Mathematik für Informatiker I
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer, Janko Böhm
Musterlösung Übungsblatt 4

Abgabetermin Montag 25.11.2002 vor der Vorlesung

1. (a) Zeigen Sie: Es gibt keinen Körper mit genau 6 Elementen.
   (b) Gibt es einen Körper mit genau 4 Elementen?

Lösung:

(a) Angenommen es gibt einen Körper K mit 6 Elementen. Da $ord(1) \mid |K|$ ist $6 \cdot 1 = 0$, also $2 \cdot 1 = 0$ oder $3 \cdot 1 = 0$.

- Angenommen $2 \cdot 1 = 0$, dann ist
$$K = \{0, 1, a, a+1, b, b+1\}$$
wobei a ein Element von K ist mit $a \notin \{0, 1\}$ und b ein Element von K mit $b \notin \{0, 1, a, a+1\}$. Folgende Einträge in der Additionstabelle sind klar:

+					
0	1	a	$a+1$	b	$b+1$
1	0	$a+1$	a	$b+1$	b
a	$a+1$	0	1		
$a+1$	a	1	0		
b	$b+1$			0	1
$b+1$	b			1	0

Da jedes Element in jeder Zeile und Spalte genau 1-mal vorkommen darf, ist
$$a + b \notin \{0, 1, a, a+1\} \cup \{0, 1, b, b+1\} = K$$
ein Widerspruch.

- Angenommen $3 \cdot 1 = 0$, dann ist
$$K = \{0, 1, 2, a, a+1, a+2\}$$
mit $a \neq 0, 1, 2$. Folgende Einträge in der Additionstabelle sind klar:

+					
0	1	2	a	$a+1$	$a+2$
1	2	0	$a+1$	$a+2$	a
2	0	1	$a+2$	a	$a+1$
a	$a+1$	$a+2$			
$a+1$	$a+2$	a			
$a+2$	a	$a+1$			

Damit ist $2a = a + a \notin \{a, a+1, a+2\}$ und damit
$$2a \in \{0, 1, 2\}$$
also auch
$$a = 4a \in \{0, 1, 2\}$$
ein Widerspruch.

(b) Wir konstruieren einen Körper mit 4 Elementen:
Da $4 \cdot 1 = 0$ ist auch $2 \cdot 1 = 0$ also

$$K = \{0, 1, a, a+1\}$$

wobei $a \neq 0, 1$. Die Additionstabelle ist dann

$+$				
	0	1	a	$a+1$
	1	0	$a+1$	a
	a	$a+1$	0	1
	$a+1$	a	1	0

Um a^2 zu bestimmen, bemerken wir, daß die Gleichung $x^2 = 1$ genau die Lösung $\{-1, +1\} = \{1\}$ hat. Wegen $a \neq 1$ folgt also $a^2 \neq 1$ und daher $a^2 = a + 1$. Es ergibt sich

$\cdot$			
	1	a	$a+1$
	a	$a+1$	1
	$a+1$	1	a

Nachzuprüfen, daß die Assoziativ- und Distributivgesetze gelten, ist dem eifrigen Leser überlassen.

2. Läßt sich bei dem bekannten Schiebespiel folgende Konfiguration

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

in die Ausgangsstellung

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

überführen?

Lösung:

Wir bezeichnen das freie Kästchen mit 16 und identifizieren die Konfigurationen des Schiebespiels mit Elementen von S_{16}.
Konfigurationen mit dem freien Kästchen rechts unten, d.h. mit $j_{16} = 16$, sind Elemente in der $S_{15} \hookrightarrow S_{16}$.

Die erste Konfiguration entpricht dabei der Transposition $(1, 2)$ die Ausgangsstellung der Identität $()$.

Jede einzelne Verschiebung des leeren Feldes ist eine Transposition. Da die Position des freien Feldes in beiden Konfigurationen gleich ist, muß das freie Kästchen insgesamt genausooft nach oben wie nach unten und genausooft nach rechts wie nach links geschoben werden. Damit haben wir insgesamt eine gerade Anzahl von Schiebevorgängen. Die zugehörige Signatur sgn wäre somit 1. Andererseits ist $sgn\,(1,2) = -1$. Also ist das Puzzle nicht lösbar.

Bemerkung:

Wenn wir als Zielkonfigurationen nur solche mit Kästchen rechts unten betrachten, also Elemente von S_{15}, dann kann man zeigen, daß genau die Permutationen in A_{15} erreicht werden.

Der Beweis ist ähnlich zu Aufgabe 3.(b) oder Aufgabe 4 auf Blatt 3 .

(a) Welche Ordnungen treten bei den Elementen von S_7 auf?

(b) Sei $G \subset S_n$ eine Untergruppe mit $(1,2) \in G$ und $(1,2,...,n) \in G$. Zeigen Sie

$$G = S_n$$

Lösung:

(a) Jede Permutation läßt sich als Produkt elementfremder Zykel schreiben. Diese Schreibweise liefert jeweils eine Partition von 7. Die Ordnung eines Elements ist der kgV der Längen sämtlicher Bahnen, und hängt deshalb nur von der Partition ab. Also:

Partition	Ordnung	Repräsentant von diesem Typ
1^7	1	$()$
$2,1^5$	2	$(1,2)$
$2,2,1^3$	2	$(1,2)\,(3,4)$
$2,2,2,1$	2	$(1,2)\,(3,4)\,(5,6)$
$3,1^4$	3	$(1,2,3)$
$3,2,1^2$	6	$(1,2,3)\,(4,5)$
$3,2,2$	6	$(1,2,3)\,(4,5)\,(6,7)$
$4,1^3$	4	$(1,2,3,4)$
$3,3,1$	3	$(1,2,3)\,(4,5,6)$
$4,2,1$	4	$(1,2,3,4)\,(5,6)$
$4,3$	12	$(1,2,3,4)\,(5,6,7)$
$5,1^2$	5	$(1,2,3,4,5)$
$5,2$	10	$(1,2,3,4,5)\,(6,7)$
$6,1$	6	$(1,2,3,4,5,6)$
7	7	$(1,2,3,4,5,6,7)$

Es gibt also Elemente der Ordnung $1,2,3,4,5,6,7,10$ und 12.

(b) Sei $R_i := (i, i+1)$ für $i = 1,...,n-1$ und $R := (1,2,...,n)$. In Aufgabe 4 auf Blatt 3 haben wir gesehen, daß

$$S_n = \langle R_1, ..., R_{n-1} \rangle$$

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} R_i &= (i, i+1) \\ &= (1,2,...,n)^{i-1}(1,2)(1,2,...,n)^{-i+1} \\ &= R^{i-1}R_1R^{-i+1} \end{aligned}$$

Damit ist $S_n = \langle R_1, ..., R_{n-1}\rangle \subset \langle R_1, R\rangle \subset S_n$.

3. Beschreiben Sie die Menge

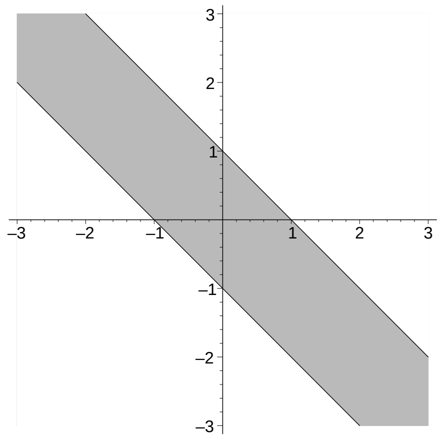
$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1\right\}$$

(z.B. durch Zeichnung).

Lösung:

Wir haben $x + y = 1$ für $y = 1 - x$ und $x + y = -1$ für $y = -1 - x$, also ist

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x - 1 \le y \le 1 - x\right\}$$



4. Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$ gilt:

(a)
$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!} \text{ für alle } k \ge 0$$

(b)
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$$

(c)
$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \le \frac{1}{3}n!$$

Lösung:

(a) Für $n < k$ ist $\binom{n}{k} = 0$ und damit die Gleichung korrekt.
Ist $k \le n$, dann ist

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k}(n-k+j) = \frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{(n-k+j)}{n} \le \frac{1}{k!}$$

(b) Mit dem Binomischen Lehrsatz und Teilaufgabe ($a.$)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Für $k \ge 4$ gilt $\frac{1}{k!} \le 2^{-k}$ (Induktion). Da $\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{8}{3}$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k!} \le \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{n}2^{-k}\\ &= \frac{8}{3} + 2^{-4}\sum_{k=0}^{n-4}2^{-k}\end{aligned}$$

mit der Summenformel für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{m}x^k = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$ für $x = \frac{1}{2}$ weiter

$$\begin{aligned}&= \frac{8}{3} + 2^{-4}\frac{\left(1-2^{-(n-3)}\right)}{\frac{1}{2}}\\ &\le \frac{8}{3} + 2^{-3} = \frac{67}{24} < 3\end{aligned}$$

(c) Wir zeigen die Formel mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$:
Induktionsanfang $n = 1$: $\left(\frac{1}{3}\right)^1 \le \frac{1}{3}1!$
Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{n+1}{3}\right)^{n+1} &= \left(\tfrac{n+1}{3}\right)\left(\tfrac{n+1}{3}\right)^n = \left(\tfrac{n+1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)^n\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\\ &\overset{(b.)}{<} \left(\tfrac{n+1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)^n\cdot 3 = (n+1)\left(\tfrac{n}{3}\right)^n\\ &\overset{IV}{\le} (n+1)\tfrac{1}{3}n! = \tfrac{1}{3}(n+1)!\end{aligned}$$