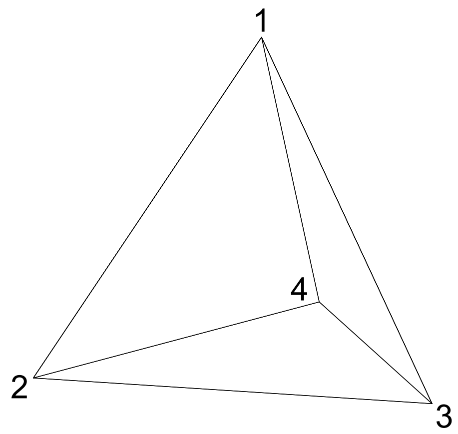
Mathematatik für Informatiker I
Prof . Dr. F.-O. Schreyer, Janko Böhm
Musterlösung Übungsblatt 3

Abgabetermin Montag 18.11.2002 vor der Vorlesung

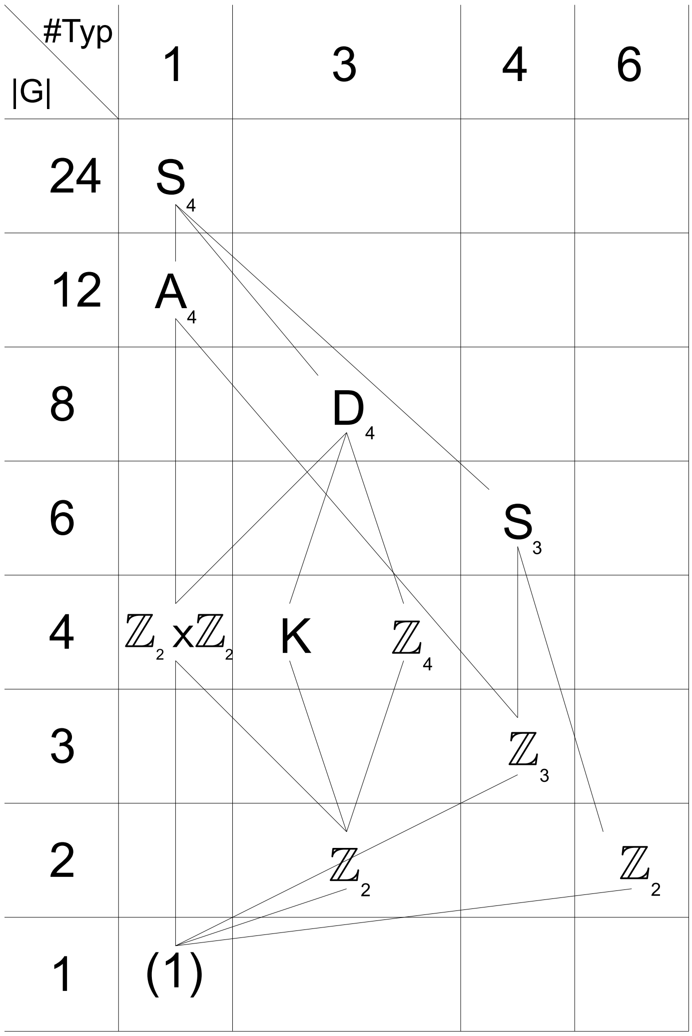
1. Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen der S_4 mit Hilfe des Tetraeders (Typ der Untergruppe und die Anzahl der Untergruppen der gleichen Art)



Lösung:

Aufgrund der Gruppenordnung $24 = 2^3 \cdot 3$ kann die S_4 Untergruppen der Ordnung $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ haben. Tatsächlich hat die S_4 folgende Typen von Untergruppen (Wir geben zu jedem Typ einen Repräsentanten an, dessen Elemente und (i.A. nicht eindeutige) Erzeuger):

$\|G\|$	Bez.	Typ gegeben durch Repräsentant G	Erzeuger	Anz.
24	S_4	S_4	$(1,2),(1,2,3,4)$	1
12	A_4	A_4	$(1,2)(3,4),(2,3,4)$	1
8	D_4	$\{id,(3,4),(1,2),(1,4)(2,3),(1,3)(2,4),$ $(1,3,2,4),(1,2)(3,4),(1,4,2,3)\}$	$(3,4),(1,3,2,4)$	3
6	S_3	$\{id,(2,3),(3,4),(2,4),(2,3,4),(2,4,3)\}$	$(3,4),(2,3,4)$	4
4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{id,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$	$(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)$	1
4	K	$\{id,(1,2),(3,4),(1,2)(3,4)\}$	$(1,2),(3,4)$	3
4	$\mathbb{Z}_4$	$\{id,(1,3,2,4),(1,2)(3,4),(1,4,2,3)\}$	$(1,3,2,4)$	3
3	$\mathbb{Z}_3$	$\{id,(2,3,4),(2,4,3)\}$	$(2,3,4)$	4
2	$\mathbb{Z}_2$	$\{id,(3,4)\}$	$(3,4)$	6
2	$\mathbb{Z}_2$	$\{id,(1,2)(3,4)\}$	$(1,2)(3,4)$	3
1		$\{id\}$	id	1

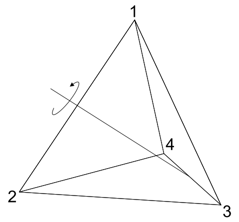


Dabei bemerken wir:

- A_4 ist die Untergruppe der Drehungen
- $D_4 \cong Stab\,(L)$ für die Operation von S_4 auf der Menge der Kantenmittendiagonalen und L ein Element dieser Menge. Da der Tetraeder 3 Kantenmittendiagonalen hat, gibt es 3 Untergruppen vom Typ D_4.
- $S_3 \cong Stab\,(Ecke)$. Da der Tetraeder 4 Ecken hat, gibt es 4 Untergruppen vom Typ S_3.
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = A_4 \cap D_4$ (also 3 Untergruppen von diesem Typ)
- $K = \bigcap_{x \in L} Stab\,(x)$ für eine Kantenmittendiagonale L (also 3 Untergruppen von diesem Typ). Es gilt $K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- Für die $\mathbb{Z}_3$ der Drehungen um 120° bzw. 240° gilt $\mathbb{Z}_3 = S_3 \cap A_4$

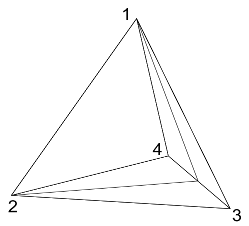
Wir kennen schon alle zyklischen Untergruppen von der Interpretation der S_4 als Symmetriegruppe des Tetraeders:

(a) Die 3 Drehungen um 180° um Kantenmittendiagonalen, z.B. $(1,2)\,(3,4)$



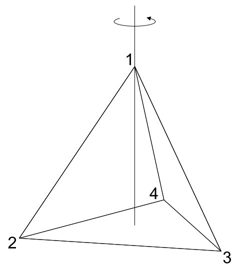
erzeugen 3 zyklische Untergruppen der Ordnung 2.

(b) Die 6 Spiegelungen z.B. $(3,4)$



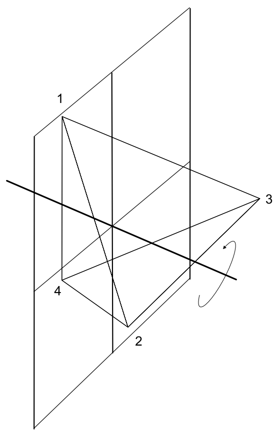
erzeugen 6 zyklische Untergruppen der Ordnung 2.

(c) Die 8 Drehungen um 120° bzw. 240° z.B. $(2,3,4)$



erzeugen 4 zyklische Untergruppen der Ordnung 3, die den 4 Drehachsen entsprechen.

(d) Die 6 Drehspiegelungen um 90° bzw. 270° z.B. $(1,2,3,4)$



erzeugen 3 zyklische Untergruppen der Ordnung 4, die jeweils eine der 3 Drehungen aus (a) enthalten.

Wir zeigen nun, daß die Tabelle vollständig ist:

Beh. 1 Sind α, β 3-Zykel und $\beta \notin \langle\alpha\rangle$ (d.h. α, β Drehungen um 120° oder 240° um verschiedene Achsen) dann ist $\langle\alpha, \beta\rangle = A_4$.

Ist α ein 3-Zykel und β ein $(2,2)$-Zykel (d.h. α Drehung um 120° oder 240° und β Drehung um 180°), dann ist $\langle\alpha, \beta\rangle = A_4$.

$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ (die Gruppe der Drehungen um 180°) ist die einzige nichtzyklische echte Untergruppe der A_4.

Beh. 2 Ist α ein 3-Zykel und $\langle\alpha\rangle \subset G$ (d.h. G enthält eine Drehung um 120° oder 240°) und $G \not\subset A_4$, dann ist $G \cong S_3$ oder $G \cong S_4$.

Beh. 3 Ist $|G| = 4$ und G enthält eine Transposition (Spiegelung), dann ist $G \cong K$.

Ist $|G| = 8$, dann ist $G \cong D_4$.

Satz Die obige Tabelle ist vollständig.

Bew. Satz:

Die Tabelle enthält alle zyklischen Untergruppen der S_4.

Die Tabelle enthält alle nichtzyklischen Untergruppen der S_4, denn:

Beh. 1 gibt die nichtzyklischen Untergruppen der A_4.

Beh. 2 gibt alle anderen nichtzyklischen Untergruppen, deren Ordnung durch 3 teilbar ist.

Beh. 3 gibt die nichtzyklischen Untergruppen, deren Ordnung eine 2er-Potenz ist.

Bew. Beh. 1:

- Wegen $sign\,(\alpha) = 1$ und $sign\,(\beta) = 1$ haben wir $\langle\alpha, \beta\rangle \subset A_4$. Wegen $\beta \notin \langle\alpha\rangle$ sind die 3 Nebenklassen $\langle\alpha\rangle$, $\beta\langle\alpha\rangle$, $\beta^2\langle\alpha\rangle$ disjunkt, also $|\langle\alpha, \beta\rangle| \geq 9$. Es muß also schon $\langle\alpha, \beta\rangle = A_4$ gelten.
- OE können wir annehmen, daß $\alpha = (1,2,3)$ und $\beta = (1,2)(3,4)$. $\delta := \beta\alpha\beta = (1,4,2)$ ist dann vom Typ (3) und $\langle\alpha\rangle \cap \langle\delta\rangle = \{id\}$. Wir können nun den 1. Teilaussage auf α und δ anwenden.

Bew. Beh. 2:

OE gehe die Drehachse von α durch die Ecke 1 und $\alpha = (1,2,3)$.

- Stabilisieren alle Elemente von G die Ecke 1, dann ist $G \cong S_3$.
- Anderenfalls $\exists \beta \in G$, $\beta \notin Stab\,(1)$. Wegen
$$\beta Stab\,(x)\,\beta^{-1} = Stab\,(\beta\,(x))$$
ist $\delta := \beta\alpha\beta^{-1} \in Stab\,(\beta\,(1))$. Wir wenden nun auf β und δ Beh. 1 an und bekommen $A_4 = \langle\beta, \delta\rangle \subset G$. Wegen $G \not\subset A_4$ gilt also schon $G = S_4$.

Bew. Beh. 3:

- OE können wir schreiben $G = \{id, (1,2), \alpha, \beta\}$. Wegen $|G| = 4$ ist $|\alpha| = |\beta| = 2$ (denn keine zyklische Untergruppe der Ordnung 4 enthält $(1,2)$). Es sind $(1,3), (1,4), (2,3), (2,4) \notin G$, denn z.B. $(1,2)(1,3) = (1,3,2)$. Außerdem $(1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \notin G$, denn z.B. $(1,3)(2,4)(1,2) = (1,4,2,3)$. Damit ist $G = \{id, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4)\}$.
- G enthält höchstens 2 Transpositionen, denn anderenfalls einen 3-Zykel, also muß G wegen $|G| = 8$ einen 4-Zykel α (OE $(1,3,2,4)$) enthalten (sonst hätte G mit den $(2,2)$-Zykeln maximal $1+2+3 < 8$ Elemente), also enthält G

  $$id, (1,3,2,4), (1,4,2,3), (1,2)(3,4)$$

  Angenommen G enthält einen weiteren 4-Zykel β mit $\beta \notin \langle\alpha\rangle$ (d.h. eine weitere Drehspiegelung um einen andere Achse), dann enthält G einen 3-Zykel. Widerspruch.

  Damit muß G eine Transposition enthalten (sonst hätte G maximal $1+3+2 < 8$ Elemente). Es kommen nur $(1,2)$ oder $(3,4)$ in Frage sonst hätten wir wieder einen 3-Zykel. Damit liegen aber auch $(1,4)(2,3) = (1,3,2,4)(1,2)$ und ebenso $(1,3)(2,4)$ in G.

  Insgesamt hat also G die Elemente

  $$id, (1,2), (3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,3,2,4), (1,4,2,3), (1,2)(3,4)$$

  und damit $G = D_4$.

2. Zeigen Sie:

   Ist G eine Gruppe der Ordnung $p^l \cdot m$, wobei p eine Primzahl ist, die nicht m teilt, und $l \geq 1$, dann hat G eine Untergruppe der Ordnung p^l.

   Lösung:

   (a) Wir zeigen zunächst:
   Ist $n = p^l \cdot m$ mit $l \geq 1$ und $p \not| m$, dann gilt $p \not| \binom{n}{p^l}$.
   Beweis:
   Wir schreiben

$$\binom{n}{p^l} = \prod_{j=0}^{p^l-1} \left(\frac{n-j}{p^l-j} \right)$$

   und in jedem Faktor $j = p^a \cdot k$ mit $p \not| k$. Da $j < p^l$ gilt $a < l$ und somit

$$p^a | \, (n-j) \quad \text{und } p^a | \, \left(p^l - j\right)$$

   aber $p^{a+1} \not| (n-j)$ denn sonst $p|k$.

   (b) G operiert auf 2^G durch Linksmultiplikation:

$$\begin{array}{ccc} G \times 2^G & \to & 2^G \\ (g, U) & \mapsto & gU \end{array}$$

   Für jedes $U \in 2^G$ gilt $|Stab\,(U)| \mid |U|$.
   Beweis:
   Wir haben eine Zerlegung in Bahnen

$$U = \bigcup_{j=1}^{t} Stab\,(U) \cdot g_j$$

   also

$$|U| = \sum_{j=1}^{t} |Stab\,(U) \cdot g_j|$$

   Die Bahnen $Stab\,(U) \cdot g_j$ sind Rechtsnebenklassen, also alle gleichmächtig mit $|Stab\,(U)|$ Elementen, also $|U| = |Stab\,(U)| \cdot t$.

   (c) Sei nun

$$X := \left\{ M \in 2^G \mid |M| = p^l \right\}$$

   Die Operation von G auf 2^G schränkt sich auf X ein. Wir zerlegen X bezüglich der Operation von G in Bahnen $B_1, ..., B_r$ und haben

$$|X| = \sum_{j=1}^{r} |B_j|$$

   Da $|X| = \binom{n}{p^l}$ liefert (a.), daß $p \not| |X|$ und somit muß es ein j_0 geben mit $p \not| |B_{j_0}|$.

Sei nun $U \in B_{j_0}$ ein Element der Bahn B_{j_0}, also $|U| = p^l$. Nach $(b.)$ gilt

$$|Stab\,(U)| \mid |U| = p^l$$

Die Bahnenformel liefert

$$p^l m = |G| = |Stab\,(U)| \cdot |B_{j_0}|$$

Da $p \not| |B_{j_0}|$ muss schon

$$|Stab\,(U)| = p^l$$

gelten und $Stab\,(U)$ ist die gesuchte Untergruppe.

3. Zeigen Sie:
Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \geq 1$ und $ggT\,(a, b) = 1$. Dann gilt

$$\mathbb{Z}/\,(a \cdot b) \cong \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$$

Lösung:
Wir zeigen, daß die natürliche Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{Z}/\,(a \cdot b) & \to & \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b \\ & x & \mapsto & (x \bmod a, x \bmod b) \end{array}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

- Φ ist ein Gruppenhomomorphismus denn

$$\begin{aligned} \Phi\,(x_1 + x_2) &= ((x_1 + x_2) \bmod a, (x_1 + x_2) \bmod b) \\ &= (x_1 \bmod a, x_1 \bmod b) + (x_2 \bmod a, x_2 \bmod b) \\ &= \Phi\,(x_1) + \Phi\,(x_2) \end{aligned}$$

- Φ ist bijektiv:
Sei $(\overline{n}, \overline{m}) \in \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$. Der Chinesische Restsatz sagt, daß die simultanen Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv n \bmod a \\ x &\equiv m \bmod b \end{aligned}$$

modulo $a \cdot b$ genau 1 Lösung haben.

4. Sei

$$G_n := \left\langle s_1, ..., s_{n-1} \mid s_i^2 = e,\ s_i s_j = s_j s_i \text{ falls } |i-j| \geq 2,\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \forall i, j \right\rangle$$

Zeigen Sie

$$G_n \cong S_n$$

Lösung:

Wir zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & G_n & \rightarrow & S_n \\ & s_i & \mapsto & (i, i+1) \end{array}$$

ein Gruppenisomorphismus ist:

- f ist wohldefiniert und setzt sich zu einem Gruppenhomomorphismus fort, da die Transpositionen $(i, i+1)$ die Relationen in G_n erfüllen.
- f ist surjektiv, denn $S_n = \langle (1,2), ..., (n-1, n) \rangle$, da es genügt benachbarte Elemente zu vertauschen, um alle Permutationen zu erreichen.
- Für die Injektivität, zeigen wir $|G_n| \leq n!$, indem wir Normalformen zählen:

Idee für die Normalform:

Sei $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(x) = n$. Also können wir n um $t = n - x$ Positionen nach links bewegen vermöge

$$(n-1, n) \cdot ... \cdot (x, x+1) = (n, n-1, ..., x) = (n, n-1, ..., n-t)$$

Dann ist

$$\sigma = \sigma' \cdot \prod_{i=1}^{t} (n-i, n-i+1) \text{ mit } \sigma' \in S_{n-1}$$

Wir zeigen die entsprechende Aussage in G:

Sei $G_{n-1} \rightarrow G_n$ der Gruppenhomomorphismus, dessen Bild die von $s_1, ..., s_{n-2}$ erzeugte Untergruppe ist und sei G'_{n-1} dieses Bild. Zunächst zeigen wir mit vollständiger Induktion nach n die Aussage

$A(n)$: Jedes Element $g \in G_n$ hat eine Darstellung der Form

$$g = g' \cdot \textstyle\prod_{j=1}^{t} s_{n-j} \quad \text{mit } g' \in G'_{n-1} \text{ und } t \in \{0, ..., n-1\} \qquad (*)$$

Dabei ist definiert $\prod_{j=1}^{k} s_{n-j} := s_{n-1} \cdot ... \cdot s_{n-k}$ und $\prod_{j=1}^{0} s_{n-j} := e$.

Der *Induktionsanfang* $n = 2$ ist klar.

Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$:

Sei $g \in G_n$. Ist $g \in G'_{n-1}$, dann setzen wir $g' := g$. Ist $g \notin G'_{n-1}$, dann zeigen wir zunächst mit Induktion nach der Anzahl k des Auftretens von s_{n-1} in g die Aussage

$B(k)$: g hat eine Darstellung der Form

$$g = u \cdot s_{n-1} \cdot v \text{ mit } u, v \in G'_{n-1}$$

Induktionsanfang $k = 1$ ist o.k.

Induktionsschritt $k - 1 \mapsto k$:

g enthält $k \geq 2$ mal s_{n-1}, also können wir schreiben $g = a \cdot s_{n-1} \cdot b \cdot s_{n-1} \cdot c$ mit $a, b \in G'_{n-1}$ und $c \in G_n$ und bekommen durch Anwenden von $A(n-1)$ auf ein Urbild von b mit einem $g'' \in G'_{n-2}$ für $t \geq 1$

$$\begin{aligned} g &= a \cdot s_{n-1} \cdot \left(g'' \cdot \prod_{j=1}^{t} s_{n-1-j} \right) \cdot s_{n-1} \cdot c \\ &= (a \cdot g'') \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot \left(\prod_{j=2}^{t} s_{n-1-j} \cdot c \right) \\ &= (a \cdot g'') \cdot s_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2} \cdot \left(\prod_{j=2}^{t} s_{n-1-j} \cdot c \right) \end{aligned}$$

wobei wir im 2. Schritt die Relationen $s_i s_j = s_j s_i$ falls $|i - j| \geq 2$ und im 3. Schritt die Relation $s_{n-1} \cdot s_{n-2} \cdot s_{n-1} = s_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_{n-2}$ verwendet haben. Diese Darstellung enthält ein s_{n-1} weniger als die ursprüngliche, sodaß wir die Induktionsvoraussetzung $B(k-1)$ anwenden können. Für $t = 0$ können wir wegen $s_{n-1}^2 = e$ auch die Induktionsvoraussetzung $B(k-1)$ anwenden.

Wir haben also nun eine Darstellung $g = u \cdot s_{n-1} \cdot v$ mit $u, v \in G'_{n-1}$. Anwendung der Induktionsvoraussetzung $A(n-1)$ auf v liefert mit einem $g'' \in G'_{n-2}$ und $t' \in \{0, ..., n-2\}$

$$g = u \cdot s_{n-1} \cdot v = u \cdot s_{n-1} \cdot \left(g'' \cdot \prod_{j=1}^{t'} s_{n-1-j} \right) = \underbrace{u \cdot g''}_{=:g'} \cdot \prod_{j=1}^{t+1} s_{n-j}$$

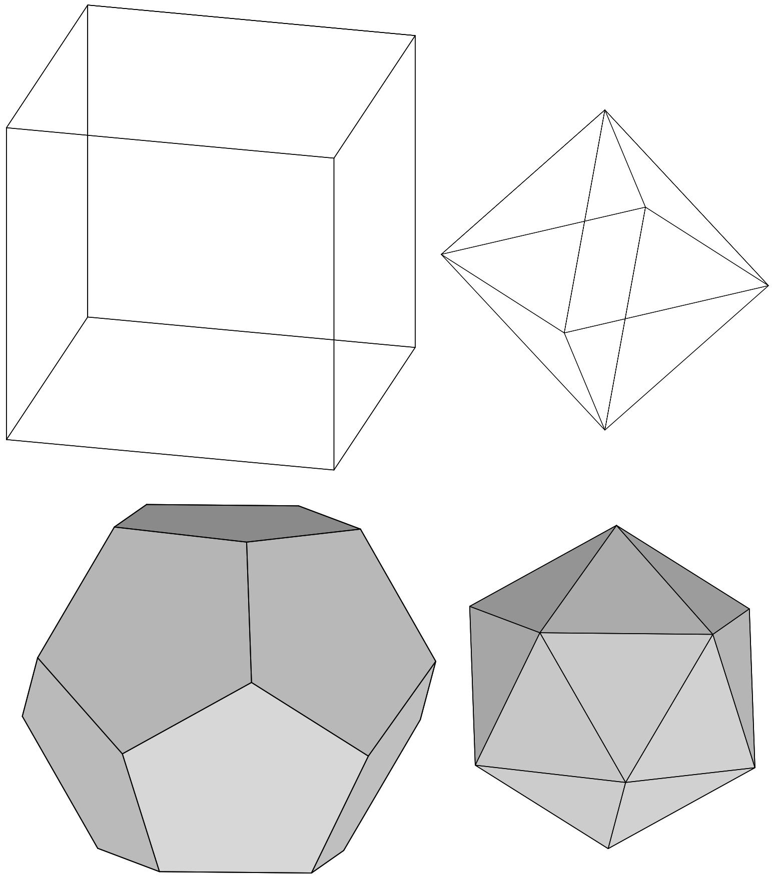
wobei wir im letzten Schritt wieder die Relationen $s_i s_j = s_j s_i$ für $|i - j| \geq 2$ verwendet haben.

Schließlich zeigen wir mit Induktion nach n, daß $|G_n| \leq n!$ ist:

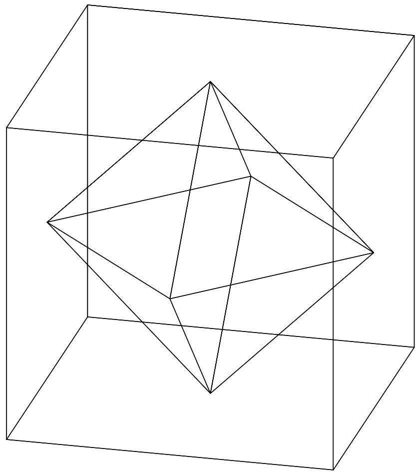
Induktionsanfang $n = 2$: $|G_2| = 2$.

Induktionssschritt $n-1 \mapsto n$: In der Darstellung $(*)$ haben wir nach Induktionsvoraussetzung höchstens $(n-1)!$ Möglichkeiten für g' und n Möglichkeiten in dem Produkt.

5. Bestimmen Sie die Symmetriegruppen W, O, D und I von Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder:

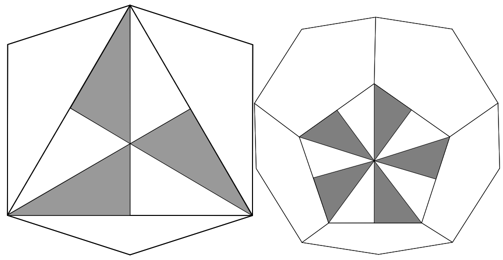


Hinweise:
- Ermitteln Sie zunächst die Gruppenordnung.
- Beachten Sie:



und so weiter.

Lösung:
Wir bestimmen zunächst die Gruppenordnung von O bzw. D:
Dazu zerlegen wir alle Seiten des Oktaeders (bzw. Dodekaeders) wie folgt in Dreiecke:

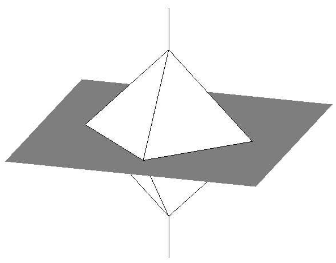


Die Bahn jedes Punktes p im Inneren eines Dreiecks besteht aus $8\cdot 6$ bzw. $12\cdot 10$ Punkten. Andererseits ist der Stabilisator von p trivial, denn mit p ist die nächstliegende Ecke, Kantenmitte und Seitenmitte bestimmt und damit die Lage des Platonischen Körpers. Die Bahnenformel liefert dann

$$|G| = |G\cdot p| = \left\{ \begin{array}{ll} 48 & \text{für den Oktaeder} \\ 120 & \text{für den Dodekaeder} \end{array} \right\}$$

Wir konstruieren nun jeweils Gruppenordnung viele verschiedene Elemente von O bzw. D. Dazu betrachten wir die Eckendiagonalen, Kantenmittendiagonalen und Seitenmittendiagonalen. Zu jeder dieser Achsen A haben wir genau eine dazu senkrechte Mittenebene S. Wir zählen nun die Drehungen um A und die Drehspiegelungen bzgl. A und S. Drehspiegelungen um 0° sind Spiegelungen.

- Für den Oktaeder haben wir:
  - Die Identität id
  - Die Punktsymmetrie am Ursprung.
  - Eckendiagonalen:

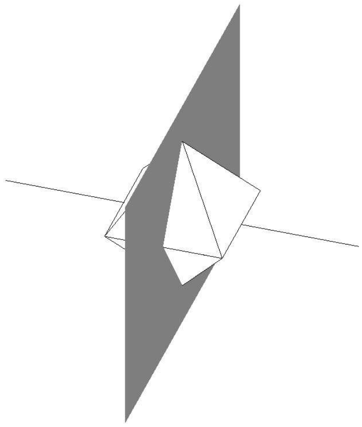


Der Oktaeder hat 6 Ecken, also 3 Eckendiagonalen. Um diese haben wir jeweils nichttriviale Drehungen um 90°, 180° und 270°. Drehspiegelungen haben wir um 0°, 90°, 180° und 270°.

Die Drehspiegelungen um 180° sind alle identsch zur Punktsymmetrie am Ursprung.

Damit bekommen wir $3\cdot 3$ Drehungen (90°, 180°, 270°) und $3\cdot 3$ Drehspiegelungen (0°, 90°, 270°).

- Kantenmittendiagonalen:

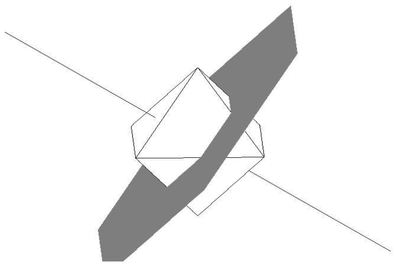


  Der Oktaeder hat 12 Kanten, also 6 Kantenmittendiagonalen. Um diese haben wir nichttriviale Drehungen um 180° und Drehspiegelungen um 0° und 180°.

  Die Drehspiegelungen um 180° sind wieder alle identisch zu der Punktsymmetrie.

  Damit bekommen wir 6 Drehungen (180°) und 6 Drehspiegelungen (0°).

- Seitenmittendiagonalen:



  Der Oktaeder hat 8 Seiten, also 4 Seitenmittendiagonalen. Um diese haben wir nichttriviale Drehungen um 120° und 240° und Drehspieglungen um 60°, 180° und 300°.

  Die Drehspiegelungen um 180° sind wieder alle identisch zu der Punktsymmetrie.

  Damit bekommen wir $4 \cdot 2$ Drehungen (120°, 240°) und $4 \cdot 2$ Drehspiegelungen (60°, 300°).

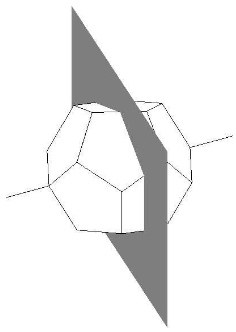
Insgesamt haben wir

$$\begin{array}{lcr} \text{Drehungen:} & & 1+3\cdot 3+6+4\cdot 2 \\ \text{Drehspiegelungen:} & + & 1+3\cdot 3+6+4\cdot 2 \\ & & =48 \end{array}$$

Gruppenelemente konstruiert und damit alle, denn: Diese Symmetrien sind alle verschieden, da 2 Drehungen mit verschiedenen Drehachsen verschieden sind. Ebenso sind 2 Drehspiegelungen mit verschiedenen Drehachsen (und somit Spiegelebenen) verschieden, wenn durch die Drehspieglung die Drehachse eindeutig festgelegt ist. Um dies zu sehen betrachtet man das Quadrat der Drehspieglung. Dies ist genau dann die Identität, wenn die Drehspiegelung die Punktsymmetrie war, anderenfalls ist es eine Drehung, die die Drehachse eindeutig festlegt. Bem.: Indem man die Ecken nummeriert, kann man die Gruppenelemente als Elemente der S_6 betrachten und so rein mechanisch nachprüfen, daß alle verschieden sind.

- Für den Dodekaeder haben wir:

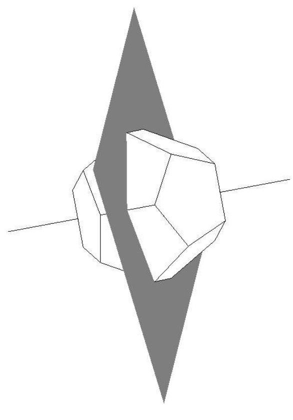
  - Die Identität id
  - Die Punktsymmetrie am Ursprung.
  - Eckendiagonalen:

    Der Dodekaeder hat 20 Ecken, also 10 Eckendiagonalen. Um diese haben wir jeweils nichttriviale Drehungen um 120° und 240°. Drehspiegelungen haben wir um 60°, 180° und 300°.

    Die Drehspiegelungen um 180° sind alle identsch zur Punktsymmetrie am Ursprung.

    Damit bekommen wir $10 \cdot 2$ Drehungen (120°, 240°) und $10 \cdot 2$ Drehspiegelungen (60°, 300°).
  - Kantenmittendiagonalen:

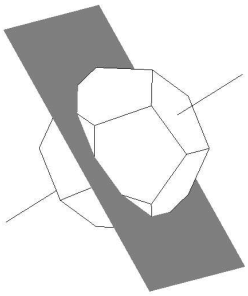
    

Der Dodekaeder hat 30 Kanten, also 15 Kantenmittendiagonalen. Um diese haben wir nichttriviale Drehungen um 180° und Drehspiegelungen um 0° und 180°.

Die Drehspiegelungen um 180° sind wieder alle identisch zu der Punktsymmetrie.

Damit bekommen wir 15 Drehungen (180°) und 15 Drehspiegelungen (0°).

– Seitenmittendiagonalen:



Der Dodekaeder hat 12 Seiten, also 6 Seitenmittendiagonalen. Um diese haben wir nichttriviale Drehungen um $k \cdot \frac{360°}{5} = k \cdot 72°$ für $k = 1, 2, 3, 4$ und Drehspieglungen um $(2k + 1) \cdot 36°$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Die Drehspiegelungen um 180° ($k = 2$) sind wieder alle identisch zu der Punktsymmetrie.

Damit bekommen wir 6·4 Drehungen (72°, 144°, 216°, 288°) und 6·4 Drehspiegelungen (36°, 108°, 252°, 324°).

Insgesamt haben wir

$$\begin{array}{lcr} \text{Drehungen:} & & 1 + 10 \cdot 2 + 15 + 6 \cdot 4 \\ \text{Drehspiegelungen:} & + & 1 + 10 \cdot 2 + 15 + 6 \cdot 4 \\ & & = 120 \end{array}$$

Gruppenelemente konstruiert und damit alle.

- Schließlich bemerken wir:

  Die Seitenmitten eines Oktaeders (Icosaeders) sind die Ecken eines Würfels (Dodekaeders). Umgekehrt sind die Seitenmitten eines Würfels (Dodekaders) die Ecken eines Oktaeders (Icosaeders). Deshalb haben Würfel (Dodekader) und Oktaeder (Icosaeder) die selbe Symmetrie, d.h. wenn der eine in sich selbst transformiert wird, dann auch der andere. Damit sind

$$O \cong W$$
$$I \cong D$$