WS 02/03 **Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer**
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 6

Abgabetermin Montag 9.12.2002 vor der Vorlesung

1. Zeigen Sie: Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.

   Lösung:

   Wir nennen $m \in \mathbb{N}$ eine Gipfelstelle von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $n > m$ gilt $a_m > a_n$.

   - Hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Gipfelstellen n_j, $j \in \mathbb{N}$, dann ist $\left(a_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Gipfelstellen, dann existiert ein Index m_0 größer als alle Gipfelstellen, der selbst keine Gipfelstelle ist, und somit gibt es ein $m_1 > m_0$ mit $a_{m_0} \leq a_{m_1}$. Da m_1 keine Gipfelstelle ist, gibt es ein $m_2 > m_1$ mit $a_{m_1} \leq a_{m_2}$. Induktiv konstruieren wir so eine monoton wachsende Teilfolge.

2. Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei $L := \limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Zeigen Sie:

   - Ist $L < 1$ dann konvergiert die Reihe absolut.
   - Ist $L > 1$ dann divergiert die Reihe.

   Lösung:

   - Ist $L < 1$, dann gibt es ein q mit $L < q < 1$. Nach der Definition des lim sup gibt es ein N, sodaß $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq N$, also
     $$|a_n| \leq q^n \text{ für alle } n \geq N$$
     und damit ist $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$.
   - Ist $L > 1$, dann gibt es unendlich viele n mit $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, also $|a_n| > 1$, und damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge.

3. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3-2n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\right)^n}{n^2}$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

Lösung:

(a) Mit $a_n := \frac{1}{2n-3}$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Da $a_n > 0$ für $n \geq 2$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ konvergiert die Reihe mit dem Leibniz-Konvergenzkriterium für alternierende Reihen.

(b) Wir bezeichnen mit a_n die Summanden. $a_{2n} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2n}}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^n}{n^2}$ ist keine Nullfolge, denn $\frac{a_{2(n+1)}}{a_{2n}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{9}{4} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{4} > 1$. Damit ist die Reihe divergent.

(c) Wir bezeichnen mit a_n die Summanden. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4\, 3^n}{3^{n+1} n^4} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{768} < 1$$

für alle $n \geq 4$, und damit konvergiert die Reihe mit dem Quotientenkriterium.

4. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz, und berechnen Sie im Falle von Konvergenz den Grenzwert:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+k}$

(b) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+2}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

Lösung:

(a) Mit dem Binomischen Lehrsatz schreiben wir:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+k} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(1+\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{8}{5}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{24}{25}\right)^n\end{aligned}$$

Diese geometrische Reihe ist wegen $\left|\frac{24}{25}\right| < 1$ konvergent und für den Grenzwert gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{24}{25}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{24}{25}} = 25$$

(b) Für $n \geq 3$ haben wir

$$\frac{n+4}{n^2-3n+2} = \frac{1}{n-7+\frac{30}{n+4}} > \frac{1}{n}$$

denn $\frac{30}{n+4} < 7$. Somit ist diese Reihe divergent, denn anderenfalls wäre sie eine konvergente Majorante für die divergente Reihe $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ (man beachte $\frac{n+4}{n^2-3n+2} > 0$ $\forall n \geq 3$).

(c) Die Reihe ist absolut konvergent, denn $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)^2}$ ist eine konvergenten Majorante von $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$.
Um den Grenzwert als Teleskopsumme zu berechnen, bemerken wir, daß

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

also

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{k} \frac{2}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \longrightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

5. Bestimmen und zeichnen Sie für $r = \frac{1}{2}, 1, 2$ die Menge:

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z-1}{z+1} \right| < r \right\}$$

Lösung:

Mit $z = x + iy$ haben wir

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-1}{z+1}\right|^2 &= \frac{|x-1+iy|^2}{|x+1+iy|^2} = \frac{(x-1+iy)\,\overline{(x-1+iy)}}{(x+1+iy)\,\overline{(x+1+iy)}} \\ &= \frac{(x-1+iy)\,(x-1-iy)}{(x+1+iy)\,(x+1-iy)} = \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}\end{aligned}$$

also gilt $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < r$ genau dann, wenn

$$r^2\left((x+1)^2+y^2\right) > (x-1)^2+y^2$$

(denn $(x+1)^2+y^2 = |z+1|^2 \geq 0$). Äquivalent

$$\left(r^2-1\right)\cdot\left(x^2+y^2+1\right) + \left(r^2+1\right)\cdot 2\cdot x > 0 \qquad (*)$$

- Wenn $0 < r < 1$ können wir diese Ungleichung schreiben als

  $$x^2+y^2+1+\frac{r^2+1}{r^2-1}2x < 0$$

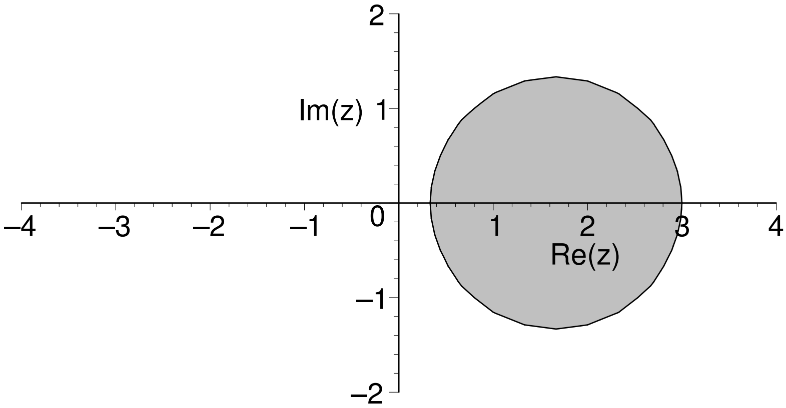
  oder nach quadratischer Ergänzung

  $$\left(x - \left(-\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)\right)^2 + y^2 < \left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2 - 1$$

  Dies beschreibt ein Kreissscheibe mit Radius $\sqrt{\left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2 - 1}$, d.h. für $r = 1/2$ ist

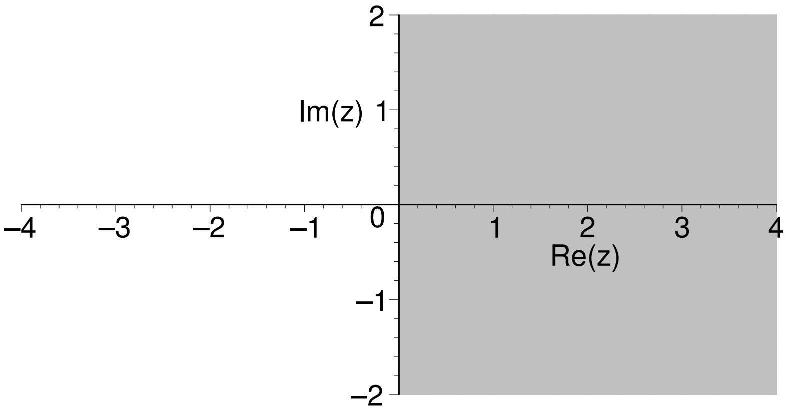
  $$M = K_{\frac{4}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)$$

  wobei $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$ die Kreisscheibe ohne Rand mit Mittelpunkt $z \in \mathbb{C}$ und Radius R bezeichne.



- Für $r = 1$ wird die Ungleichung $(*)$ zu $x > 0$, also

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$



- Wenn $r > 1$ wird $(*)$ zu

$$\left(x - \left(-\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)\right)^2 + y^2 > \left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2 - 1$$

Dies beschreibt ein Kreisaußengebiet. Für $r = 2$ ist also

$$M = \mathbb{C} - \overline{K_{\frac{4}{3}}\left(-\frac{5}{3}\right)}$$

wobei $\overline{K_R\,(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$ die Kreisscheibe mit Rand mit Mittelpunkt $z \in \mathbb{C}$ und Radius R bezeichne.