WS 02/03 Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 8

Abgabetermin Montag 6.1.2003 vor der Vorlesung

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim_{x\searrow 0} x^x$

   (b) $\lim_{x\searrow 0} x\,(\ln x)^n$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$

   (d) $\lim_{k\to 0} S_k\,(a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in \mathbb{R}$ und

$$S_k\,(a,b) = \left(\frac{a^k + b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Lösung:

(c) Wir haben $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ und damit $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Im folgenden bezeichne $(*)$ die Anwendung der Regel von l'Hospital.

(b) Behauptung

$$\lim_{x\searrow 0} x\,(\ln x)^n = 0$$

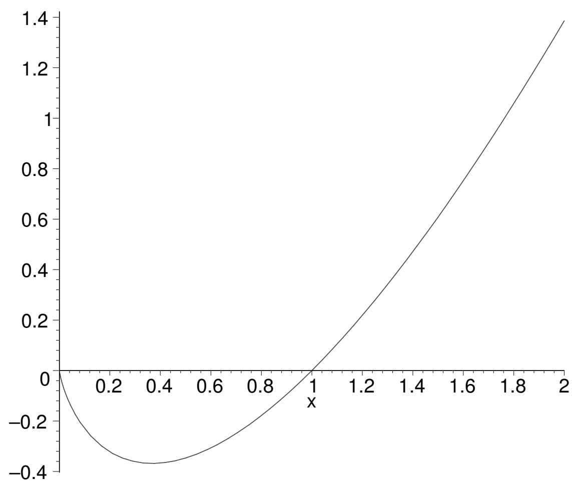
für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für $n < 0$ ist die Aussage klar. Beweis mit vollst. Induktion für $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$:

Induktionsanfang $n = 0$: Ist auch klar.

Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$:

$$\lim_{x\searrow 0} x\,(\ln x)^n = \lim_{x\searrow 0} \frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}} \overset{(*)}{=} -n \lim_{x\searrow 0} \frac{(\ln x)^{n-1}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -n \lim_{x\searrow 0} x\,(\ln x)^{n-1} \overset{IV}{=} 0$$

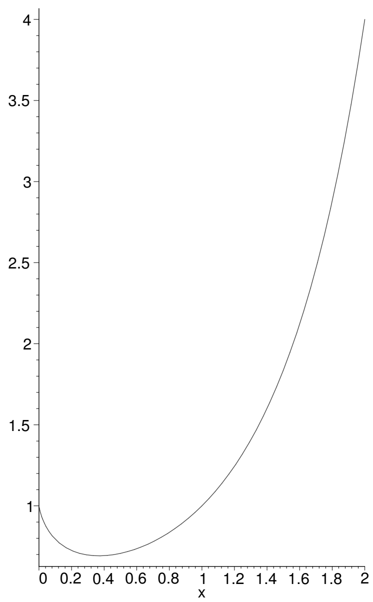
Plot $x \ln x$:



(a) Mit (b) und der Stetigkeit der exp-Funktion

$$\lim_{x\searrow 0} x^x = \lim_{x\searrow 0} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\searrow 0} x\ln(x)} = e^0 = 1$$

Plot x^x:



(d) Es gilt

$$\ln\left(S_k\left(a,b\right)\right) = \frac{\ln\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)}{k}$$

und damit

$$\lim_{k\to 0}\ln\left(S_k\left(a,b\right)\right) = \lim_{k\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)}{k} \overset{(*)}{=} \lim_{k\to 0}\frac{\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)^{-1}\cdot\frac{(\ln a)a^k+(\ln b)b^k}{2}}{1}$$
$$= \lim_{k\to 0}\frac{(\ln a)\,a^k+(\ln b)\,b^k}{a^k+b^k} = \frac{(\ln a)+(\ln b)}{2} = \ln\left(\sqrt{a\cdot b}\right)$$

also mit der Stetigkeit der exp-Funktion

$$\lim_{k\to 0} S_k\left(a,b\right) = \sqrt{a\cdot b}$$

2. Diskutieren Sie die Funktionen

$$f_1, f_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f_1\left(x\right) = \cos x - x$$
$$f_2\left(x\right) = 2\cos x - x$$

(Nullstellen, Extrema, Wendepunkte). Verwenden Sie wo nötig das Newtonverfahren.

Lösung:

Sowohl f_1 als auch f_2 sind stetig und beliebig oft differenzierbar.

(a) Wir diskutieren f_1:

- Ableitungen:
  $f_1'(x) = -\sin x - 1$
  $f_1''(x) = -\cos x$
  $f_1'''(x) = \sin x$
- Extremwerte und Wendepunkte
  $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$
  $f_1''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$
  also haben wir Sattelpunkte in $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$
  und Wendepunkte in $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, denn $\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \pi k\right) = \pm 1 \neq 0$.
- Nullstellen:
  Da $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \infty$ existiert eine Nullstelle von f_1. Da $f_1'(x) \leq 0\ \forall x$ gibt es genau 1 Nullstelle ξ. Diese suchen wir mit dem Newtonverfahren (f_1 ist konkav auf dem Intervall $[0,1]$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) < 0$, Startwert $t_0 = 1$ und $t_{i+1} = t_i - \frac{f_1(t_i)}{f_1'(t_i)}$). Es gilt dann folgende Fehlerabschätzung:

$$|t_{i+1} - t_i| \leq |\xi - t_i| \leq \frac{K}{2C}|t_i - t_{i-1}|^2$$

  mit

$$0 \geq f_1''(x) \geq K$$
$$f_1'(x) \leq C < 0$$

  Konkret können wir nehmen $K := f_1''(0) = -1$ und $C := f_1'(0) = -1$ also

$$|\xi - t_i| \leq \frac{1}{2}|t_i - t_{i-1}|^2$$

  Newtonverfahren mit Maple:

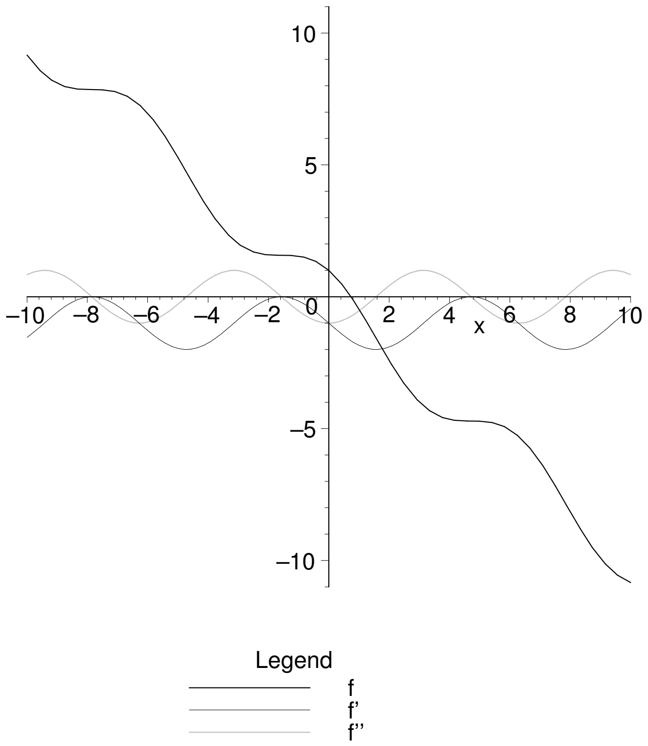
```
># Wir suchen eine Nullstelle von
>h:=cos(x)-x;
># maximale Abweichung des Funktionswertes von 0
>epsilon:=10^(-15);
># Startwert
>t:=1;
># die Ableitung von h
>h1:=diff(h,x);
># Rechengenauigkeit
>digits:=25;
h := cos(x) - x
epsilon := 1/1000000000000000
t := 1
```

```
h1 := -sin(x) - 1
digits := 25
># Wir geben aus:
># Nummer des Newtonschritts, Approximation der Nst, Funktionswert dort, Fehlerabschätzung
>#
>f:=x0->(evalf(subs({x=x0},h),digits)):
>f1:=x0->(evalf(subs({x=x0},h1),digits)):
>T:=[t]:
>lprint(0,t,f(t));
>for i from 1 while abs(f(t))>epsilon do
>t:=evalf(t-f(t)/f1(t),digits);
>lprint(i,t,f(t),evalf(1/2*(t-T[i])^2,digits));
>T:=[op(T),t];
>od:
```

0	1	-.4596976941318602825990634	
1	.7503638678402438930349423	-.1892307382211741956 40231e-1	.3115909923984160861889627e-1
2	.7391128909113616703605853	-.4645589899079444 12385e-4	.6329224092712002554693820e-4
3	.7390851333852839697601251	-.2847204483715932e-9,	.3852401269771144405083051e-9
4	.7390851332151606416617026	-.106952e-19	.1447097338164175525492350e-19

Bemerkung: Man überprüfe, daß tatsächlich $|t_{i+1} - t_i| \leq \frac{1}{2} |t_i - t_{i-1}|^2$ gilt.

- Plot:



(b) Wir diskutieren f_2:

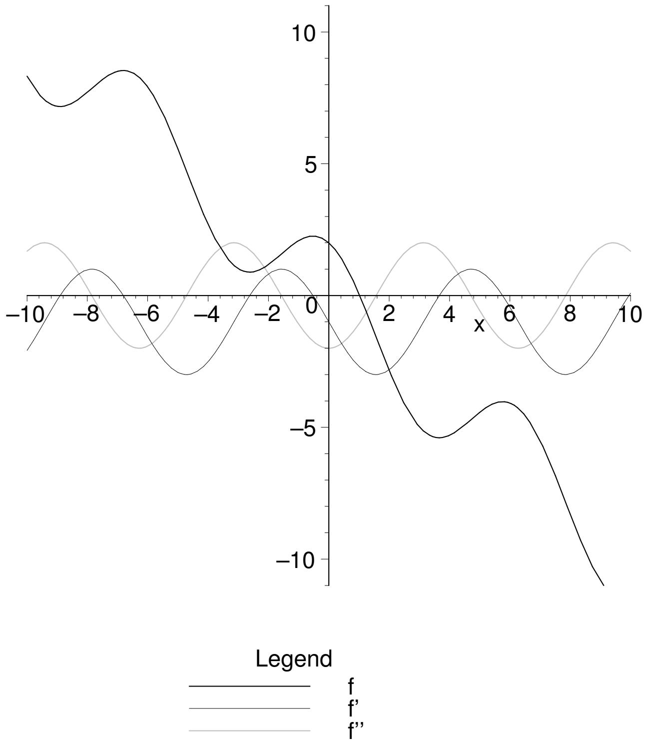
- Ableitungen:
  $f_2'(x) = -2\sin x - 1$
  $f_2''(x) = -2\cos x$
  $f_2'''(x) = 2\sin x$
- Extremwerte:
  $f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi k$ oder $x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$
  Es gilt
  $$f_2''\left(-\frac{1}{6}\pi + 2\pi k\right) = -2\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} < 0$$
  $$f_2''\left(-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right) = -2\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$$
  also haben wir lokale Maxima in $x = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und lokale Minima in $x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
- Wendepunkte:
  $f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also haben wir hier Wendepunkte, denn $\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \pi k\right) \neq 0$.
- Nullstellen:
  Es gilt $f_2(x_0 + 2\pi k) > f_2(x_0 + 2\pi(k+1))$ für alle x_0 und k. Da zwischen dem Minimum $f_2\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + \frac{5}{6}\pi > 0$ und dem Maximum $f_2\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi < 0$ genau 1 Maximum und ein Minimum liegen, folgt, daß f_2 genau 1 Nullstelle hat.
  Diese suchen wir wieder mit dem Newtonverfahren (f_2 ist konkav auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(0) = 2 > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$, Startwert $t_0 = \frac{\pi}{2}$ und $t_{i+1} = t_i - \frac{f_2(t_i)}{f_2'(t_i)}$). In der Fehlerabschätzung können wir nehmen:
  $$K := f_2''(0) = -2$$
  $$C := f_2'(0) = -1$$
  also
  $$|\xi - t_i| \leq 2\,|t_i - t_{i-1}|^2$$
  Newtonverfahren mit Maple:

```
># Wir suchen eine Nullstelle von
>h:=2*cos(x)-x;
># maximale Abweichung des Funktionswertes von 0
>epsilon:=10^(-18);
># Startwert
>t:=evalf(Pi/2);
># die Ableitung von h
>h1:=diff(h,x);
># Rechengenauigkeit
>digits:=26;
h := 2 cos(x) - x
```

epsilon := 1/1000000000000000000
t := 1.570796327
h1 := -2 sin(x) - 1
digits := 26
```
># Wir geben aus:
># Nummer des Newtonschritts, Approximation der Nst, Funktionswert dort, Fehlerabschätzung
>#
>f:=x0->(evalf(subs({x=x0},h),digits)):
>f1:=x0->(evalf(subs({x=x0},h1),digits)):
>T:=[t]:
>lprint(0,t,f(t));
>for i from 1 while abs(f(t))>epsilon do
>t:=evalf(t-f(t)/f1(t),digits);
>lprint(i,t,f(t),evalf(2*(t-T[i])^2,digits));
>T:=[op(T),t];
>od:
```

0	1.570796327	-1.5707963274102067615373566	
1	1.0471975511965977461468723	-.4719755119659774613415 53e-1	.54831135604564299508985714
2	1.0299220484622263406979593	-.15070610163986789234 29e-3	.59688598945054781290475200e-3
3	1.0298665299069371167599999	-.15870861427399205e-8	.61646199628052305949631192e-8
4	1.0298665293222588276669672	-.1760292e-18	.68369740347351184144551136e-18

- Plot:



3. Zeigen Sie: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{array} \right\}$$

ist in $x = 0$ differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar (d.h. die Ableitung ist in $x = 0$ nicht stetig).

Lösung:

In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f differenzierbar mit den Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

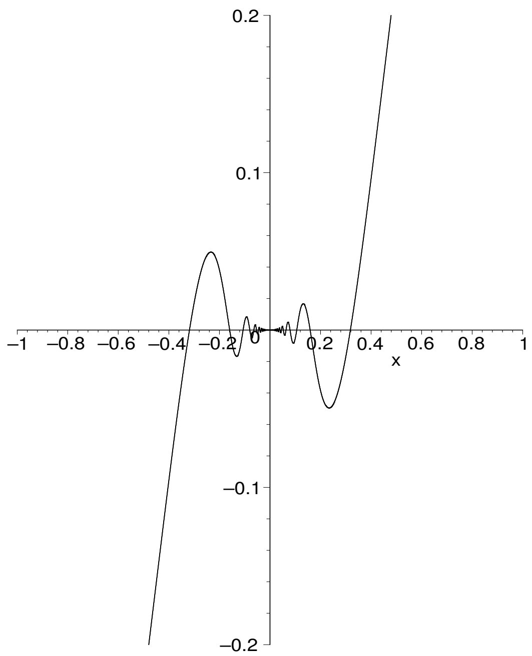
Im Nullpunkt ist f differenzierbar, denn

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

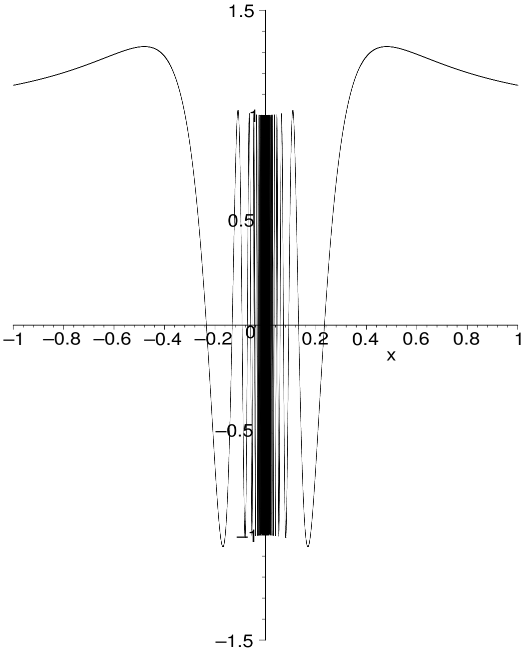
also $f'(0) = 0$.

f ist im Nullpunkt nicht stetig differenzierbar, denn $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht ($\cos\left(\frac{1}{x}\right)$-Term, $\lim_{x\to 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$).

Plot von f:



Plot von f':



4. Betrachten Sie die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung

$$y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

mit $\lambda, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie:

- Für $\lambda < \omega_0$ löst

$$y(t) = ae^{-\lambda t}\cos(\omega(t + t_0))$$

mit

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

und $a, t_0 \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung.

- Für $\lambda = \omega_0$ löst

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\lambda t}$$

- Für $\lambda > \omega_0$ löst

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

mit

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Zeichnen Sie die Funktionen $y(t)$ für je ein Beispiel mit $\lambda < \omega_0$, $\lambda = \omega_0$, $\lambda > \omega_0$.

Lösung:

- $\lambda < \omega_0$:

$$\begin{aligned} y(t) &= ae^{-\lambda t}\cos(\omega(t+t_0)) \\ y'(t) &= -\lambda\left(ae^{-\lambda t}\cos(\omega(t+t_0))\right) - \omega\left(ae^{-\lambda t}\sin(\omega(t+t_0))\right) \\ &= ae^{-\lambda t}\left(-\lambda\cos(\omega(t+t_0)) - \omega\sin(\omega(t+t_0))\right) \\ y''(t) &= \lambda^2\left(ae^{-\lambda t}\cos(\omega(t+t_0))\right) + \lambda\omega\left(ae^{-\lambda t}\sin(\omega(t+t_0))\right) \\ &\quad + \lambda\omega\left(ae^{-\lambda t}\sin(\omega(t+t_0))\right) - \omega^2\left(ae^{-\lambda t}\cos(\omega(t+t_0))\right) \\ &= ae^{-\lambda t}\left(\cos(\omega(t+t_0))\left(\lambda^2-\omega^2\right) + 2\lambda\omega\sin(\omega(t+t_0))\right) \end{aligned}$$

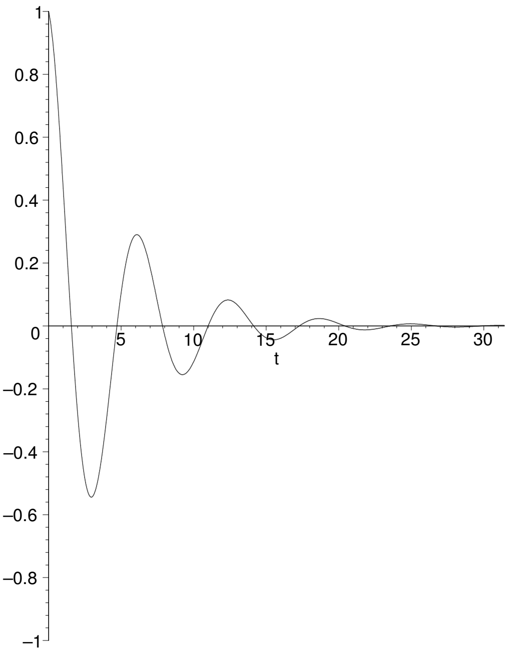
Eingesetzt in die Differentialgleichung und sortiert nach cos und sin ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega_0^2 y(t) \\ &= ae^{-\lambda t}\left(\cos(\omega(t+t_0))\left(\lambda^2-\omega^2-2\lambda^2+\omega_0^2\right) + \sin(\omega(t+t_0))(2\lambda\omega - 2\lambda\omega)\right) \\ &= ae^{-\lambda t}\cos(\omega(t+t_0))\left(-\omega^2-\lambda^2+\omega_0^2\right) \end{aligned}$$

was erfüllt ist genau dann, wenn

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

Beispielplot $y(t)$ mit $\omega_0 = 1$ und $\lambda = \frac{1}{5}$ und den Anfangsbedingungen $a = 1$ und $t_0 = 0$:



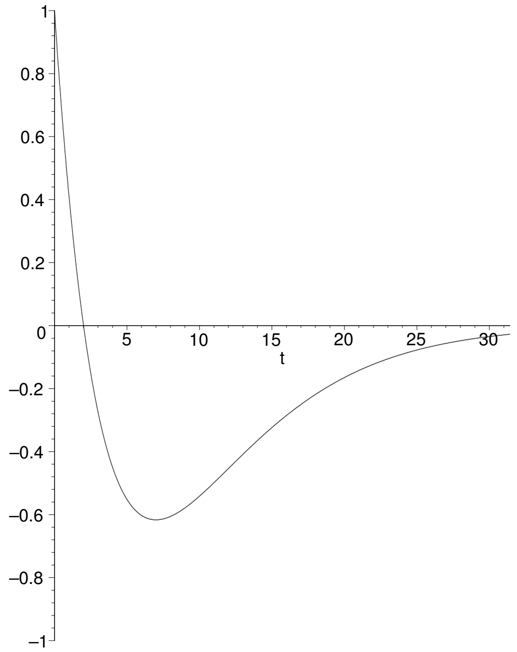
- $\lambda = \omega_0$:

$$\begin{aligned} y(t) &= (c_1 + c_2 t)\cdot e^{-\lambda t} \\ y'(t) &= -\lambda\cdot(c_1+c_2t)\cdot e^{-\lambda t} + c_2\cdot e^{-\lambda t} \\ &= c_1 e^{-\lambda t}(-\lambda) + c_2 e^{-\lambda t}(-\lambda\cdot t + 1) \\ y''(t) &= \lambda^2\cdot(c_1+c_2t)\cdot e^{-\lambda t} - 2\lambda\cdot c_2\cdot e^{-\lambda t} \\ &= c_1e^{-\lambda t}\lambda^2 + c_2e^{-\lambda t}\left(\lambda^2\cdot t - 2\lambda\right) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& y''(t) + 2\lambda y'(t) + \lambda^2 y(t) \\
& = c_1 e^{-\lambda t}\left(\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2\right) + c_2 e^{-\lambda t}\left(\lambda^2 \cdot t - 2\lambda - 2\lambda^2 \cdot t + 2\lambda + \lambda^2 \cdot t\right) \\
& = 0
\end{aligned}
$$

Beispielplot $y(t)$ mit $\omega_0 = 1$ und $\lambda = \frac{1}{5}$ und den Anfangsbedingungen $c_1 = 1$ und $c_2 = -\frac{1}{2}$:



- $\lambda > \omega_0$:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\
y'(t) &= c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} \\
y''(t) &= c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t}
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$
\begin{aligned}
0 &= y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega_0^2 y(t) \\
&= c_1 e^{r_1 t}\left(r_1^2 + 2\lambda r_1 + \omega_0^2\right) + c_2 e^{r_2 t}\left(r_2^2 + 2\lambda r_2 + \omega_0^2\right)
\end{aligned}
$$

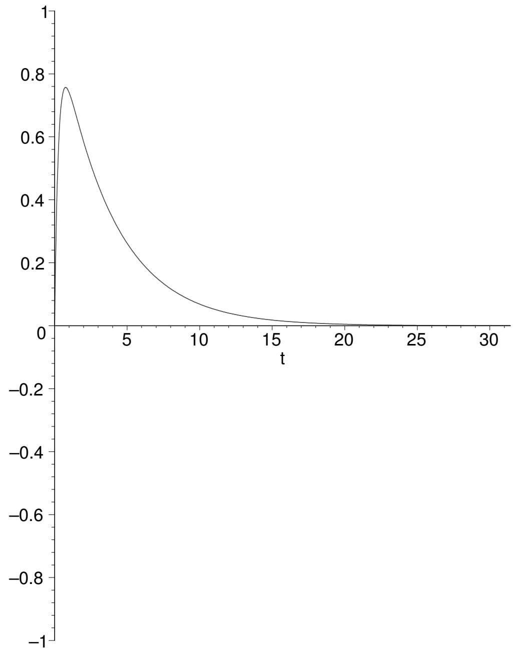
genau dann wenn r_1 und r_2 die quadratische Gleichung

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

lösen.

Beispielplot $y(t)$ mit $\omega_0 = 1$ und $\lambda = 2$ und den Anfangsbedingungen $c_1 = 1$ und

$c_2 = -1$:



5. Seien $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$, $a \geq b$. Der Euklidische Algorithmus zur Berechnung von $ggT\,(a, b)$ benötige n Divisionsschritte. Zeigen Sie

$$n \leq \frac{\log_2\left(b\sqrt{5}\right)}{\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \approx 1.441 \cdot \log_2(b) + 1.673$$

(Hinweis: Fibonacci-Zahlen).

Lösung:

Sei a_n die Fibonacci-Folge

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 3$$

- Wir zeigen zunächst:
  Sind $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$, $a > b$ und der Euklidische Algorithmus zur Berechnung von $ggT\,(a, b)$ benötige $n \geq 1$ Divisionsschritte, dann gilt

$$\begin{aligned} a &\geq a_{n+2} \\ b &\geq a_{n+1} \end{aligned} \qquad (*)$$

  Beweis mit vollst. Induktion nach n:
  Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $b \geq 1 = a_2$ und $a \geq 2 = a_3$.
  Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:
  Angenommen das Paar a, b benötigt $n + 1$ Divisionsschritte im Euklidischen Algorithmus. Sei $r := a \bmod b$ und

$$a = q \cdot b + r \text{ mit } 0 < r < b$$

für ein q. Dann benötigt das Paar b, r im Euklidischen Algorithmus n Divisionsschritte, also nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} b &\geq a_{n+2} \\ r &\geq a_{n+1} \end{aligned}$$

Damit

$$a = q \cdot b + r \geq b + r \geq a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+3}$$

- Für $a = b > 1$ ist die Aussage $(*)$ ebenfalls richtig.
  Für $a = b = 1$ gilt nur $b \geq a_2 = 1$.
- Wir verwenden nun die Formel

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^n - \beta^n \right)$$

mit

$$\alpha = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}$$

aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 5 um a_n abzuschätzen. Wir haben:

$$b \geq a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \right)$$

also $\sqrt{5}b + \beta^{n+1} \geq \alpha^{n+1}$ und damit

$$\begin{aligned} n + 1 &\leq \frac{\ln\left(\sqrt{5}b + \beta^{n+1}\right)}{\ln(\alpha)} \\ &\leq \frac{\ln\left(\sqrt{5}b\right) + \beta^{n+1}}{\ln(\alpha)} \\ &\leq \frac{\ln\left(\sqrt{5}b\right)}{\ln(\alpha)} + \frac{\beta^{n+1}}{\ln(\alpha)} \\ &\leq \frac{\ln\left(\sqrt{5}b\right)}{\ln(\alpha)} + \frac{\beta^{2}}{\ln(\alpha)} \end{aligned}$$

wobei wir $\ln(x + c) \leq \ln(x) + c$ für $x \geq 1$ und $c \geq 0$ verwendet haben. Wegen $\frac{\beta^2}{\ln(\alpha)} < 1$ gilt also

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{\ln\left(\sqrt{5}b\right)}{\ln(\alpha)} = \frac{\log_2\left(\sqrt{5}b\right)}{\log_2(\alpha)} = \frac{\log_2(b)}{\log_2(\alpha)} + \frac{\log_2\left(\sqrt{5}\right)}{\log_2(\alpha)} \\ &\approx 1.441 \cdot \log_2(b) + 1.673 \end{aligned}$$