**Mathematatik für Informatiker I**

Prof . Dr. F.-O. Schreyer

**Übungsblatt 2**

**Abgabetermin Montag 11.11.2002 vor der Vorlesung**

1. $\mathbb{Q}[x]$ bezeichne die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten.

   Sei
   $$p(x) := a_d x^d + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$$
   ein Polynom vom Grad $d$, welches für große $n \in \mathbb{Z}$ ganzzahlige Werte annimmt, d.h. $\exists n_0$, sodaß gilt $p(n) \in \mathbb{Z}\ \forall n \geq n_0$.

   Zeigen Sie $\exists\ \alpha_0, ..., \alpha_d \in \mathbb{Z}$, sodaß
   $$p(x) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \binom{x+k}{k}$$
   Dabei sei
   $$\binom{x+k}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{x+j}{j} \in \mathbb{Q}[x]$$
   Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach $d$ und das Differenzenpolynom $\triangle p \in \mathbb{Q}[x]$ definiert für $p \in \mathbb{Q}[x]$ durch
   $$\triangle p(x) := p(x) - p(x-1)$$

2. Äquivalenzrelationen:

   (a) Wir definieren die folgende Äquivalenzrelation auf $M := \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ durch $(a, b) \sim (c, d)$ genau dann, wenn $a + d = b + c$.

      1. Zeigen Sie, daß dies eine Äquivalenzrelation auf $M$ ist.
      2. Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen $[(1, 1)]$ und $[(3, 1)]$.
      3. Definieren Sie die Addition von Äquivalenzklassen durch
         $$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$
         Zeigen Sie, daß diese Addition wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von den gewählten Repräsentanten der Äquivalenzklassen ist.
      4. Zeigen Sie $[(a, b)] + [(2, 2)] = [(a, b)]$ und $[(2, 5)] + [(7, 5)] = [(1, 2)]$
      5. Kennen Sie die Menge der Äquivalenzklassen $M/\sim$ unter anderem Namen?

(b) Betrachte Sie die Menge $M := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, d.h. die Menge aller Punkte der reellen Ebene ohne den 0-Punkt.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $M \times M$ durch $(x,y) \sim (x',y')$ genau dann, wenn es eine Gerade durch den Nullpunkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ gibt, auf der sowohl der Punkt $(x,y)$ als auch der Punkt $(x',y')$ liegen.

1. Zeigen Sie, daß dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.
2. Finden Sie eine geometrische Darstellung der Menge der Äquivalenzklassen $M/\sim$ indem Sie in jeder Äquivalenzklasse einen geeigneten Repräsentanten wählen.

3. Sei $M$ eine **unendliche** Menge. Zeigen Sie:

(a) Es gibt keine surjektive Abbildung $\varphi : M \to 2^M$.

(b) Es gibt keine injektive Abbildung $\psi : 2^M \to M$.

4. Lösen Sie folgende simultane Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \bmod 6 \\ x &\equiv 8 \bmod 15 \\ x &\equiv 3 \bmod 10 \end{aligned}$$

5. (a) Programmieren Sie in Maple eine Funktion $ggT$, die für zwei ganze Zahlen $a, b$ eine Darstellung

$$ggT\,(a,b) = u \cdot a + v \cdot b$$

mit $u, v \in \mathbb{Z}$ berechnet und die Liste $[ggT\,(a,b)\,, u, v]$ zurückgibt.

Bem.: Verwenden Sie proc zur Definition einer Prozedur und iquo zur Division mit Rest. Vergleichen Sie an Beispielen ihre Funktion mit der eingebauten Maple-Prozedur igcdex.

(b) Scheiben Sie eine Maple-Funktion, die den $ggT\,(L)$ für eine Liste von ganzen Zahlen $L = [a_1, ..., a_k]$ bestimmt.

(Abgabe bitte als Ausdruck mit einer Beispielrechnung).