1 verlängert um den Weg von B_1 nach B

vereinigt mit

der Menge der kürzesten Wege von A nach B_2 verlängert um den Weg von B_2 nach B

Da diese Vereinigung disjunkt ist, folgt

$$\begin{aligned}
\alpha\left(n,m\right) &= \alpha\left(n-1,m\right)+\alpha\left(n,m-1\right)\\
&\overset{A(s-1)}{=} \binom{n+m-3}{m-1}+\binom{n+m-3}{n-1}\\
&= \binom{n+m-3}{m-1}+\binom{n+m-3}{m-2}\\
&= \binom{n+m-2}{m-1}
\end{aligned}$$

Für die Länge gilt

$$l\left(n,m\right)=l\left(n-1,m\right)+1\overset{A(s-1)}{=}n+m-3+1=n+m-2$$