Mathematik für Informatiker I
Prof . Dr. Frank-Olaf Schreyer, Janko Böhm
Musterlösung Übungsblatt 5

Abgabetermin Montag 2.12.2002 vor der Vorlesung

1. Sei die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $(a_0, a_1) := (0, 1)$ und

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Zeigen Sie

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

konvergiert gegen den goldenen Schnitt

$$s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Lösung:

Aus der Rekursionsformel für die Fibonacci-Folge folgt

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

Wir zeigen, daß x_n eine Cauchy-Folge und damit konvergent ist. Dazu:

- Zeige mit vollst. Induktion nach j, daß $\frac{3}{2} \le x_j \le 2$ für alle $j \ge 3$.
  Induktionsanfang $j = 3$: Es gilt $\frac{3}{2} = x_3 \le 2$.
  Induktionsschritt $j-1 \mapsto j$:
  Nach Induktionsvoraussetzung ist $\frac{3}{2} \le x_{j-1} \le 2$, also gilt für $x_j = 1 + \frac{1}{x_{j-1}}$

$$1 + \frac{1}{2} \le x_j \le 1 + \frac{2}{3}$$

- Zeige $|x_{j+1} - x_j| \le \left(\frac{4}{9}\right) |x_j - x_{j-1}|$ für alle $j \ge 4$:
  Es ist

$$x_{j+1} - x_j = \frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_{j-1}} = -\frac{x_j - x_{j-1}}{x_j \cdot x_{j-1}}$$

  also

$$|x_{j+1} - x_j| = \frac{|x_j - x_{j-1}|}{x_j \cdot x_{j-1}} \le \frac{|x_j - x_{j-1}|}{(3/2)^2} = \left(\frac{4}{9}\right) |x_j - x_{j-1}|$$

- Zeige mit vollst. Induktion $|x_{j+1} - x_j| \le \left(\frac{4}{9}\right)^j$ für alle $j \ge 4$:
  Induktionsanfang $j = 4$: Es gilt $|x_5 - x_4| = \left|\frac{8}{5} - \frac{5}{3}\right| = \frac{1}{15} \le \frac{64}{729} = \left(\frac{4}{9}\right)^3$.
  Induktionsschritt $j-1 \mapsto j$: $|x_{j+1} - x_j| \le \left(\frac{4}{9}\right) |x_j - x_{j-1}| \overset{IV}{\le} \left(\frac{4}{9}\right)^j$.

- Zeige für alle $k \geq l \geq 4$ gilt $|x_k - x_l| \leq \frac{9}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^l$:

$$|x_k - x_l| \leq \sum_{j=l}^{k-1} |x_{j+1} - x_j| \leq \sum_{j=l}^{k-1} \left(\frac{4}{9}\right)^j = \left(\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^k}{\frac{5}{9}} - \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^l}{\frac{5}{9}}\right)$$
$$= \frac{9}{5}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^l - \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) \leq \frac{9}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^l$$

  mit der Summenformel für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $x = \frac{4}{9}$.

Sei nun x der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$. Bilden wir den Grenzwert der linken und rechten Seite der Rekursionsgleichung $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ erhalten wir da $x \geq \frac{3}{2} > 0$ die Gleichung $x = 1 + \frac{1}{x}$ d.h.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

die die beiden Lösungen $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ hat, also

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = s$$

2. Zeigen Sie:

   Für die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{5}}$$

   Lösung:

   Seien

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

   die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Wir zeigen mit vollst. Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, daß $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$:

   Induktionsanfang $n = 0$ und $n = 1$: Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = a_0$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = 1 = a_1$$

Induktionsschritt von n und $n+1$ auf $n+2$:

Sei die Formel für n und $n+1$ mit $n \geq 1$ gezeigt. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
a_{n+2} = a_{n+1} + a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} + \alpha^n - \beta^{n+1} - \beta^n\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n\left(\alpha+1\right) - \beta^n\left(\beta+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n\alpha^2 - \beta^n\beta^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folgen

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} \\
b_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \\
c_n &= \sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

Für $1 \leq n < 1\,000\,000$ gilt $a_n > b_n > c_n$, jedoch

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} b_n &= \frac{1}{2} \\
\lim_{n\to\infty} c_n &= \infty
\end{aligned}$$

Lösung:

- Zeige für $1 \leq n < 1\,000\,000$ gilt $b_n < a_n$:
  Für $n < 1\,000\,000$ gilt $\sqrt{n} < 1000$, also $n + \sqrt{n} < n + 1000$, also $\sqrt{n+\sqrt{n}} < \sqrt{n+1000}$, also $b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} < \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} = a_n$.
- Zeige für $1 \leq n < 1\,000\,000$ gilt $c_n < b_n$:
  Für $n < 1\,000\,000$ gilt $\sqrt{n} < 1000$, also $\frac{n}{1000} < \sqrt{n}$, also $n + \frac{n}{1000} < n + \sqrt{n}$, also $c_n = \sqrt{n+\frac{n}{1000}} < \sqrt{n+\sqrt{n}} = b_n$.
- Es gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1000} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1000}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}}
\end{aligned}$$

  also $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- Es gilt

$$\begin{aligned}
b_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1}
\end{aligned}$$

  Mit $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ folgt weiter

$$\frac{1}{2} \geq b_n > \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

  also $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

- Es gilt

$$\begin{aligned}
c_n &= \sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+\frac{n}{1000}} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\frac{n}{1000}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\frac{n}{1000}}{\sqrt{n+\frac{n}{1000}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{1000} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{1000}} + 1}
\end{aligned}$$

  also $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, d.h. c_n wächst unbeschränkt.

4. Berechnen Sie den Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch $a_0 := 1$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$$

Lösung:

Für die Konvergenz zeigen wir, daß a_n beschränkt und monoton ist:

- Zeige mit vollst. Induktion $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
  Induktionsanfang $n = 0$: Es gilt $a_0 = 1 \leq \sqrt{2} = a_1$.
  Induktionsschritt $n-1 \mapsto n$:
  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_{n-1} \leq a_n$, also $1 + a_{n-1} \leq 1 + a_n$, also

$$a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \leq \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}$$

- Zeige mit vollst. Induktion $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
  Induktionsanfang $n = 0$: Es gilt $a_0 = 1 \leq 2$.
  Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$:
  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_{n-1} \leq 2$, also $1 + a_{n-1} \leq 3$, also
  $$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \leq \sqrt{3} < 2$$

Sei $a \in \mathbb{R}$ die relle Zahl, gegen die die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Für alle n gilt
$$a_{n+1}^2 = 1 + a_n$$
Bilden wir den Grenzwert der linken und rechten Seite der Gleichung erhalten wir folgende Gleichung a
$$a^2 = 1 + a$$
die die beiden Lösungen
$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
hat. Da $a \geq 1$ muß gelten
$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

5. Sei $x \in \mathbb{R}$ und die Folge $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch
$$a_n(x) := n \cdot x - \lfloor n \cdot x \rfloor$$
Zeigen Sie:

- Ist $x \in \mathbb{Q}$, dann hat $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Häufungspunkte.
- Ist $x \notin \mathbb{Q}$, dann ist jeder Punkt von $[0,1]$ Häufungspunkt der Folge $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung:

- Sei $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann können wir jedes $a_n(x)$ schreiben als
  $$a_n(x) = \frac{z_n}{q}$$
  mit $z_n \in \mathbb{N}$. Da $0 \leq a_n(x) < 1$ gilt für die z_n, daß $0 \leq z_n < q$. Wir haben also gezeigt, daß $a_n(x)$ nur endlich viele verschiedene Werte annehmen kann und damit auch nur endlich viele Häufungspunkte haben kann.
- Sei nun $x \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
  (a) Zeige zunächst $a_n(x) \neq a_m(x)$ für alle $n \neq m$:
  Wäre $n \cdot x - \lfloor n \cdot x \rfloor = a_n(x) = a_m(x) = m \cdot x - \lfloor m \cdot x \rfloor$ für $n \neq m$, dann
  $$(n - m) \cdot x = \lfloor n \cdot x \rfloor + \lfloor m \cdot x \rfloor \in \mathbb{Z}$$
  also $x \in \mathbb{Q}$, ein Widerspruch.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ und $|x| < \varepsilon$. Zeige: Für alle $a \in [0,1]$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq N$ mit $|a - a_n(x)| < \varepsilon$.
Beweis:
Da $|x| < \varepsilon$ partitionieren die Zahlen $a_N(x), ..., a_M(x)$ mit $M := N + \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil$ das Intervall $[0,1]$ in Teilintervalle der Länge kleiner ε.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Zeige: Für alle $a \in [0,1]$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq N$ mit $|a - a_n(x)| < \varepsilon$.
Beweis:
Die Folge $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge und damit gibt es $N_0, k \in \mathbb{N}$ mit $|a_{N_0+k}(x) - a_{N_0}(x)| < \varepsilon$. Betrachte

$$\begin{aligned} \xi &:= a_{N_0+k}(x) - a_{N_0}(x) \\ &= (N_0 + k) \cdot x - \lfloor (N_0 + k) \cdot x \rfloor - N_0 \cdot x + \lfloor N_0 \cdot x \rfloor \\ &= k \cdot x - \underbrace{(\lfloor (N_0 + k) \cdot x \rfloor - \lfloor N_0 \cdot x \rfloor)}_{=: N_1 \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Damit ist $|\xi| < \varepsilon$ und außerdem

$$\begin{aligned} a_{m \cdot k}(x) &= m \cdot k \cdot x - \lfloor m \cdot k \cdot x \rfloor \\ &= m \cdot (\xi + N_1) - \lfloor m \cdot (\xi + N_1) \rfloor \\ &= m \cdot \xi + m \cdot N_1 - \lfloor m \cdot \xi \rfloor - m \cdot N_1 \\ &= m \cdot \xi - \lfloor m \cdot \xi \rfloor = a_m(\xi) \end{aligned}$$

Da $\xi \neq 0$ nach (a), können wir (b) auf $a_m(\xi)$ und die Schranke $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ anwenden und erhalten ein $m \geq \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ mit $|a - a_m(\xi)| < \varepsilon$. Es gilt dann

$$|a - a_n(x)| = |a - a_{m \cdot k}(x)| = |a - a_m(\xi)| < \varepsilon$$

für $n := m \cdot k \geq N$.

(d) Mit (c) können wir nun eine Teilfolge von $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren, die gegen a konvergiert.