WS 02/03

PROF. DR. FRANK-OLAF SCHREYER
JANKO BOEHM

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 9

Abgabetermin Montag 13.1.2003 vor der Vorlesung

1. Berechnen Sie die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=x^4-5x^2+4$$

eingeschlossene Fläche und fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen von f:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 4}}{2}=\frac{5\pm 3}{2} \Leftrightarrow x^2=1$ oder $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 1$ oder $x=\pm 2$ und bezeichnen diese mit $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$.

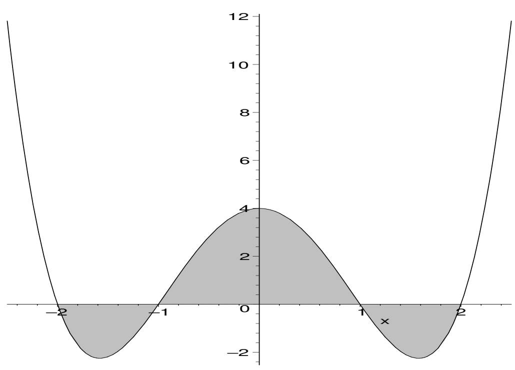
Wegen $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$, wissen wir daß $f(x)>0$ für $x\in\,]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]2,\infty[$ und $f(x)<0$ für $x\in\,]-2,-1[\,\cup\,]1,2[$. Weiter wissen wir, daß f achsensymmetrisch bzgl. $x=0$ ist. Somit ist die von dem Graphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche A gleich

$$A=-2\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx+2\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

Um das Integral zu berechnen bestimmen wir eine Stammfunktion $F=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x$. Damit ist

$$\begin{aligned}A&=-2\left(F(-1)-F(-2)\right)+2\left(F(0)-F(1)\right)\\&=2F(-2)-4F(-1)+2F(0)\\&=2\frac{-16}{15}-4\frac{-38}{15}+0\\&=8\end{aligned}$$

Plot von f:



2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

mittels der Substitution

$$x = \sin t$$

Lösung:

Mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin t)^2}\,(\cos t)\,dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2\,dt\end{aligned}$$

Mit partieller Integration:

$$\int (\cos t)^2\,dt - \int (\sin t)^2\,dt = [\cos t \sin t]$$

also

$$2\int (\cos t)^2\,dt - \int 1dt = [\cos t \sin t]$$

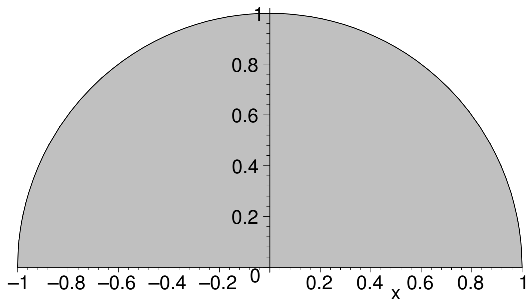
also

$$\int (\cos t)^2\,dt = \frac{1}{2}\left[(\cos t \sin t) + t\right]$$

Damit

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left[(\cos t \sin t) + t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Plot:



(a) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von

$$f\left(x\right)=\frac{x^5+3x^4+3x^3+3x^2+x+1}{x^3+3x+1}$$

(b) Zeigen Sie, für

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_{>-1}\to\mathbb{R} \\ f\left(x\right) &:= \sqrt[5]{x^3+\sqrt{x^7+1}} \end{aligned}$$

gilt

$$f\left(x\right)=x^{\frac{7}{10}}+O\left(x^{\frac{2}{10}}\right)$$

Lösung:

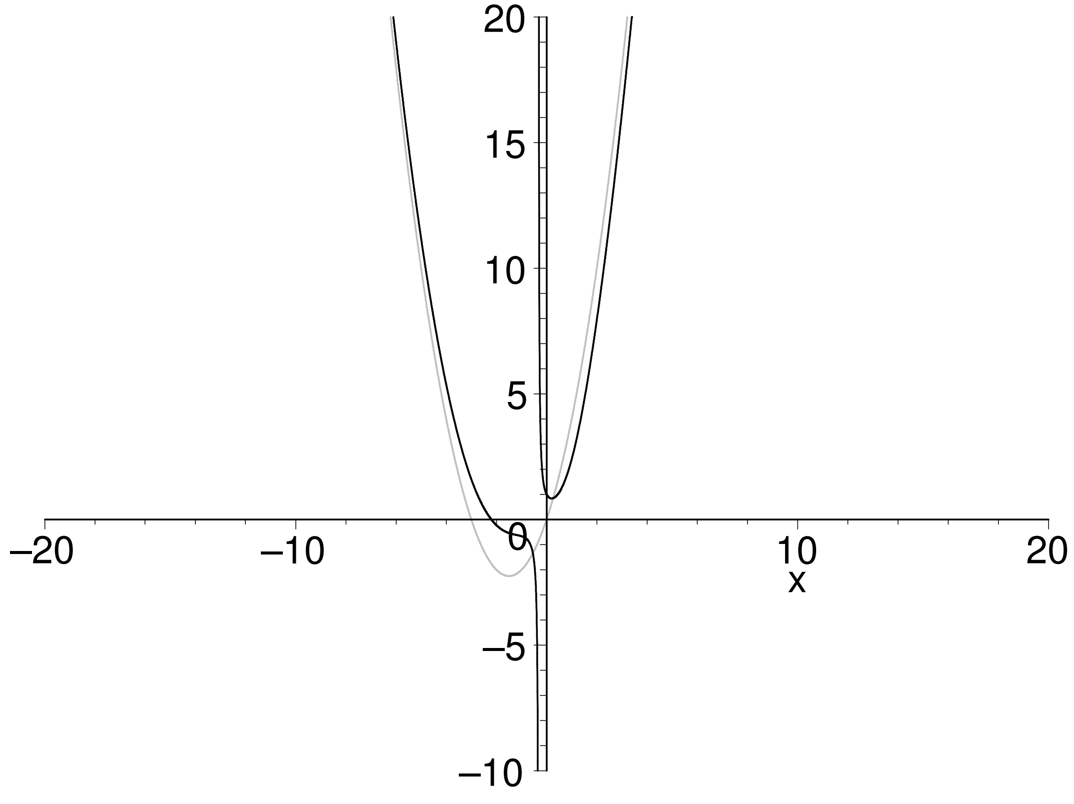
(a) Polynomdivision

$$\begin{array}{rllllll}
(& x^5+ & 3x^4+ & 3x^3+ & 3x^2+ & x+1 &):\left(x^3+3x+1\right)= \quad x^2+ \quad 3x+ \quad \frac{-7x^2-2x+1}{x^3+3x+1} \\
-(& x^5+ & & 3x^3+ & x^2 & &) \\
 & & 3x^4+ & & 2x^2+ & x+1 & \\
 & -(& 3x^4+ & & 9x^2+ & 3x &) \\
 & & & & -7x^2 & -2x+1 &
\end{array}$$

also

$$f\left(x\right)=x^2+3x+o\left(1\right)$$

Plot:



(b) Wir zeigen zunächst:

Für eine beliebige Funktion $g : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\beta < \alpha$ gilt:

$$g(x) = x^{\alpha} + O\left(x^{\beta}\right) \Leftrightarrow g^{n}(x) = x^{n\alpha} + O\left(x^{(n-1)\alpha+\beta}\right)$$

Beweis: Es ist

$$g^{n}(x) - x^{n\alpha} = (g(x) - x^{\alpha}) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (g(x))^{n-1-j} x^{j\alpha}}_{=:r(x)}$$

$\Rightarrow$: Nach Voraussetzung ist $g(x) - x^{\alpha} = O\left(x^{\beta}\right)$, insbes. $g(x) = O(x^{\alpha})$ und damit $r(x) = O\left(x^{(n-1)\alpha}\right)$. Insgesamt gilt dann $g^{n}(x) - x^{n\alpha} = O\left(x^{\beta+(n-1)\alpha}\right)$.

$\Leftarrow$: Nach Voraussetzung ist $g^{n}(x) - x^{n\alpha} = O\left(x^{\beta+(n-1)\alpha}\right)$, insbes. $g^{n}(x) = O(x^{n\alpha})$, also $g(x) = O(x^{\alpha})$ und damit $r(x) = O\left(x^{(n-1)\alpha}\right)$. Insgesamt gilt dann $g(x) - x^{\alpha} = O\left(x^{\beta}\right)$.

Sei nun $h(x) = \sqrt{x^{7}+1}$, also

$$h^{2}(x) = x^{7} + 1 = x^{7} + O(1) = x^{2\alpha} + O\left(x^{\alpha+\beta}\right)$$

in obiger Formel, d.h.

$$h(x) = x^{\frac{7}{2}} + O\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)$$

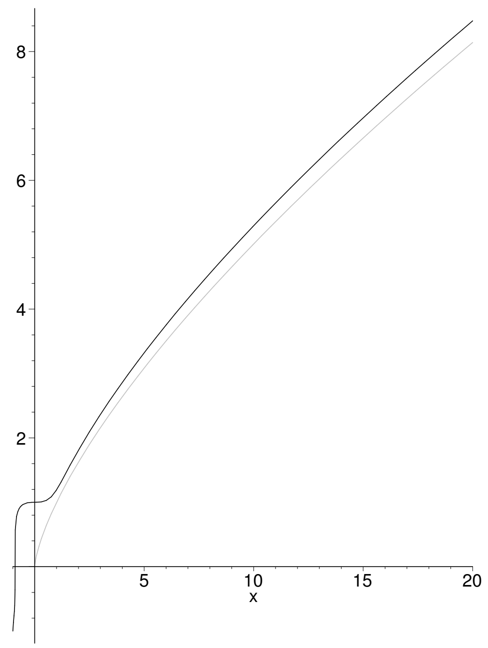
Weiter ist

$$f^{5}(x) = x^{3} + \sqrt{x^{7}+1} = x^{3} + h(x) = x^{\frac{7}{2}} + O\left(x^{3}\right) = x^{5\alpha} + O\left(x^{4\alpha+\beta}\right)$$

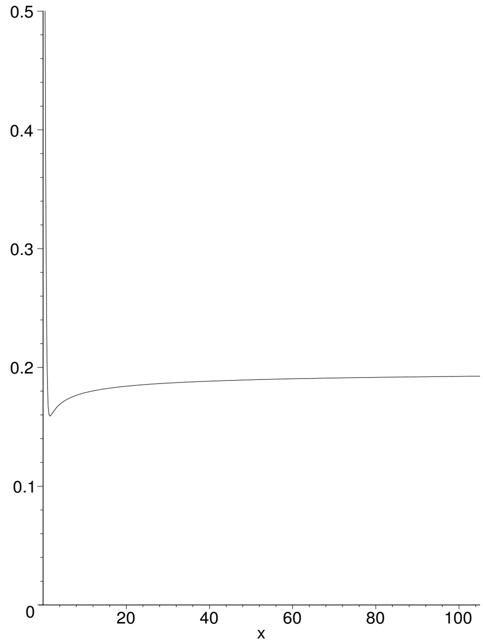
d.h.

$$f(x) = x^{\frac{7}{10}} + O\left(x^{3-\frac{28}{10}}\right) = x^{\frac{7}{10}} + O\left(x^{\frac{2}{10}}\right)$$

Plot von $f(x)$ und $x^{\frac{7}{10}}$:



Plot von $\frac{f(x)-x^{\frac{7}{10}}}{x^{\frac{2}{10}}}$:



3. Bestimmen Sie $H'(x)$ für

$$H : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$$
$$H(x) := \int_1^{x^2} t^{\frac{1}{3}} \ln(t)\, dt$$

Lösung:

Sei

$$F : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$$
$$F(y) := \int_1^{y} t^{\frac{1}{3}} \ln(t)\, dt$$

$t^{\frac{1}{3}} \ln(t)$ ist auf $\mathbb{R}_{\geq 1}$ stetig, also F differenzierbar und es gilt

$$F'(y) = y^{\frac{1}{3}} \ln(y)$$

Da $H(x) = F(x^2)$ ist

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'\left(x^2\right) \cdot 2x \\ &= 2x^{\frac{5}{3}} \ln\left(x^2\right) = 4x^{\frac{5}{3}} \ln(x) \end{aligned}$$

nach der Kettenregel.

4. Berechnen Sie für $b > 0$ folgendes Integral mittels Riemannscher Summen

$$\int_0^b e^x dx$$

Lösung:

Wir verwenden die äquidistanten Stützstellen $x_k = \frac{k \cdot b}{n}$, $k = 0, ..., n$. Mit $q_n := e^{\frac{b}{n}}$ ist

$$f(x_k) = e^{\frac{k \cdot b}{n}} = q_n^k$$

und für die Riemannsche Summe gilt

$$\begin{aligned} \Sigma_n := & \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ = & \sum_{k=0}^{n-1} (q_n)^k \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \frac{1-(q_n)^n}{1-q_n} \\ = & \frac{b}{n} \frac{1-e^b}{1-e^{\frac{b}{n}}} \end{aligned}$$

Da e^x Riemann-integrierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^b e^x dx &= \lim_{n\to\infty} \Sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \frac{1-e^b}{1-e^{\frac{b}{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(e^b - 1\right) \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= \left(e^b - 1\right) \end{aligned}$$

denn mit der Regel von l'Hospital ist $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{b}{n}}} = 1$.