WS 02/03

PROF. DR. FRANK-OLAF SCHREYER
JANKO BOEHM

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 7

Abgabetermin Montag 16.12.2002 vor der Vorlesung

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Was bedeuten folgende Eigenschaften von f und welche Implikationen gelten:

   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

   (b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$

   (c) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

   (d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

   (e) $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

   Lösung:

   Interpretation der Eigenschaften:

   (a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Wählen wir z.B $\delta := 2|x - x_0|$, dann liefert Bedingung a, daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$, also $f(x) = f(x_0)$. Es folgt: a. ist zu f konstant äquivalent.

   (b) Bedingung b. liefert für jedes Intervall $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ ein δ mit $|f(x) - f(x_0)| < \delta$, also $|f(x)| < |f(x_0)| + \delta$. f ist also auf jedem beschränkten Intervall beschränkt. Wir nennen diese Eigenschaft lokal beschränkt.

   (c) Bedingung c. liefert ein $\varepsilon > 0$, sodaß für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ (indem wir z.B. $\delta := 2|x - x_0|$ wählen) gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, also $|f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon$. Also bedeutet c., daß f beschränkt ist.

   (d) Bedingung d. ist die Definition von Stetigkeit in x_0.

   (e) Bedingung e. liefert eine Umgebung $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ von x_0 in der gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$, also $f(x) = f(x_0)$.
   Damit ist f in einer Umgebung von x_0 konstant. Man sagt, f ist lokal konstant in x_0.

   Implikationen:

   Aus konstant (a.) folgt offensichtlich sowohl beschränkt (c.) als auch lokal konstant in x_0 (e.). Aus beschränkt (c.) folgt lokal beschränkt (b.). Aus lokal konstant (e.) folgt stetig (d.), denn eine in einer Umgebung von x_0 konstante Funktion ist offenbar in x_0 stetig. Insgesamt:

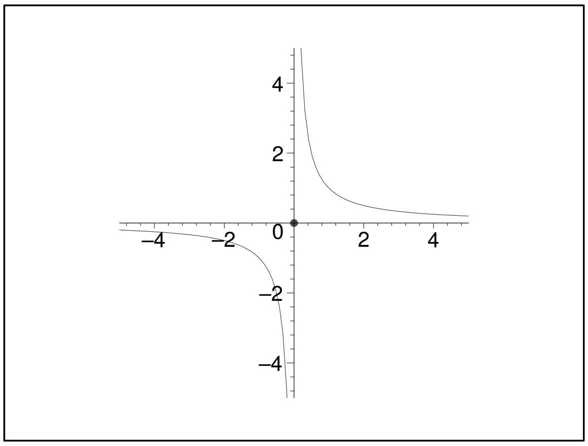
$$\begin{array}{rcl} & \text{konstant} & \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{lokal konstant in } x_0 & & \text{beschränkt} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{stetig in } x_0 & & \text{lokal beschränkt} \end{array}$$

Trivialerweise findet man Beispiele von Funktionen, die alle anderen Schlußrichtungen widerlegen.

Bemerkungen:

- Aus stetig in jedem x_0 folgt lokal beschränkt.
- Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht lokal beschränkt ist

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{array} \right\}$$



2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subset [a, b]$. Zeigen Sie:

   Es existiert ein Fixpunkt von f, d.h. $\exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

   Lösung:

   Mit f ist auch die Funktion

   $$\begin{array}{l} g : [a, b] \to \mathbb{R} \\ g(x) := f(x) - x \end{array}$$

   stetig. Da $f([a, b]) \subset [a, b]$ ist $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$, und somit liefert der Zwischenwertsatz die Existenz eines $x_0 \in [a, b]$ mit $g(x_0) = 0$, also $f(x_0) = x_0$.

3. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $D \subset \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Lösung:

Wir zeigen die Behauptung mit vollst. Induktion nach n:

Induktionsanfang $n = 0$: $(f \cdot g)^{(0)} = f \cdot g$

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)} &= \left((f \cdot g)^{(n)}\right)' \\
&\overset{IV}{=} \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right) \\
&= f^{(n+1)} g + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)}\right) + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right) + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + f g^{(n+1)} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}
\end{aligned}$$

4. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat $f(x) = x^3 - a \cdot x + b$ eine doppelte Nullstelle (d.h. eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = f'(x_0) = 0$).

   Für welche Werte a, b hat f genau 1 Nullstelle, für welche Werte 3 Nullstellen.

   Lösung:

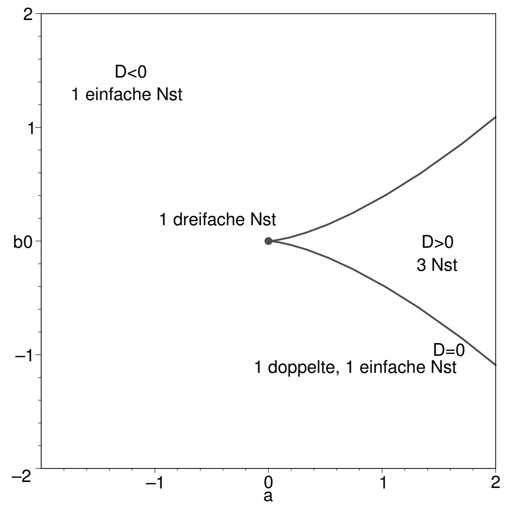
   Es gilt $f'(x) = 3x^2 - a$.

   - Für $a < 0$ ist $f'(x) > 0$, also ist f streng monoton steigend, hat keine doppelte Nullstelle, und wegen $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ besitzt f genau 1 Nullstelle.
   - Für $a \geq 0$ gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ und

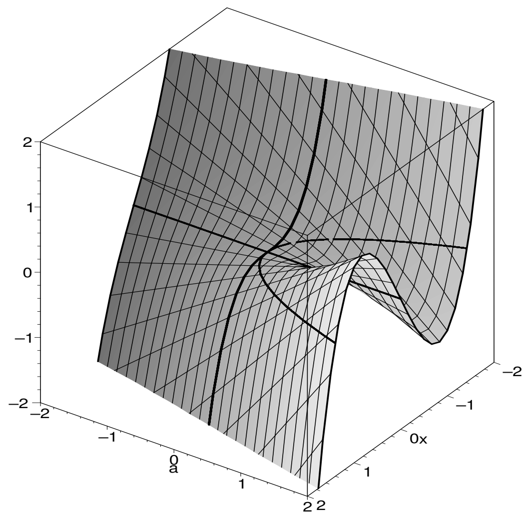
$$\begin{aligned}
& f\left(\sqrt{\tfrac{a}{3}}\right) = 0 \text{ oder } f\left(-\sqrt{\tfrac{a}{3}}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & b = -\left(\sqrt{\tfrac{a}{3}}^3 - a\sqrt{\tfrac{a}{3}}\right) \text{ oder } b = \left(\sqrt{\tfrac{a}{3}}^3 - a\sqrt{\tfrac{a}{3}}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & b^2 = \left(\sqrt{\tfrac{a}{3}}^3 - a\sqrt{\tfrac{a}{3}}\right)^2 = \left(\tfrac{a}{3}\right)^3 - 2a\left(\tfrac{a}{3}\right)^2 + a^2\tfrac{a}{3} = \tfrac{4}{27}a^3 \\
\Leftrightarrow\quad & 27b^2 = 4a^3
\end{aligned} \qquad (*)$$

Sei $D := 4a^3 - 27b^2$. Es gilt (man beachte: $D < 0$ für $a < 0$):

- $D = 0$:
  Wegen $0 = f''(x) = 3x \Leftrightarrow x = 0$ hat f genau für $a = b = 0$ eine 3-fache Nullstelle. Ansonsten ($a \neq 0$) hat f wegen $f''\left(\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \neq 0$ eine doppelte und eine 1-fache Nullstelle.
- $D < 0$:
  Hier hat f genau 1 einfache Nullstelle. Für $a < 0$ haben wir dies schon eingesehen. Für $a > 0$ hat f ein Minimum in $x = +\sqrt{\frac{a}{3}}$ und ein Maximum in $x = -\sqrt{\frac{a}{3}}$. Rechnet man $(*)$ mit Ungleichungen nach, sieht man, daß entweder $f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) > 0$ oder $f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) < 0$ gilt.
- $D > 0$:
  Hier hat f ein Minimum in $x = +\sqrt{\frac{a}{3}}$ mit $f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) < 0$ und ein Maximum in $x = -\sqrt{\frac{a}{3}}$ mit $f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) > 0$. Da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ besitzt f also genau 3 verschiedene Nullstellen.



$x^3 - a \cdot x + b = 0$:



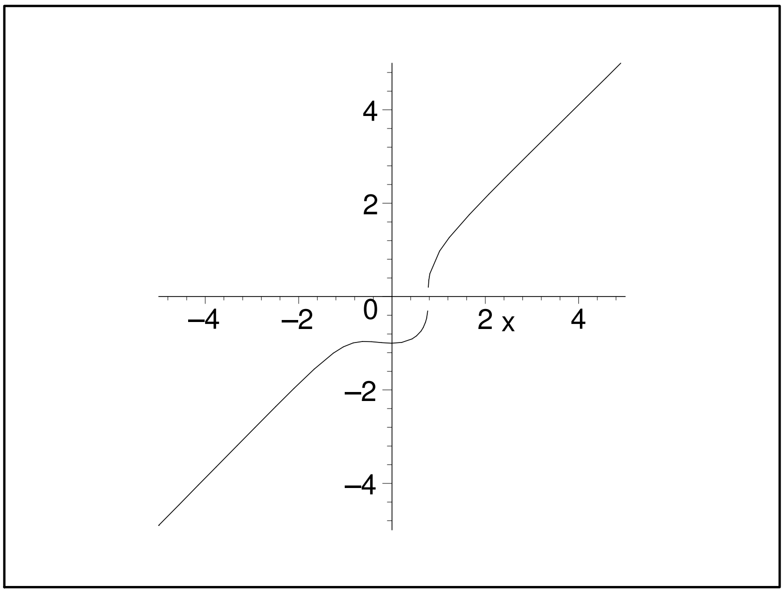
5. Diskutieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3 + 2\sqrt{x^2+1}}$$

(Nullstellen, Asymptoten, Extremwerte, Wendepunkte).

Lösung:

- Plot von f



- Ableitungen:
Setze $g(x) := x^3 - 3 + 2\sqrt{x^2+1}$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{g'(x)}{(g(x))^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\frac{3x^2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{(g(x))^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\frac{3x^2\sqrt{x^2+1} + 2x}{\sqrt{x^2+1}\,(g(x))^{\frac{2}{3}}}$$

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2}{9}\frac{(g'(x))^2}{(g(x))^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{3}\frac{g''(x)}{(g(x))^{\frac{2}{3}}} \\ &= -\frac{2}{9}\frac{\left(3x^2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}{(g(x))^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{3}\frac{6x + \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}}{(g(x))^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

f ist differenzierbar außerhalb der Nullstellen von g.

- Extremwerte:
Es gilt (wegen $x^4 + x^2 - \frac{4}{9} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \frac{5}{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = \pm i\frac{2}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{R}$):

$$3x^2\sqrt{x^2+1} + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Keine dieser Lösungen ist eine Nullstelle des Nenners und damit hat $f'(x) = 0$ genau diese Lösungen.
Wegen $f''(0) = 0 + \frac{1}{3}\frac{2}{(-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} > 0$ ist $(0, -1)$ ein lokales Minimum von f.
Wegen $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 + \frac{-\frac{5}{12}\sqrt{3}}{\left(\frac{11}{9}\sqrt{3}-3\right)^{\frac{2}{3}}} < 0$ ist $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \left(\frac{11}{9}\sqrt{3} - 3\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ ein lokales Maximum von f.

- Asymptoten:
Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-3+2\sqrt{x^2+1}}}{x} = 1$, also ist $y = x$ eine Asymptote für $x \to \pm\infty$.
Die Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow x^3 - 3 + 2\sqrt{x^2+1} = x^3 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 = \tfrac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \pm\tfrac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

sind die beiden Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Asymptote. Da für $x > \frac{\sqrt{5}}{2}$ und für $x < -\frac{\sqrt{5}}{2}$ gilt $2\sqrt{x^2+1} > 3$ nähert sich für $x \to \pm\infty$ die Funktion von oben der Asymptote.

- Nullstellen:
Für jede reelle Nullstelle gilt

$$\begin{aligned} & x^3 - 3 + 2\sqrt{x^2+1} = g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x^3-3\right)^2 = 4\left(x^2+1\right) \quad \wedge \quad x < \sqrt[3]{3} \\ \Leftrightarrow \quad & h := x^6 - 6x^3 - 4x^2 + 5 = 0 \quad \wedge \quad x < \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Da $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = \sqrt[3]{2\left(\sqrt{2}-1\right)} > 0$ und f stetig ist, liefert der Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstellen von f in $]0, 1[$. Aus der Kenntnis der Extremwerte und Asymptotik wissen wir, daß f genau diese Nullstelle hat (genau dort ist f nicht differenzierbar).
Eine numerische Approximation der Nullstelle finden wir durch Anwenden des Newtonverfahrens auf h (Maple). Als Startwert nehmen wir $x = 1$. Finden wir eine Nullstelle $x < \sqrt[3]{3}$, dann muß dies die gesuchte Nullstelle von f sein, die wir mit x_0 bezeichnen:

```
># Wir suchen eine Nullstelle von
>h:=x^6-6*x^3-4*x^2+5:
># maximale Abweichung des Funktionswertes von 0
>epsilon:=10^(-15):
># Startwert
>t:=1:
># die Ableitung von h
>h1:=diff(h,x):
># Rechengenauigkeit
>digits:=25:
># Wir geben aus:
># Nummer des Newtonschritts, Approximation der Nst, Funktionswert dort, Fehlerabschätzung
>#
>#
>#
>#
>f:=x0->(evalf(subs({x=x0},h),digits)):
>f1:=x0->(evalf(subs({x=x0},h1),digits)):
>#
>#
>T:=[t]:
>print(0,t,f(t));
>for i from 1 while abs(f(t))>epsilon do
>t:=evalf(t-f(t)/f1(t),digits);
>print(i,t,f(t),evalf((t-T[i])^2,digits));
>T:=[op(T),t];
>od:
 0   1                             -4.
 1   .8000000000000000000000000    -.3698560000000000000000000    .0400000000000000000000000
 2   .7768172336328626444159178    -.0066369594753841337687 36    .0005374406564332749435189798
 3   .7763856821472168820862544    -.2332051458252333165*10^-5    .1862366847630646100636086*10^-6
 4   .7763855304048326906248049    -.288394821028*10^-12          .2302575116010908961910870*10^-13
 5   .7763855304048139252890744    .1*10^-23                      .3521378250783799686302 5*10^-27
```

f ist in x_0 nicht differenzierbar ($\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \infty$ und Mittelwertsatz).

- Wendepunkte:

  Zwischen Maximum und Minimum muß ein Wendepunkt $-\frac{1}{\sqrt{3}} < w_1 < 0$ liegen. Da sich die Funktion von oben der Asymptote nähert, muß f jeweils einen weiteren Wendepunkt w_0 bzw. w_2 für $x < -\frac{\sqrt{5}}{2}$ bzw. $x > \frac{\sqrt{5}}{2}$ haben.

  Wir verwenden Maple, um numerische Approximationen von w_0, w_1, w_2 zu finden und zu zeigen, daß keine weiteren Wendepunkte existieren.

$$f''(x) = \frac{2}{9} \frac{6x^5 + 27x^3 + 18x - 9 + (-4x^2 - 27x^3 - 27x + 6)\sqrt{(x^2+1)}}{\left(x^3 - 3 + 2\sqrt{(x^2+1)}\right)^{\frac{5}{3}} (x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

  Setzen wir

$$a = 6x^5 + 27x^3 + 18x - 9$$
$$b = \left(-4x^2 - 27x^3 - 27x + 6\right)\sqrt{(x^2+1)}$$

  suchen wir die Nullstellen von $a+b$. Mit *fsolve* finden wir jedoch nur 1 Nst. hiervon, also betrachten wir die Nullstellen von

$$p := a^2 - b^2 = 36x^{10} - 405x^8 - 1258x^6 - 216x^5 - 1183x^4 - 54x^3 - 393x^2 + 45 - 216x^7$$

  Hier finden wir 4 Nullstellen

  -3.526599830
  -.3031373889
  .2926397473
  3.912892734

  von denen

  .2926397473

  eine Nullstelle von $a - b = 0$ jedoch nicht von $a + b$ ist. Wir müssen nun zeigen, daß es außer den gefundenen 4 Nullstellen von p keine weiteren gibt. Dazu betrachten wir $p^{(j)}$ für $j = 0, ..., n-1$. Haben wir die Anzahl der Nullstellen von $p^{(j)}$ und eine numerische Approximation der Nullstellen, kennen wir die Extremwerte von $p^{(j-1)}$ und können aus Asymptotik und Funktionswerten die Anzahl der Nullstellen von $p^{(j-1)}$ bestimmen. Wir erhalten:

j	Numerisch gefundene Lösungen x_i von $p^{(j)}$	Vorzeichen von $p^{(j-1)}(x_i)$	also hat $p^{(j-1)}$ folg. Anzahl von Nst.
9	0	$-$	2
8	-.5000000000, .5000000000	$+,-$	3
7	-.8305409518, -.6706892285e-1, .8976098746	$-,-,-$	2
6	-1.203618564, 1.321591638	$+,-$	3
5	-1.584266467, -.2905037060e-1, 1.749832667	$-,-,-$	2
4	-1.969156048, 2.180442164	$+,-$	3
3	-2.356541447, -.1146366870e-1, 2.612448988	$-,-,-$	2
2	-2.745546931, 3.045362802	$+,-$	3
1	-3.135672559, 0., 3.478903105	$-,+,-$	4
0	-3.526599830, -.3031373889, .2926397473, 3.912892734		