Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Übungsblatt 8

Abgabetermin Montag 6.1.2003 vor der Vorlesung

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:
   (a) $\lim_{x \searrow 0} x^x$
   (b) $\lim_{x \searrow 0} x (\ln x)^n$
   (c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$
   (d) $\lim_{k \to 0} S_k (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in \mathbb{R}$ und
   $$S_k (a, b) = \left(\frac{a^k + b^k}{2} \right)^{\frac{1}{k}}$$

2. Diskutieren Sie die Funktionen
   $$\begin{aligned} f_1, f_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f_1 (x) &= \cos x - x \\ f_2 (x) &= 2 \cos x - x \end{aligned}$$
   (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte). Verwenden Sie wo nötig das Newtonverfahren.

3. Zeigen Sie: Die Funktion
   $$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f (x) &= \left\{ \begin{array}{ll} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$
   ist in $x = 0$ differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar (d.h. die Ableitung ist in $x = 0$ nicht stetig).

4. Betrachten Sie die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung
   $$y'' (t) + 2 \lambda y' (t) + \omega_0^2 y (t) = 0$$
   mit $\lambda, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie:
   - Für $\lambda < \omega_0$ löst
     $$y (t) = a e^{-\lambda t} \cos (\omega (t + t_0))$$
     mit
     $$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$
     und $a, t_0 \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung.

- Für $\lambda = \omega_0$ löst
$$y(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\lambda t}$$
- Für $\lambda > \omega_0$ löst
$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$
mit
$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Zeichnen Sie die Funktionen $y(t)$ für je ein Beispiel mit $\lambda < \omega_0$, $\lambda = \omega_0$, $\lambda > \omega_0$.

5. Seien $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$, $a \geq b$. Der Euklidische Algorithmus zur Berechnung von $ggT(a, b)$ benötige n Divisionsschritte. Zeigen Sie
$$n \leq \frac{\log_2\left(b\sqrt{5}\right)}{\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \approx 1.441 \cdot \log_2(b) + 1.673$$
(Hinweis: Fibonacci-Zahlen).