

Mathematik für Informatiker I
Prof . Dr. F.-O. Schreyer, Janko Böhm
Übungsblatt 5

Abgabetermin Montag 2.12.2002 vor der Vorlesung

1. Sei die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $(a_0, a_1) := (0, 1)$ und

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Zeigen Sie

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

konvergiert gegen den goldenen Schnitt

$$s = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

2. Zeigen Sie:

Für die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$a_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folgen

$$a_n = \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}$$

$$b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

$$c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$$

Zeigen Sie:

Für $1 \leq n < 1\,000\,000$ gilt $a_n > b_n > c_n$, jedoch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$$

4. Berechnen Sie den Limes der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch $a_0 := 1$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

5. Sei $x \in \mathbb{R}$ und die Folge $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n(x) := n \cdot x - \lfloor n \cdot x \rfloor$$

Zeigen Sie:

- Ist $x \in \mathbb{Q}$, dann hat $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ nur endlich viele Häufungspunkte.
- Ist $x \notin \mathbb{Q}$, dann ist jeder Punkt von $[0, 1]$ Häufungspunkt der Folge $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.