WS 02/03 Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Übungsblatt 7

Abgabetermin Montag 16.12.2002 vor der Vorlesung

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Was bedeuten folgende Eigenschaften von f und welche Implikationen gelten:

   (a) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

   (b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$

   (c) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

   (d) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

   (e) $\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subset [a, b]$. Zeigen Sie:

   Es existiert ein Fixpunkt von f, d.h. $\exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

3. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $D \subset \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

4. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat $f(x) = x^3 - a \cdot x + b$ eine doppelte Nullstelle (d.h. eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = f'(x_0) = 0$).

   Für welche Werte a, b hat f genau 1 Nullstelle, für welche Werte 3 Nullstellen.

5. Diskutieren Sie die Funktion

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3 + 2\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

   (Nullstellen, Asymptoten, Extremwerte, Wendepunkte).