

§ 13 Lokale Extrema und der Mittelwertsatz 62

13.1 Def.

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

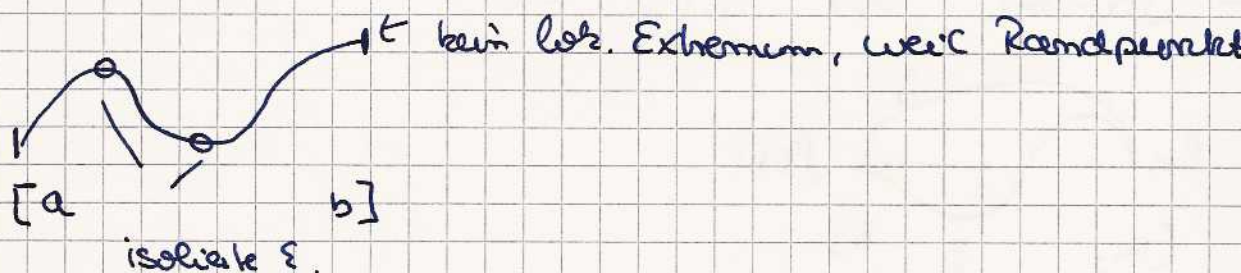
f nimmt in x_0 ein lokales Maximum (Minimum) an, wenn $\exists h > 0$ sd. $]x_0 - h, x_0 + h[\subset I$ und (Randpunkt)
 $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[$
 $(\geq)$

Ein lokales Extremum ist ein lok. Max. oder Min.

Ein lokales Extremum heißt isoliert, wenn die Ungleichung strikt ist:

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[\setminus \{x_0\}$$

Beispiel:



13.2 Satz

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in]a, b[$ ein Punkt in dem f ein Extremum annimmt.

Ist f in x_0 diffbar, dann gilt: $f'(x_0) = 0$

Beweis:

Wir betrachten ein lok. Maximum x_0 . Dann gilt

für $x < x_0$

$x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$x \rightarrow x_0$ liefert $0 \leq f'(x_0) \leq 0$

Bem.:

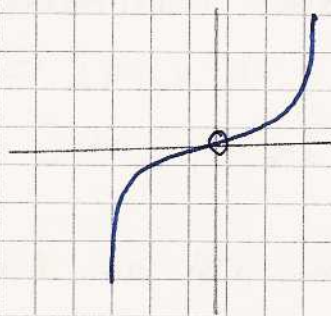
Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig aber nicht hinreichend für lokales Extremum.

Bsp.: $y = x^3 = f(x)$

$$(x^3)' = 3x^2$$

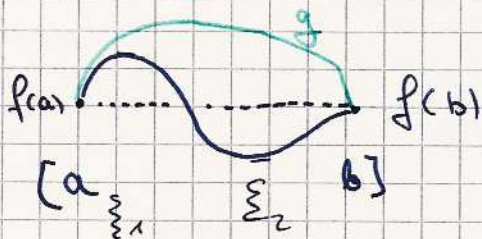
$$f'(0) = 0$$

(kein Extremum)



13.3 Satz (von Rolle)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf $]a, b[$ diff'bar.
gilt $f(a) = f(b)$, dann $\exists$ ein Mittelwert $\xi \in]a, b[$ so. $f'(\xi) = 0$



Beweis:

Die stetige Fkt. f nimmt auf $[a, b]$ Max. sowie Min. an. Sind diese gleich $\Rightarrow f$ ist konstant

$$\Rightarrow f' \equiv 0 \quad (\text{identisch})$$

Sind diese verschieden, so liegt eines der beiden Punkte im Inneren und für diesen ξ gilt $f'(\xi) = 0$, da ξ lokales Extremum ist.

13.4 Theorem (Mittelwertsatz)

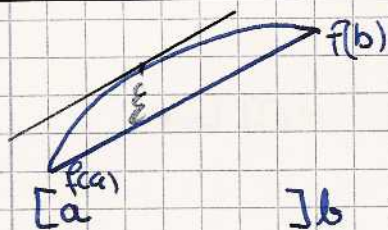
Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $]a, b[$ diff'bar.

Dann $\exists \xi \in]a, b[$, so.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Steigung des Sekanten

Steigung einer parallelen Tangente



Beweis:

Betrachten

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x-a),$$

$$\text{also } F(a) = F(b) = f(a)$$

$$\begin{aligned} \text{Satz von Rolle} &\rightarrow \exists \xi \text{ mit } 0 = F'(\xi) \\ &= f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \square \end{aligned}$$

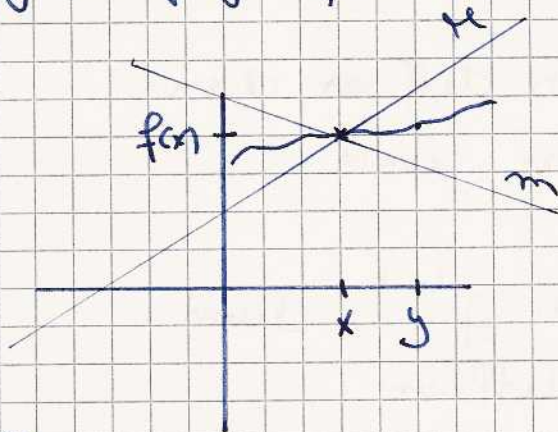
13.5 Mittelwertsatz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf $]a, b[$ diff'bar.
und $\xi \in]a, b[$ gelte

$$m \leq f'(\xi) \leq M$$

für Konstanten m und M unabhängig von ξ .

Dann gilt für alle x, y mit $a \leq x \leq y \leq b$,

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$$


Beweis

$$\text{denn q.w.s. gilt } m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x} = f'(\xi) \leq M \quad \square$$

13.6 Idioten:

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $]a, b[$ diffbar
und $f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in]a, b[$
 $\Rightarrow f$ ist konstant.

13.7 Def. + Satz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $]a, b[$ diffbar.

Wenn $\forall x \in]a, b[$

$f'(x) \geq 0$ gilt, dann ist f monoton steigend

$f'(x) > 0$

Streng monoton steigend

$f'(x) < 0$

"

"

fallend

$f'(x) \leq 0$

monoton fallend

Bew.: Angenommen f ist nicht monoton,

d.h. $\exists x < y \in [a, b]$ mit $f(x) > f(y)$

$$\Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0 \quad \text{↯}$$

□

13.8 Def:

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

ISI $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls diffbar, dann

heißt f 2-mal diffbar und

$$f'' = (f')'$$

allg. $\exists$ die Ableitung von $f^{(k)}$, dann

heißt f $(k+1)$ -mal diffbar

$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$$

13.9 Satz (Hinreichendes Kriterium für lok. Exrem)

$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ 2x diffbar und $x_0 \in]a, b[$

mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow f$ hat in x_0 ein isoliertes Extremum

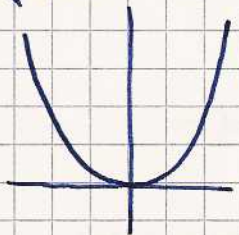
genauer:

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ isol. Minimum

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ isol. Maximum

Bsp.:

$$f(x) = x^2$$



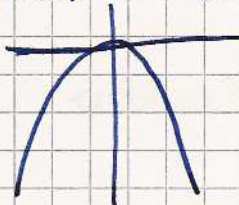
$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

$$f'(0) = 0$$

} lok. Minimum

$$f(x) = -x^2$$



$$f''(x) = -2 < 0$$

Bsp.:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \\ 0 & \text{für } x=0 \end{cases}$$



Beweis:

Es ist $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$

$\Rightarrow \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$ für x nahe x_0 ^{genauer} $[x_0-h, x_0+h]$

$\Rightarrow x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ ist in

$[x_0-h, x_0]$ ^{streng} monoton steigend

analog: $x > x_0 \Rightarrow f$ ist in $[x_0, x_0+h]$ st.-mon. fallend

→ f hat in x_0 ein Maximum



13.10 Def.

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 3x diffbar und $x_0 \in]a, b[$ ein Punkt mit

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

Dann heißt x_0 ein Wendepunkt von f .

Bsp.:

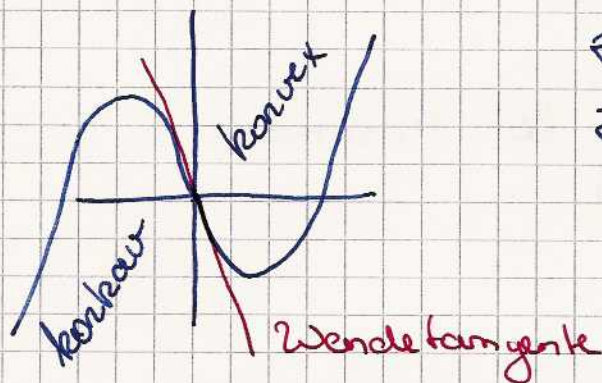
$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0$$

$x_0 = 0$ ist Wendepunkt



Es ändert sich f von konvex nach konkav oder umgekehrt.

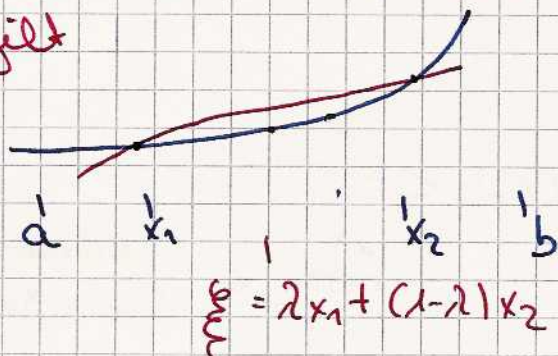
13.11. Def

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f heißt konvex auf $[a, b]$, wenn $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ und $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$(2x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

gilt



f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist

65

13.12 Satz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 2x diffbar.

f ist konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
auf $]a, b[$

Beweis:

a) $f''(x) = 0 \Rightarrow f'$ ist monoton wachsend.

Sei $x_1 < x_2$ und $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in]0, 1[$.

Also $x_1 < x < x_2$.

Dann folgt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'\left(\xi_1\right) \leq f'\left(\xi_2\right) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

nach dem MWS. dann

$$x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1), \quad x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

□

b) Sei f konvex. Angen. $\exists x_0 \in]a, b[$ mit $f''(x_0) < 0$

Sei $c = f'(x_0)$ und

$$\varphi(x) = f(x) - c(x - x_0)$$

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) - c = 0, \quad \varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$$

$\Rightarrow \varphi$ hat in x_0 ein lok. Maximum

$\Rightarrow \exists h > 0$ so.

$$\varphi(x_0 - h) < \varphi(x_0), \quad \varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) + f(x_0 - h) < 2f(x_0)$$

Dies widerspricht der Konvexität für $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 - h$
 $\lambda = 1-\lambda = \frac{1}{2}$ □

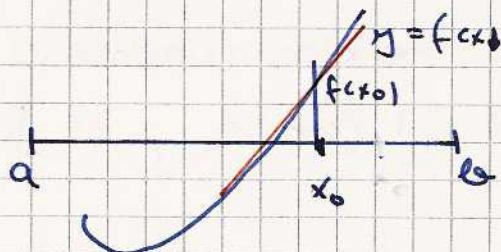
Das Newton-Verfahren zur Berechnung von Nullstellen

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2x diffb. Funktion

Es sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Wollen eine Nullstelle von f in $[a, b]$ durch ein Iterationsverfahren berechnen.

Idee:



x_n gegeben. Betrachten die Tangente an f im Punkt $(x_n, f(x_n))$ und deren Nullstelle

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Also Iterationsverfahren mit Startwert x_0 und

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dieses Verfahren konvergiert nicht immer.

13.13 Satz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 2x diffbar.

$f(a) < 0$, $f(b) > 0$ und f konvex, d.h.

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Dann gilt:

a) f hat genau eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$

b) Ist $x_0 \in [a, b]$ ein Startwert mit $f(x_0) > 0$,

dann ist die Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

wohldefiniert und konvergiert gegen ξ

c) Ist $f'(\xi) \geq c > 0$ und $f''(x) \leq K \quad \forall x \in [\xi, b]$

dann gilt $|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2c} |x_n - x_{n-1}|^2$

Man zeigt, das Newton-Verfahren konvergiert
quadratisch.

66

Beispiel :

$$f(x) = x^2 - \alpha$$

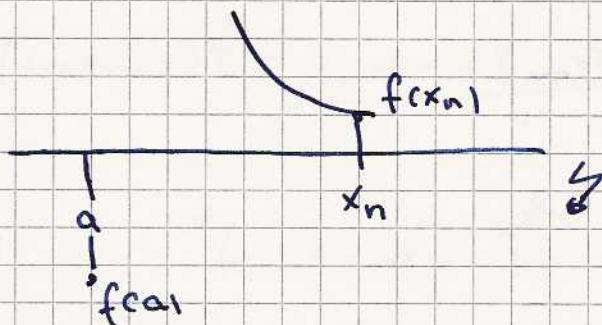
$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2 - \alpha)}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right)$$

die Rekursionsformel für $\sqrt{\alpha}$

Beweis :

a) $\exists \xi$ nach dem ZWS. ξ ist eindeutig wg.
der Konvexität

b) f konvex. $\Rightarrow f'$ ist monoton steigend, $f(a) < 0$
 $\Rightarrow f'(x_n) > 0$, denn $f'(x_n) < 0$, dann
wäre ξ zu $f(a) < 0$



$$\xi < x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

Also $\xi < x_{n+1} < x_n \quad \forall n$ und damit die
Folge wohldefiniert und monoton fallend

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ existiert.

$\Rightarrow \xi \leq \bar{x}$ und damit $f'(\bar{x}) > 0$

also

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \quad (\Leftrightarrow) \quad f(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \xi$$

c) Da f' monoton wachst folgt $f'(x) \geq c$
 $\forall x \in [\xi, b]$.

Mit dem Mittelwertsatz $\Rightarrow \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi_2)$

$$|x - \xi| \leq \frac{f(x)}{c}$$

Wissen $f(x)$ abschätzen

$$\text{Betrachten } \psi(x) = f(x) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) - \frac{k}{2}(x - x_{n-1})^2$$

$$\psi'(x) = f'(x) - f'(x_{n-1}) - k(x - x_{n-1})$$

$$\psi''(x) = f''(x) - k \leq 0 \quad \forall x \in [\xi, b] \Rightarrow \psi' \text{ fällt monoton}$$

$$\text{Da } \psi'(x_{n-1}) = 0 \Rightarrow \psi'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [\xi, x_{n-1}] \Rightarrow \psi \text{ mon fallend}$$

$$\text{Da auch } \psi(x_{n-1}) = 0 \Rightarrow \psi(x_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x_n) - \underbrace{f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}_{=0} - \frac{k}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x_n) \leq \frac{k}{2}(x_n - x_{n-1})^2$$

$$\Rightarrow |x_n - \xi| \leq \frac{f(x_n)}{c} \leq \frac{k}{2c}(x_n - x_{n-1})^2 \quad \square$$

§14 Spezielle Funktionen

67

14.1 Def.

Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$R = \text{Konvergenzradius} = \infty$

14.2 Satz

(Additionstheoreme)

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

Beweis:

$$\exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \quad \text{konvergiert absolut}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k \cdot z_2^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{\underbrace{(n-k)!}_j} \quad \text{konvergiert absolut}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_2^j}{j!} \quad \text{wg. Umordnungssatz}$$

$$= \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

14.3 Identities

a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(-z) = \exp(z)^{-1} = \frac{1}{\exp(z)}$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x) > 0$

c) Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\exp(n) = e^n$, wobei $e = \exp(1)$

Beweis

$$a) 1 = \exp(0) = \exp(z + (-z)) = \exp(z) \cdot \exp(-z) \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$b) x \geq 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 0, \text{ da alle Summanden positiv}$$

$$\text{Für } x < 0 \Rightarrow \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0 \text{ mit a)}$$

$$c) e = \exp(1) ; m > 0$$

$$\exp(m) = \exp\left(\sum_{j=1}^m 1\right) = \prod_{j=1}^m \exp(1) = e^m$$

$$m < 0 \text{ mit (a)}$$

$$\text{Wir schreiben daher auch } e^x = \exp(x) ;$$

Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion

Leitwert für $x_0 = 0$.

$$\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

14.4 Lemma (Restgliedabschätzung der Exponentialreihe)

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\tau_{N+1}(x)}_{\text{Restterm}}$$

Dann gilt

$$|\tau_{N+1}(x)| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \text{ für alle } x \text{ mit } |x| \leq 1 + 2 \frac{N}{N+1}$$

Beweis:

$$\tau_{N+1}(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{Wir schätzen mit einer geometr.$$

Reihe ab.

$$|\tau_{N+1}(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \left(1 + \frac{|x|}{(N+2)} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots\right)$$

$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{|x|}{N+2} \right)^k}_{\leq 1/2} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-1/2}}_{=2}$$

14.5 Satz

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist diffbar mit

$$(\exp')(x) = \exp(x)$$

Beweis:

Zunächst $x_0 = 0$

$$\frac{\exp(x) - 1}{x - 0} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x}$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{x^{n-1}}{n!} + \frac{r_N(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Wegen

$$0 \leq \left| \frac{r_{N+1}(x)}{x} \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{|x| \cdot (N+1)!} = \frac{|x|^N}{(N+1)!} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{gilt } \exp'(0) = 1 = \exp(0)$$

x_0 beliebig.

$$\frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \frac{\exp(x_0) \cdot \exp(h) - \exp(x_0)}{h}$$

$$= \exp(x_0) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \exp(x_0)$$

nach 1.lem Teil. also $\exp' = \exp$

Proposition:

$\exp$ ist monoton steigend, konvex, umkehrbar
oft diffbar.



14.6 Bemerkung

Warum ist exp wichtig?

2 Gründe

1. Satz:

Sei $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbare Funktion, die der
Differentialgleichung $y' = c \cdot y$ genügt, $c \in \mathbb{R}$
konstante, d.h. $f' = c \cdot f$

Dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) \cdot e^{c(x-x_0)}$$

Beweis:

$$\text{Sei } h(x) = f(x) \cdot e^{-cx}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot e^{-cx} + f(x) \cdot e^{-cx} \cdot (-c) \\ &= c f(x) \cdot e^{-cx} - c f(x) \cdot e^{-cx} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow h$ ist konstant

$$\Rightarrow h(x) = f(x) \cdot e^{-cx} = f(x_0) \cdot e^{-cx_0}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) \cdot e^{c(x-x_0)}$$

$$2) \exp(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$$

$\exp: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ Gruppenisomorphismus,

Isomorphismus

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

$$e = \exp(1), \quad \exp(x) = e^x$$

$$e = 2,7 \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

14.7 Def + Satz

69

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

die Umkehrabbildung von $\exp$ heißt natürlicher Logarithmus. Es gilt

- $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$
- $\ln(x_1^n) = n \cdot \ln(x_1)$

$\ln$ ist diffbar mit $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$



Beweis:

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{(\exp)'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad \square$$

Potenzen zu beliebiger Basis:

14.8 Def

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann def. wir

$$a^x := e^{x \cdot \ln a}$$

14.9 Satz

$$1) a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

$$2) a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^0 = 1$$

3) Für $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

4) $x \mapsto a^x$ ist diffbar, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Beweis

1) u. 2) folgen aus dem Additionstheorem +

$$(x_1 + x_2) \ln a = x_1 \ln a + x_2 \ln a$$

3) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$a^n = a \cdot \dots \cdot a$$

$$\underbrace{e^{\ln a} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln a} \cdot \dots \cdot e^{\ln a}}_{n \text{-Faktoren}}$$

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit 2)

$$n = \frac{-p}{q}$$

$$\sqrt[q]{a^p} = e^{\frac{-p}{q} \ln a}$$

$$\Leftrightarrow a^p = \left(e^{\frac{-p}{q} \ln a} \right)^q = e^{p \ln a}$$

Add. Th.

schon gezeigt

$$4) a^x = e^{x \cdot \ln a} = \exp(x \cdot \ln a)$$

$$(a^x)' = \exp(x \cdot \ln a) \cdot \ln a$$

Innere Ableitung

14.10 Def.

Für $a \in \mathbb{R}_{>1}$ ist $x \mapsto a^x$ streng mon. steigend

Die Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt logarithmieren zur Basis a .

Besonders wichtig $\log_2$, denn für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$\log_2 n \approx$ Anzahl der Bits zur Ziffern von n

Bsp.:

$$f(x) = x^x; \quad f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ableitung?

$$x^x = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$$

Trigonometrische Funktionen

70

14.11 Def.

Wir definieren

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, da Konvergenzradius $R = \infty$

14.12 Satz (Euler'sche Formel)

$$\exp(ix) = \cos x + i \cdot \sin x$$

Beweis:

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

wg. Umordnungssatz

$$= \cos x + i \sin x$$

14.13 Identities

1) (Additionstheorem)

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2$$

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2$$

$$2) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{Insbesondere } |\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1$$

$$\text{Wann: } \sin(-x) = -\sin x \quad (\text{ungerade Funktionen})$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad (\text{gerade Funktionen})$$

Beweis:

$$1) \cos(x_1 + x_2) + i \sin(x_1 + x_2)$$

$$= e^{i(x_1 + x_2)} = e^{ix_1} \cdot e^{ix_2}$$

$$= (\cos x_1 + i \sin x_1) (\cos x_2 + i \sin x_2)$$

$$= (\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2) + i (\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2)$$

$$2) 1 = \cos(0) = \cos(x + (-x)) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) \\ = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

14.14 Satz

$\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind diffbar

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

Beweis:

gleiche Vorgehensweise wie bei exp

$$\sin'(0) = ?$$

$$\cos'(0) = ?$$

$$\frac{\sin x - 0}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = \cos(0)$$

Restgliedabschätzung

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = \sin(0)$$

Restgliedabschätzung

Allgemein:

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \sin x_0 \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} + \cos(x_0) \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1}$$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x_0$

$$\frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} = \cos x_0 \cdot \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin x_0 \cdot \frac{\sin(h)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} -\sin x_0$$

14.15 Hilfssatz

a) $\cos(0) = 1, \quad \cos(2) < 0$

b) $\sin x > 0 \quad \forall x \in]0, 2]$

$\Rightarrow \cos$ ist in $[0, 2]$ streng monoton fallend

$\Rightarrow \exists!$ Nullstelle

Beweis:

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \dots$$

Alternierend!

$$1 - \frac{2^2}{2} = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$\frac{2^{2k}}{(2k)!} > \frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!} \quad (\Leftrightarrow) \quad (2k+1)(2k+2) > 2^2$$

Richtig $\forall k \geq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos 2 \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right)$$

$$\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} > \frac{x^{2k+2}}{(2k+3)!}$$

$$(\Leftrightarrow) (2k+2)(2k+3) > x^2$$

$$\Leftrightarrow 2k+2 \geq x$$

$$\Leftrightarrow k \geq 0 \text{ und } x \leq 2$$

$$x \geq \sin x \geq x \left(1 - \frac{x^2}{3!} \right)$$

$$\text{für } x \geq 2 : x \geq \sin x \geq x \left(1 - \frac{4}{6} \right) = \frac{1}{3}x > 0 \quad \square$$

14.16 Def.

Wir definieren π durch

$\pi/2$ ist die eindeutige Nullstelle von $\cos$ im Intervall $[0, 2]$.

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\ \text{da } \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{\pi}{2} > 0$$

$$\pi \approx 3,1415 \dots$$

14.17 Satz (Phasenverschiebung)

$$1) \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

$$2) \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$3) \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

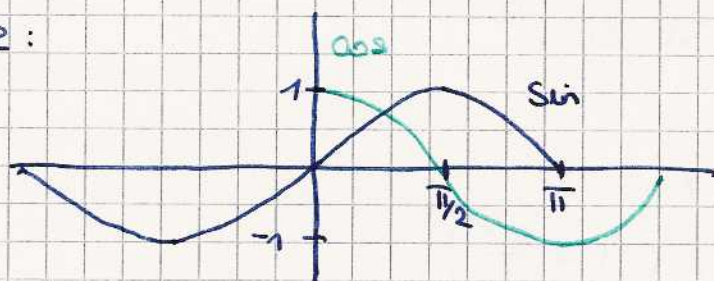
Also $\sin$ $\cos$ sind periodische Funktion mit Periode 2π

Beweis: Additionstheorem

Spezielle Werte

x	0	$\pi/2$	π	$3/2\pi$	2π	$5/4$	$\pi/3$
$\sin x$	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos x$	1	0	-1	0	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

Skizze:



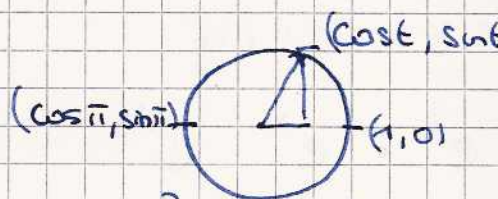
Bedeutung von Sinus, Cosinus

72

2 Gründe:

1) $\mathbb{R} \supset [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$



parametrisiert den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$

Fakt: Dies ist die Parametrisierung nach Bogenlänge

2) Cos und Sin beschreiben Lösungen der Differentialgleichung (*) $y'' = -y$

f. Lösung von (*) =

$$f(x) = a \cos x + b \sin x, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

harmonisches Oszillator

~~harmonisches Oszillator~~

dlg.:

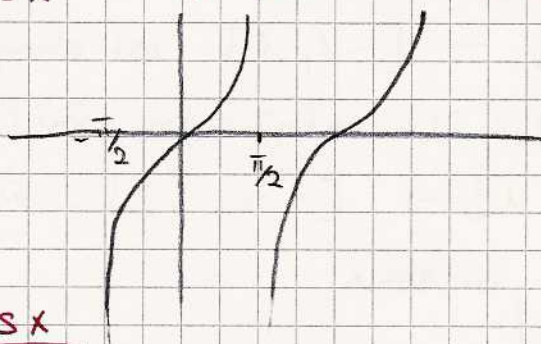
$$y'' = -\omega^2 y \Rightarrow f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$a^2 + b^2$ Amplitude

Def: $\tan, \cot$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

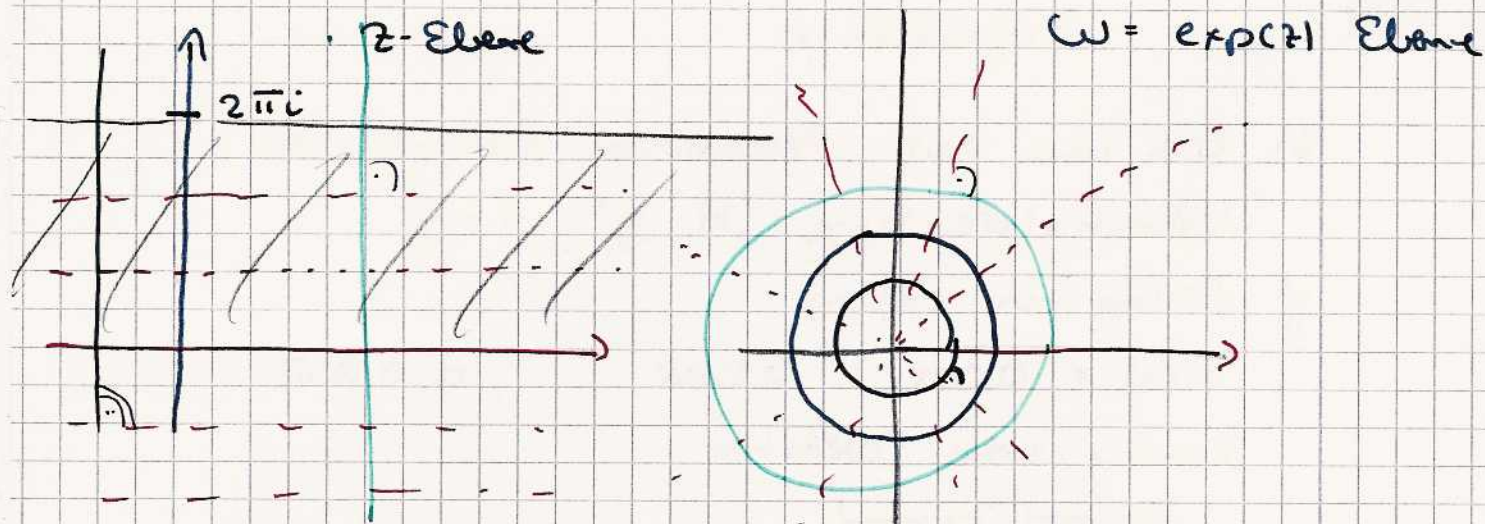
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Idomplexe Exponentialfunktion

$$z = x + iy$$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$$



14.18 Def. und Satz

a) $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

ist streng monoton steigend. Die Umkehrfunktion

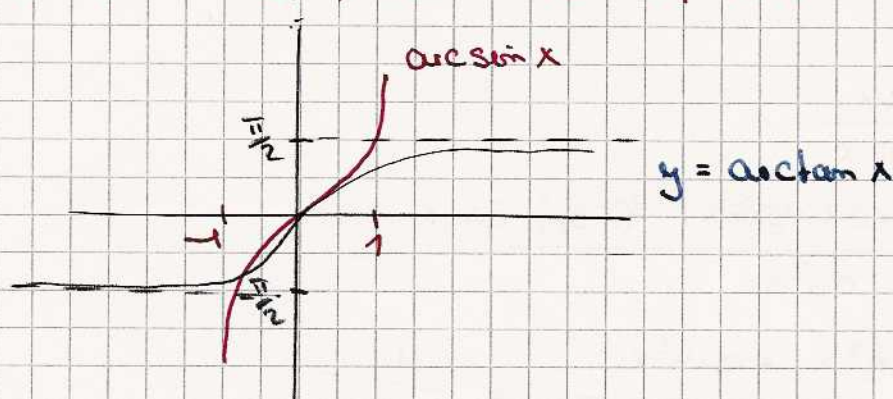
$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset \mathbb{R}$$

heißt Arcustangens

b) $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton

steigend und die Umkehrfunktion heißt

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}$$



a) arctan ist diffbar mit

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

b) arcsin ist auf $] -1, 1[$ diffbar mit

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis:

$$\sin' = \cos$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \text{auf }] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2(\arctan x)}{1}$$

$$= \frac{\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

□

§ 15 Asymptotisches Verhalten.

Sei $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Wollen Rumagen für $f(x)$ für große x treffen.

Die einfachste Aussage ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}$$

Bsp.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Andere Aussage

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

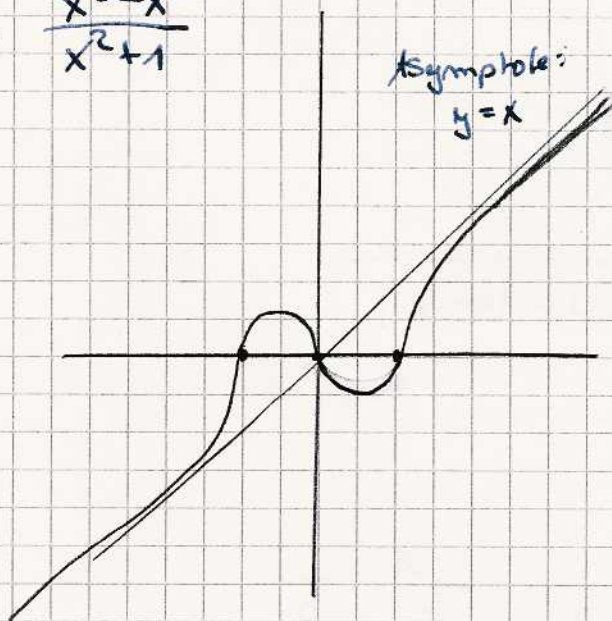
15.1 Def

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \text{ falls}$$

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 \text{ sodass } f(x) > K \quad \forall x \geq x_0$$

15.2 Beispiel:

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = \infty$$

Def: $\mathbb{R}[x] = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ 74
die Menge der Polynome.

15.3 Satz (Division mit Rest in $\mathbb{R}[x]$)

Seien f und g Polynome. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome q und r in $\mathbb{R}[x]$ mit

1) $f = g \cdot q + r$

2) $\deg r < \deg g$ (deg = degree = Grad)

Bsp:

$f = x^3 - x$, $g = x^2 + 1$

$x^3 - x : x^2 + 1 = x$

$$\begin{array}{r} x^3 - x \\ x^3 + x \\ \hline -2x \end{array}$$

$\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = x + \frac{-2x}{x^2 + 1}$

Beweis: Polynomdivision bzw. Induktion über $\deg f$. □

" $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \approx x$ für große x "

15.4 Def

$f, g : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Dann

$$\left. \begin{array}{l} a) f(x) = O(g(x)) \\ b) f(x) = o(g(x)) \\ c) f(x) = \Theta(g(x)) \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0 \exists x_0 \text{ s.d. } f(x) \leq C \cdot g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ \exists c_1, c_2, x_0 \text{ s.d. } c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x) \end{array} \right. \quad \forall x \geq x_0$$

Bsp:

$$1) \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = x + o(1)$$

$$\text{denn } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0$$

$$2) \quad 2x^2 + x + 1 = \mathcal{O}(x^2) \quad \text{genauer:}$$

$$2x^2 + x + 1 = \Theta(x^2)$$

noch genauer

$$2x^2 + x + 1 = 2x^2 + \mathcal{O}(x)$$

etwas ungenauer:

$$2x^2 + x + 1 = 2x^2 + o(x^2)$$

Wie kann man $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ entscheiden?

Typische Situation:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ macht keinen Sinn!}$$

15.5 Satz (Regel von l'Hospital)

Seien $f, g : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ diffbare Funktionen.

mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, \infty[$. Es gelte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $[\infty, \infty]$ existiert, dann

existiert auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und die Grenzwerte

sind gleich.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

15.6 Satz:

75

e^x wächst schneller als jedes Polynom,
genauer: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Beweis von 15.6:

$$m=0: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \checkmark$$

$m > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty; \quad g'(x) = (e^x)' = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m x^{m-1}}{e^x} \stackrel{IV}{=} \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m!}{e^x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m x^{m-1}}{e^x} = 0$$

15.7 Satz (Regel von l'Hospital)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar,

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Es gelte: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Existiert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{in } [-\infty, \infty],$$

dann existiert auch

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

auch für
 $\lim_{x \rightarrow \infty} = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty}$

In diesem Fall lassen sich f und g
stetig auf $[a, b]$ fortsetzen mit $f(a) = 0 = g(a)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

15.8 Hilfssatz

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $]a, b[$ diffbar
und $g(a) \neq g(b)$ und $g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$

Dann existiert $\xi \in]a, b[$ sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis des LS:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

Dann ist $F(a) = f(a) = F(b)$.

Satz von Rolle

$$\Rightarrow \exists \xi \text{ mit } F'(\xi) = 0$$

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

$\Rightarrow$ Beh. □

Beweis von 15.7. Ergänze f, g stetig in a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ mit } \xi \in]a, x[.$$

Mit $x \searrow a$ gilt auch $\xi \searrow a$

$$\Rightarrow \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \searrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis von 15.5,

$$\text{Sei } C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in [-\infty, \infty]$$

annahme an $C > -\infty$

Sei $y_1 < C$ bel. Wähle y_2 mit $y_1 < y_2 < C$.

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \quad \exists x_1 \text{ s.d. } \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq y_2$

$$\forall x \geq x_1$$

Sei jetzt $u > x > x_1$. Dann

$$\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq y_2$$

$$\frac{f(u)}{g(u)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1 - \frac{f(x)}{f(u)}}{1 - \frac{g(x)}{g(u)}} \right)}_{\xrightarrow{u \rightarrow \infty} 1} \geq y_2 > y_1$$

$$\Rightarrow \exists x_2, \text{ so da\ss } \frac{1 - \frac{f(x)}{f(u)}}{1 - \frac{g(x)}{g(u)}} < \frac{y_2}{y_1} \quad \forall u \geq x_2$$

$$\Rightarrow y_2 \leq \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} = \frac{f(u)}{g(u)} \cdot \left(\frac{1 - \frac{f(x)}{f(u)}}{1 - \frac{g(x)}{g(u)}} \right)$$

$$< \frac{f(u)}{g(u)} \cdot \frac{y_2}{y_1}$$

$$\Rightarrow \frac{f(u)}{g(u)} > y_1$$

$$\Rightarrow \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \geq c$$

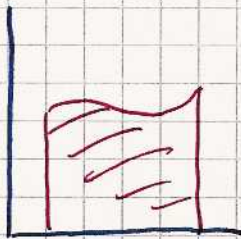
$$\text{Analog } \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq c$$

$\Rightarrow$ Beh.

□

§ 16 Integration

16.1. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen die Größe der Fläche unter dem Graphen bestimmen.

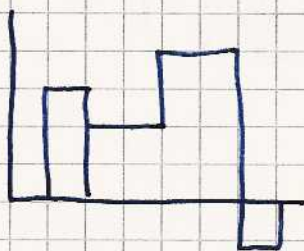


Idee: Approximieren diese Fläche durch Flächen unter Treppenfunktionen

16.2 Def

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$ gibt, so daß

$$f|_{]t_{i-1}, t_i[} = c_i \quad \text{konstant ist.}$$



16.3 Def

Sei φ Treppenfunktion

$$\int_a^b \varphi \, dx := \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t_{i-1})$$

heißt Integral der Treppenfunktion über $[a, b]$

Bem:

- 1) Ist ein c_i negativ, so zählt der Beitrag negativ
- 2) Das Integral hängt nicht von der Zerlegung ab. Eine feinere Zerlegung gibt den gleichen Wert.

3) $\varphi \leq \psi$ Treppenfunktion

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi dx \leq \int_a^b \psi dx$$

4) $\int$ kleinstes S fein Summe

16.4 Def. Ober- und Untersumme, Riemann-Integral

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Dann sei

$$\int^* f dx = \int_a^b f dx = \inf \left\{ \int_a^b \varphi dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion mit } f \leq \varphi \right\}$$

(Oberintegral)

$$\int_* f dx = \int_a^b f dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi dx \mid \varphi \text{ Treppenfkt mit } \varphi \leq f \right\}$$

(Unterintegral)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Riemann)-integrierbar,

wenn $\int_* f dx = \int^* f dx$.

Dann ist

$$\int_a^b f dx = \int_* f dx = \int^* f dx$$

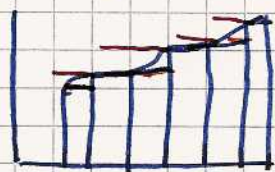
das Integral von f über $[a, b]$

16.5 Bem.

Ist f positiv und integrierbar, dann läßt sich $\int_a^b f dx$ als Fläche unter dem Graphen interpretieren.

16.6 Beispiel

Sei f monoton wachsend, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$



$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine beliebige Unterteilung. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \underline{f(t_{i-1})} \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq \int_* f dx \leq \int^* f dx \leq \sum_{i=1}^n \overline{f(t_i)} \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Wählen wir eine äquidistante Unterteilung

$$t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \quad \text{und beachten}$$

$$0 \leq f(t_i) - f(t_{i-1}) \leq f(b) - f(a)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq (f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

→ Satz: Monotone Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen sind integrierbar

16.7 Satz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $\xi \in]a, b[$. Dann ist f über $[a, b]$ genau dann integrierbar, wenn f über $[a, \xi]$ und $[\xi, b]$ integrierbar ist und es gilt dann

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\xi} f(x) dx + \int_{\xi}^b f(x) dx$$

⇒ Diffbare Funktionen f so daß f' stetig und endlich viele Nullstellen hat, sind integrierbar.

Beweis:

OE ξ ist Unterteilungspunkt für alle Treppenfunktionen in der Def. von Ober- und Untersumme.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^{b^*} f dx - \int_{a^*}^b f dx = \int_a^{\xi^*} f dx + \int_{\xi^*}^{b^*} f dx \\ &\quad - \int_{a^*}^{\xi} f dx - \int_{\xi}^b f dx \\ &= \underbrace{\int_a^{\xi^*} f dx - \int_{a^*}^{\xi} f dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\xi^*}^{b^*} f dx - \int_{\xi}^b f dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

□

16.8 Beispiel

$$f = \chi_{\mathbb{Q}} \cap [0,1] : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\int_0^1 f dx = 1, \quad \int_0^1 f dx = 0,$$

denn jedes offene Intervall enthält rationale sowie irrationale Zahlen

16.9 Satz

Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Zunächst einmal ist f beschränkt, also

$$\int_a^b f dx, \quad \int_b^a f dx \in \mathbb{R}$$

Für die Gleichheit benötigen wir ein weiteres Konzept

16.10 Def.

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion. f heißt gleichmäßig stetig auf I , wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ so. $\forall x_0, x \in I$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

also ein Gegensatz zur gewöhnlichen Stetigkeit hängt $\delta = \delta(\varepsilon)$ nicht von x_0 ab.

Bsp:

1) $f(x) :]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

2) $f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig

16.11 Satz

Jede stetige Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf abgeschlossenem beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig.

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und verwenden Bolzano-Weierstraß. Angenommen, f ist nicht gleichm. stetig

Dann $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \exists x_0, x \in [a, b]$

mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$

Insbesondere $\exists$ für $\delta = \frac{1}{n}$; $x_n, y_n \in [a, b]$

mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

oder z.B. $\exists$ konvergente Teilfolge

(x_{n_k}) und $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x} \in [a, b]$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \bar{x}$

also $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0$

wegen der Stetigkeit von f in $\bar{x}$

$\nexists$ zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ $\square$

Beweis von Satz 16.9 . Sei $\varepsilon > 0$

Wir zeigen $0 \leq \int_a^b f^* dx - \int_a^b f dx < \varepsilon$

Zu $\frac{\varepsilon}{b-a}$ existiert wg. der gleichm. Stetigkeit ein

$\delta > 0$ so. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Wähle eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

so fein, daß $t_i - t_{i-1} < \delta$

Sei φ die Treppenfunktion mit

$\varphi|_{[t_{i-1}, t_i]} = \max \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ und

$\psi|_{[t_{i-1}, t_i]} = \min \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$

Dann gilt: $\psi \leq f \leq \varphi$

$$0 \leq \int_a^b f^* dx - \int_a^b f dx \leq \int_a^b \varphi dx - \int_a^b \psi dx$$

$$= \int_a^b (\varphi - \psi) dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_a^b f^* dx = \int_a^b f dx$$

$\square$

16.12 Beispiel

$$f(x) = x^2$$

$$\int_0^b x^2 dx = ?$$



Wählen $k_k = k \cdot \frac{b}{n}$

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{(k-1)b}{n} \right]^2 \frac{b}{n} \leq \int_0^b x^2 dx \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k \cdot b}{n} \right)^2 \cdot \frac{b}{n}$$

$$\frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leq \int_0^b x^2 dx \leq \frac{b^3}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{3}$
 $\rightarrow \frac{b^3}{3}$

$$\Rightarrow \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

$$\text{allg.: } \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

16.13 Satz

Sei $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $f+g$ ist integrierbar mit $\int_a^b (f+g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$

2) $c \cdot f$ ist integrierbar mit $\int_a^b c \cdot f dx = c \cdot \int_a^b f dx$

3) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$

4) $f_+ := \max(f, 0)$ der Positivteil von f

$f_- := \max(-f, 0)$ der Negativteil von f $-\min(f, 0)$

und $|f| = f_+ + f_-$ sind integrierbar

5) Für $1 \leq p < \infty$ gilt $|f|^p$ ist integrierbar

$$\int_a^b |f|^p dx$$

6) fg ist integrierbar (aber i.a. $\int fg dx \neq \int f dx \cdot \int g dx$)

Beweis:

1) klar 2) klar 3) klar

$$4) \varphi \leq f \leq \psi \Rightarrow \varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+ \quad \text{und} \quad \int \varphi_+ - \varphi_+ dx \leq \int (\psi - \varphi) dx$$

$$f_- = f_+ - f \quad \text{ist klar nach 1) und 2)}$$

$$|f| = f_+ + f_- \quad \text{klar nach 1)}$$

$$5) 0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1, \psi - \varphi \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\begin{aligned} \varphi^p &\leq |f|^p \leq \psi^p \\ \psi^p - \varphi^p &= \sum_{k=0}^{p-1} (\varphi^k \varphi^{p-k-1}) (\psi - \varphi) \leq p \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} \end{aligned}$$

für $p \in \mathbb{N}$

6) gilt wegen 5 und

$$f \cdot g = \frac{1}{4} ((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

□

16.3.a) Folgerung (Mittelwertsatz d. Integralrechnung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein

$$\xi \in]a, b[\quad \text{mit} \quad \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Beweis

$$\text{Sei} \quad M = \max \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$$

$$m = \min \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$$

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Dies Beh. folgt, da nach dem Zwischenwertsatz

$$\text{das Wert} \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

von f angenommen wird.

16.14 Def

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a = t_0 < \dots < t_n = b$ eine Unterteilung. Dann heißt

$\eta := \max \{ t_i - t_{i-1} \mid i = 1, \dots, n \}$ die Feinheit der Unterteilung.

Für Werte $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ heißt

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

eine Riemann'sche Summe zur Unterteilung $t_0 < \dots < t_n$ mit Strkestellen ξ_i .

Satz:

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_n = b$ mit Feinheit $< \delta$ und jede Riemann'sche Summe zu dieser Unterteilung gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Beweis : >. Folger $\square$

16.15 Beispiel

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = ? \quad a > 1$$

Wähle als Unterteilungspunkte

$$t_k = a^{k/m}, \quad k = 0, \dots, m$$

$$\begin{aligned} 0 \leq t_k - t_{k-1} &= a^{k/m} - a^{(k-1)/m} = a^{(k-1)/m} (a^{1/m} - 1) \\ &\leq a^{(k-1)/m} (a^{1/m} - 1) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für n genügend groß wird die Feinheit beliebig klein.

Stützstellen $\xi_k = t_{k-1} = a^{(k-1)/m}$

Riemann'sche Summe:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{a^{\frac{k-1}{m}}} (a^{\frac{k}{m}} - a^{\frac{k-1}{m}})$$

$$= \sum_{k=1}^m (a^{\frac{1}{m}} - 1) = m \cdot (a^{\frac{1}{m}} - 1)$$

$$\Rightarrow \int_1^a \frac{a^x}{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} m(a^{\frac{1}{m}} - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a}}{x} - 1$$

$$\stackrel{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} \cdot \ln a}{1} = \ln a$$

Im allgemeinen ist das Verfahren, Integrale über Riemann'sche Summen zu berechnen, kompliziert. Mit der Entdeckung von Newton geht es einfacher.

Idee: Betrachten das Integral

$$a \int^x f(t) dt$$

mit variabler oberer Grenze.

16.16. Def

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall. Dann heißt eine Funktion (diffbar)

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion von f , wenn
wenn $F' = f$

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a < b \in I$, I Intervall

81

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx$$

16.17 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall

und $a \in I$. Dann ist

1) $F(x) := \int_a^x f(t) dt$

eine Stammfunktion von f .

2) Ist G eine Stammfunktion von f , dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \quad (:= G \Big|_a^b)$$

Beweis:

1) Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$



Nach der Integralrechnung

$$= \frac{1}{h} \cdot (f(\xi) \cdot h) \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x+h$$

$$= f(\xi)$$

Mit $h \rightarrow 0$ steht $x+h \rightarrow x$ also $\xi \rightarrow x$

Da f stetig ist, gilt

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$$

2) G Stammfunktion $\Rightarrow (G - F)' = f - f = 0$

$\Rightarrow G - F$ ist konstant, also $G = F + c$

$$\Rightarrow G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(t) dt$$

□

16.18 Wegen dem Hauptsatz genügt es um
Integrale auszurechnen, Stammfunktionen auszu-
rechnen.

Ist F Stammfunktion von f , dann schreiben
wir $F = \int f(x) dx$

Beweis: F ist eine Stammfunktion von f .

$\int f dx$ heißt unbestimmtes Integral

$$\int f' g dx = fg - \int fg' dx \quad \text{Zurhilfe lesen!}$$

Die Stammfkt. ist nur richtig bis auf eine
additive Konstante.

Bsp.:

$$1) f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\Rightarrow F(x) = a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x$$

ist eine Stammfkt.

2) allgemeiner

$$\int x^k dx = \begin{cases} \frac{x^{k+1}}{k+1} & k \neq -1 \\ \ln|x| & k = -1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$3) \int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$4) \int e^x dx = e^x$$

$$5) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$6) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

Bem.:

Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt geschlossen bzw.
elementar integrierbar, wenn es eine geschlossene
Formel für die Stammfunktion gibt.

geschlossene Formel = Formel mit e^x , $\sin x$, $\cos x$,
 $\arcsin x$, Polynome, Produkte, Summen
 und Ableitungen von solchen, Komposition von
 solchen, Umkehrfunktionen, z.B. $\sqrt{\quad}$, C, x

Bsp.:

Das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} \quad \text{hat keine elementare Darstellung}$$

Bemerkung:

Jede Differenzierungsregel gibt eine Integrationsregel

Die Kettenregel gibt

1619 Satz (Substitutionsregel)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar
 mit $\varphi([a, b]) \subset I$.

Dann gilt für $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Beweis:

Sei F Stammfunktion von f .

$$\Rightarrow F \circ \varphi \quad \text{ist Stammfunktion von } (F \circ \varphi)'$$

$$= \underbrace{(f \circ \varphi)}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{\varphi'}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$$= \int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' dt$$

Störregel: $x = \varphi(t) \quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$

$$\leadsto dx = \varphi'(t) dt$$

16.20 Beispiele

$$1) \int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t) dt$$

$$t = x+c$$

$$x = t-c = \varphi(t)$$

$$dx = 1 \cdot dt$$

$$2) c \neq 0 \int_a^b f(cx) dx$$

$$= \frac{1}{c} \int_{a \cdot c}^{b \cdot c} f(t) dt$$

$$t = c \cdot x$$

$$x = \frac{t}{c}$$

$$dx = \frac{dt}{c}$$

$$3) \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ diffbar, } \varphi(t) \neq 0$$

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln |\varphi(t)| \Big|_a^b$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \varphi(t) = t$$

a) $\int \ln x \, dx = ?$

$$g = \ln x, \quad f' = 1$$

$$g' = \frac{1}{x}, \quad f = x$$

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int \underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_1 \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x$$

Probe: Ableiten

b) $\int x \sin x \, dx$

$$f = x \quad g' = \sin x$$

$$f' = 1 \quad g = -\cos x$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x$$

c) $\int \sin^2 x \, dx$

$$f = \sin x \quad g' = \sin x$$

$$f' = \cos x \quad g = -\cos x$$

$$= -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{(1 - \sin^2 x)} \, dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$$

Insbesondere

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \pi$$

d) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx = +\sin^2 x + \int \sin x \cos x \, dx$

$$f = \sin x \quad g' = \cos x$$

$$f' = \cos x \quad g = +\sin x$$

$$\Rightarrow \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\begin{array}{ll} f = \cos x & g' = \sin x \\ f' = -\sin x & g = -\cos x \end{array} \quad \leadsto \int \sin x \cos x = -\frac{1}{2} \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x + c$$

$$\text{In der Tat: } c = \frac{1}{2}$$

16.23 Welche Funktionen lassen sich "elementar" integrieren?

Bsp.: $\int x^n e^x dx$ n -mal partiell integrieren

$$\int x^n \cdot \sin x dx \quad "$$

$$\int e^{x^2} dx \quad \text{keine geschlossene Formel}$$

$$\int x \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

16.24 Rationale Funktionen lassen sich mit Hilfe von Partialbruchzerlegung geschlossen integrieren

Bsp.:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x} dx$$

$$1) \quad x^3+x = x(x^2+1)$$

Ansatz:

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+1} \quad \Rightarrow x+1 = A(x^2+1) + (B+Cx)x$$

$$\text{Koeffizientenvergleich} \Rightarrow A=1, C=-1, B=1$$

$$\int \frac{x+1}{x^3+x} = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \arctan x$$

f rationale Funktion

0) $f(x) = \underbrace{g(x)}_{\text{Integrieren ok.}} + \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\deg p < \deg q$
 g, p, q Polynome

1) Faktorisieren

$$q(x) = \prod_{i=1}^{n_1} (x - x_i)^{e_i} \prod_{j=1}^{n_2} q_j(x)^{f_j}$$

wobei $x_1, \dots, x_{n_1}$ reelle Nullstellen und

q_j quadratisches Polynom mit einem Paar von konjugiert komplexen Nullstellen

$$q_j(x) = (x - z_j)(x - \bar{z}_j) = x^2 - 2\operatorname{Re} z_j x + |z_j|^2$$

2) Lösen dem Ansatz

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{a_i(x)}{(x - x_i)^{e_i}} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{b_j(x)}{q_j(x)^{f_j}}$$

$$\deg a_i < e_i$$

$$\deg b_j < 2 \deg q_j$$

mit Koeffizientenvergleich

$$\text{haben } \sum_{i=1}^{n_1} e_i + \sum_{j=1}^{n_2} 2 f_j = \deg q$$

Koeffizientenvergleich gibt $\deg q$ lineare Gleichungen.

Es bleibt Integrale vom Typ

a) $\int \frac{1}{x}, \dots, \int \frac{1}{x^e} dx$ zu lösen
 $= \ln|x|, \frac{1}{x}, \dots, \frac{-1}{(e-1)x^{e-1}}$

b) Nach quadrat. Ergänzung und Substitution transformieren

$$\frac{1}{q_j(x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Müssen $\int \frac{1}{1+x^2} dx$, $\int \frac{x}{1+x^2} dx$, ... $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$,
 $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$, ... $\int \frac{1}{(1+x^2)^f} dx$, ... $\int \frac{x}{(1+x^2)^f} dx$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2(1+x^2)}, \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^f} dx = \frac{1}{(f-1)2(1+x^2)}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}}_{\text{ok. mit Induktion}} - \underbrace{\int x \frac{x}{(1+x^2)^n} dx}_{\text{partiell Integrieren}}$$

$$\begin{aligned} f &= x & g' &= \frac{1}{(1+x^2)^n} \\ f' &= 1 & g &= \frac{c}{(1+x^2)^{n-1}} \end{aligned}$$

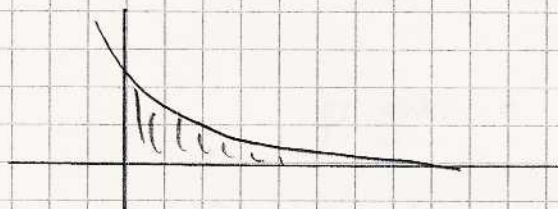
$$= x \cdot \frac{c}{(1+x^2)^{n-1}} - c \cdot \underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}}_{\text{ok. mit Induktion}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{b(x)}{(1+x^2)^f} dx = \text{Summe von solchen Termen}$$

9.17 Uneigentliche Integrale

Sei $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wollen

$$a \int_{\infty}^{\infty} f(x) dx = ?$$



17.1 Def.:

f heißt über $[a, \infty[$ (uneigentlich) integrierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R} \text{ existiert}$$

$$\text{Dann } \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

17.2 Beispiel

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx$$

Stammfunktion $\int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx$

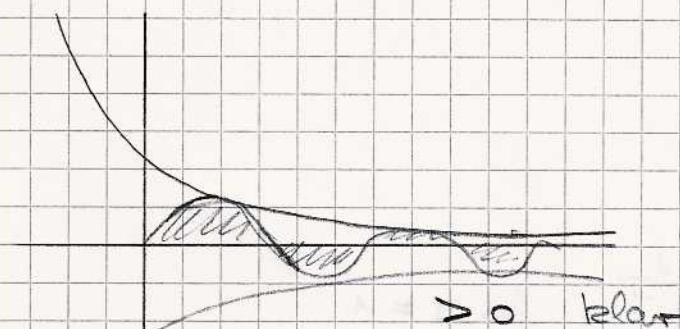
$$= -e^{-x} (\cos x + \sin x)$$

$f' = -e^{-x}, g = -\cos x \Rightarrow \int e^{-x} \sin x \, dx$

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

$$\int_0^b e^{-x} \sin x \, dx = \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-b}}_{\xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0} \underbrace{(\sin b + \cos b)}_{\text{beschränkt}} + \frac{1}{2} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}$$



Analog definiert man $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx$

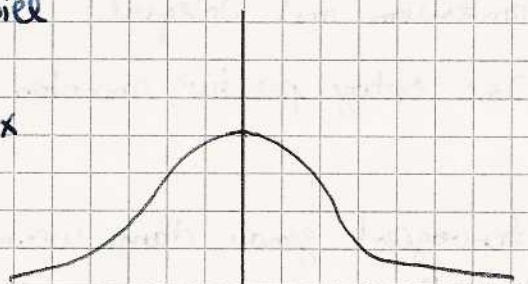
und schließlich $\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) \, dx$

i. a. $\neq \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) \, dx$

etwa bei $f(x) = x^3$

17.3 Beispiel

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{2\pi}$$



Existiert?

$$1 \leq 1+x^2 \leq e^{x^2} \Rightarrow e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$$0 \leq \int_0^b e^{-x^2} dx \leq \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(b) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x^2} dx \text{ existiert} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Integrale von unbeschränkten Funktionen auf offenen Intervallen

17.4 Def.

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig. f heißt uneigentlich integrierbar, wenn der nachfolgende Grenzwert existiert und dann

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x) dx$$

Beispiel:

$$y = \frac{1}{x^s} = x^{-s}$$

$s > 0$ Pol

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx = ?$$

Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \left(\frac{1}{s-1}\right) \cdot \frac{1}{x^{s-1}} & \text{für } s \neq 1 \\ \ln x & s = 1 \end{cases}$$

$$\text{also } \int_x^1 \frac{1}{x^s} dx$$

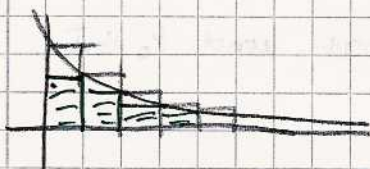
$$= \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{1-s}\right) - \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \\ &-\ln x \end{aligned} \right\} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{cases} +\infty & s > 1 \\ \frac{1}{1-s} & s < 1 \\ +\infty & s = 1 \end{cases}$$

17.5 Satz (Konvergenzkriterium mit Integral)

Sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige positive monoton fallende Funktion.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} f(x) dx$ existiert.

Beweis



Wegen der Monotonie ist $\sum_{n=0}^k f(n)$ die Obersumme von $\int_0^{k+1} f(x) dx$ und $\sum_{n=1}^{k+1} f(n)$ ist eine Untersumme.
 $\Rightarrow$ Beh.

Beispiel:

(Zeta)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} =: \zeta(s) \text{ konvergiert genau dann, wenn } s > 1$$

Vgl. mit $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{-s+1} x^{-s+1} \Big|_1^{\infty}$

$$= \frac{1}{s-1} \quad \text{falls } s > 1$$

sonst " $+\infty$ "

ζ heißt Riemann'sche Zetafunktion. Definiert für $s > 1$

§18 Taylor - Polynome

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal diffbare Funktion und $x_0 \in I$. Wollen f nahe x_0 durch ein Polynom bestmöglich approximieren.

Beste lineare Approximation ist die Tangente.

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

18.1 Def

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal diffbar und $x_0 \in I$. Dann heißt

$$(T_{x_0}^n f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

n -tes Taylorpolynom von f im Punkt x_0 , x_0 Entwicklungspunkt.

$T_{x_0}^n f$ ist das Polynom vom Grad n , das den gleichen Wert und die gleichen n -Ableitungen in x_0 hat wie f .

18.2 Satz (Taylor'sche Formel)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(m+1)$ -mal stetig diffbar und $x_0 \in I$.

Dann gilt

$$f(x) = (T_{x_0}^m f)(x) + R_{m+1}(x)$$

mit dem Restglied

$$R_{m+1}(x) = \int_{x_0}^x f^{(m+1)}(t) \frac{(x-t)^m}{m!} dt$$

herföhrlich:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \int_{x_0}^x f^{(m+1)}(t) \frac{(x-t)^m}{m!} dt.$$

Beweis: Induktion nach m und partielle Integration.

Der Fall $m=0$ gilt nach dem Hauptsatz

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

Induktionsschritt $m-1 \rightarrow m$

$$R_m(x) = \int_{x_0}^x \underbrace{f^{(m)}(t)}_{u(t)} \underbrace{\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}}_{v'(t)} dt$$

$$v(t) = -\frac{(x-t)^m}{m!}$$

$$= -f^{(m)}(t) \frac{(x-t)^m}{m!} \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x f^{(m+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^m}{m!} dt$$

$$= \underbrace{f^{(m)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^m}{m!}}_{\text{behauptete}} + R_{m+1}(x)$$

Fehlende Term von $T_{x_0}^m(f)$

$$T_{x_0}^m(f) - T_{x_0}^{m-1}(f)$$

□

18.3 Satz (Lagrangeform des Restglieds)

67

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ mal stetig diffbar, $x_0 \in I$.

Dann $\exists \xi$ zwischen x und x_0 so daß

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

gilt.

Theorem:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})$$

für $x \rightarrow x_0$

18.5 Beispiel

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$$

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x_0} \sin \right)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Wie gut approximiert dies?

$$|R_{n+1}(x)| \leq \left| \sin^{(n+1)}(\xi) \right| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\left(\frac{1}{x_0} \sin \right)$ approximiert $\sin$ bis ε ,

falls $|x| \leq R$ und

$$\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \leq \varepsilon < 1$$

Berechnen R .

$$\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$(n+1) \ln R \leq \ln \varepsilon + \sum_{k=1}^{n+1} \ln k$$

$$\int_1^{n+1} \ln x \, dx = (x \cdot \ln x - x) \Big|_1^{n+1}$$

$$\leq \ln \varepsilon + (n+1) \ln(n+1) - n$$

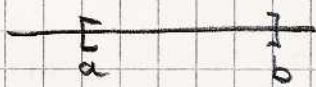
$$\Rightarrow \ln R \leq \frac{\ln \varepsilon}{n+1} + \ln(n+1) - \frac{n}{n+1} \approx \frac{\ln \varepsilon}{n+1} + \ln(n+1) - 1$$

$$\Rightarrow R \approx \varepsilon^{\frac{1}{n+1}} \cdot (n+1) \cdot e^{-1} \leq (n+1) e^{-1}$$

18.4 Satz (verallg. MWS)

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f stetig, g integrierbar, positiv.
Dann $\exists \xi \in [a, b]$ s.d.

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\xi} \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$



Beweis:

$$M = \max \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$$

$$m = \min \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$$

$$m \leq f \leq M \quad | \quad g \geq 0 \Rightarrow mg \leq fg \leq Mg$$

$$\Rightarrow m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Nach dem ZWS für $f \exists \xi$

$$f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

□

Beweis von 18.3

$$R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(\xi) \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \Big|_{x_0}^x$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Beispiel:

$$\sin(x), \quad \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad \text{z.B. } \alpha = \frac{1}{2}$$

Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1) (1+x)^{\alpha-k}$$

$$\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{wobei } \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

18.6 Def

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ∞ -oft diffbar und $x_0 \in I$.

Dann heißt

$$(T_{x_0} f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt x_0

Dies ist eine Potenzreihe in $(x-x_0)$.

Beispiele

a) $(T_0 \exp)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ die def. Reihe für e^x

Die Reihe konvergiert gegen $\exp$.

b) $(1+x)^\alpha$ hat Taylorreihe um $x_0=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

18.7 Frage:

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ∞ -oft diffbar und $x_0 \in I$,

konvergiert dann die Taylorreihe

$$T_{x_0} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

gegen f ?

Antwort:

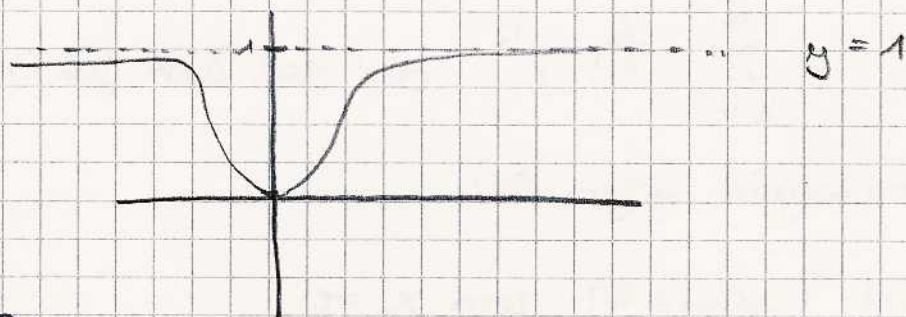
1) Der Konvergenzradius R der Taylorreihe ist nicht notwendigerweise positiv > 0

2) Wenn $R > 0$ gilt nicht notwendigerweise, daß die Taylorreihe auf $]x_0 - R, x_0 + R[$ gegen f konvergiert

18.8 Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

also $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Zerh.:

f ist ∞ - oft diffbar und $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$
 $\Rightarrow \tau_0 f = 0; \quad R = \infty$, aber konvergiert nicht
 gegen f .

Dazu beweisen wir mit Induktion

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} P_m(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \text{ wobei } P_m \text{ Polynom} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Beweis: $m=0$ ist ok.

$m \rightsquigarrow m+1 \quad x \neq 0$

$$\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' = \underbrace{\left(P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2}{x^3} \right)}_{P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(m+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

da exp schneller gegen ∞ geht wie jedes Polynom
 (l'Hospital)

18.9 Satz (binomische Reihe)

87

Für $|x| < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Wegen Antwort 18.7 ist dies nicht so offensichtlich

Beweis

a) wir zeigen, die Reihe hat Konvergenzradius $R=1$
Quotientenkriterium ($\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}$)

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| \cdot |x| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |x|$$

$\Rightarrow$ konvergent $|x| < 1$

divergent $|x| > 1$

b) wir zeigen

$$R_{m+1}(x) = \frac{1}{m!} \int_0^x f^{(m+1)}(t) \cdot (x-t)^m dt$$

$$= \frac{(m+1)!}{m!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-m-1} \binom{\alpha}{m+1} (x-t)^m dt$$

$$= (m+1) \binom{\alpha}{m+1} \cdot \int_0^x (1+t)^{\alpha-m-1} (x-t) dt$$

konvergiert für $|x| < 1$ fast und $m \rightarrow \infty$ gegen Null

1. Fall $1 > x \geq 0$

sei $C = \max(1, (1+x)^\alpha)$

$$(1+t)^{\alpha-m-1} \leq (1+t)^\alpha \leq C$$

$$\Rightarrow |R_{m+1}(x)| \leq (m+1) \binom{\alpha}{m+1} C \cdot \int_0^x (x-t)^m dt$$

$$= C \cdot \left| \binom{\alpha}{m+1} \right| x^{m+1}$$

da $\left| \frac{\alpha-k+1}{k} \right| < 1$ für $k > \alpha+1$

$$\exists \text{ ein } C_2 \text{ mit } \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| \leq C_2 \quad \forall n$$

$$\leq C \cdot C_2 x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{da } 0 \leq x < 1$$

2. Fall $0 \geq x > -1$

$$|R_{n+1}(x)| = (n+1)^\alpha \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| \cdot \int_0^{|x|} \underbrace{|x+t|^n \cdot |1-t|^{\alpha-n-1}}_{\left| \frac{|x|+t}{1-t} \right|^n (1-t)^{\alpha-1}} dt$$

$t \mapsto \frac{|x|+t}{1-t}$ ist monoton fallend in $[0, |x|]$, denn

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{|x|+t}{1-t} \right) = \frac{(1-t)1 - (-1)(|x|+t)}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{|x|-1}{(1-t)^2} < 0 \quad \text{da } |x| < 1$$

$$|R_{n+1}(x)| \leq (n+1) \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| \cdot \int_0^{|x|} |x|^n \cdot (1-t)^{\alpha-1} dt$$

$$= (n+1) \binom{\alpha}{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha} (1-t)^\alpha \Big|_1^{|x|} \cdot |x|^n$$

$$= |x|^\alpha \underbrace{\left| \binom{\alpha-1}{n} \right|}_{\text{Summand von}} |x|^n$$

$$\text{Summand von } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-n}{n} x^n$$

konvergiert für $|x| < 1$ nach a)

→ Nullfolge $\square$

6.19 Idonvergenz von Funktionenfolgen

90

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe

mit Konvergenzradius $R > 0$. Wir wollen

zeigen, daß $f:]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ ∞ -oft diffbar

ist, und daß die Taylorsche von f in $x_0 = 0$

mit der Potenzreihe übereinstimmt.

$$\text{also } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Aber die Stetigkeit von f ist nicht offensichtlich!

19.1 Def

Sei $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen auf Intervall I .

Die Folge (f_n) heißt punktweise konvergent,

wenn für jedes $x \in I$ die Folge $(f_n(x))$ konvergiert

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

heißt dann Grenzfunktion.

Frage:

Wenn alle f_n stetig sind, ist dann auch f stetig?

Antwort: i. a. nein!

Bsp.:

$$f_n(x) = x^n, \quad f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$



Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

19.2 Def

Sei $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen

(f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ s.d.}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in I$$

also ein Gegenstück zur punktweisen Konvergenz

hängt $n_0 = n_0(\varepsilon)$ nicht von x ab.

19.3 Satz

Sei $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.

Beweis:

Sei $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann $\exists n_0$ s.d.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in I$$

Da f_{n_0} stetig ist $\exists \delta > 0$ s.d.

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

□

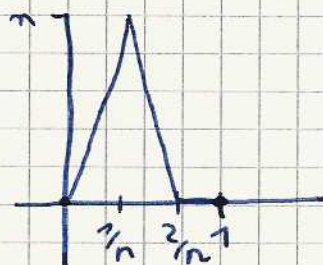
Frage: Verknüpft Grenzwertbildung mit Integration?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx ?$$

Antwort: i. a. nein!

Bsp. Zackenfunktion

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \forall n$$

84

andererseits:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 0 & x>0, \text{ da } x > \frac{2}{n} \text{ f.f.a.m.} \end{cases}$$

$$\text{und } \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

19.4 Satz

Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall. Konvergiert (f_n)

gleichmäßig gegen f , dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Beweis:

zunächst einmal ist $f = \lim f_n$ stetig, also integrierbar.

Ferner

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon (b-a)$$

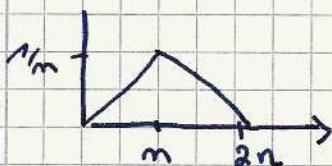
$$\text{wenn } n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \lim_a \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{sa. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x, \quad \forall n \geq n_0$$

Bem 19.5

Für uneigentliche Integrale ist das z. Z. falsch:

$$n \geq 2, \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen 0.

$\forall n$ ist $\int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^{\infty} f_n(x) dx}_1 = 1 \neq 0 = \int_0^{\infty} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_0 dx$$

Frage: läßt sich Differentiation und Grenzwertbildung vertauschen?

Antwort: i.A. nein!

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

konvergiert gleichmäßig gegen 0

$f_n'(x) = \cos(nx)$ konvergiert nicht.

Lemma 19.6

$f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbare Funktionen,
die punktweise gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

konvergiert die Folge der Ableitungen $(f_n')_n$
gleichmäßig, dann ist f diffbar mit

$$f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'$$

Beweis:

$$f^* := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'$$

19.3 $\Rightarrow f^*$ auf $[a, b]$ stetig

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f^*(t) dt \quad (19.4)$$

$$f' = (\quad)' = f^*$$

Hauptsatz
der Integral-
u. Diff.-rechnung

Anwendung auf Potenzreihen

92

Lemma:

Konvergiert eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in einem Punkt $z_0 \neq 0$, dann konvergiert sie absolut in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.
 P konvergiert gleichmäßig in $[-r, r]$ $\forall r < |z_0|$

Beweis:

• $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert $\Rightarrow \exists S: |a_n z_0^n| \leq S \quad \forall n$

$$|a_n z^n| \leq S \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \Rightarrow S \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \quad \text{konvergenz Majorant von } P(z)$$

• Sei $r < |z_0|$ und $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \text{ mit } S \cdot \sum_{n=m_1+1}^{\infty} \left| \frac{r}{z_0} \right|^n < \varepsilon \quad \forall m_1 \geq N$$

also:

$$\left| \sum_{n=m_1+1}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=m_1+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq S \cdot \sum_{n=m_1+1}^{\infty} \left| \frac{r}{z_0} \right|^n < \varepsilon$$

$$\forall m_1 \geq N \quad \forall z \in [-r, r]$$

Def + Satz

$\neq$ Potenzreihe und $R := \sup \{ r \in \mathbb{R} \mid P(r) \text{ konvergiert} \}$ heißt Konvergenzradius.
 $P(z)$ ist für $|z| < R$ absolut konvergent und für $|z| > R$ divergent.

Bem:

- P konvergiert gleichmäßig in $[-r, r]$ $\forall r < R$
- $] -R, R[$ ist die Konvergenz c.A. und gleichmäßig (Bsp. geometr. Reihe)

Theorem (Satz)

Für den Konvergenzradius R von $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gilt: $\frac{1}{R} = L$ mit $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

Beweis:

• Ist $0 < L < \infty$ dann:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$
$$= \begin{cases} < 1 & |z| < \frac{1}{L} \\ \geq 1 & |z| > \frac{1}{L} \end{cases}$$

Wurzelkriterium:

$\Rightarrow P(z)$ konvergiert für $|z| < \frac{1}{L}$

$P(z)$ divergiert für $|z| > \frac{1}{L}$

$$\Rightarrow \frac{1}{L} = R$$

• Ist $L = \infty$ bzw. 0

dann ist $L^*(z) = \infty$ bzw. $0 \quad \forall z \neq 0$

$\Rightarrow$ Bzw.

19.7 Satz

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und Grenzfunktion $f:]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$.

Die Potenzreihen

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

(ableiten)

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(integrieren)

die man durch gleichweises differenzieren bzw. integrieren erhält, haben den selben Konvergenzradius wie P und konvergieren auf $]-R, R[$ gegen

$$a) f'(x) \quad b) \int_0^x f(t) dt$$

Insbesondere ist f unendlich oft diffbar :

93

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

Beweis:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^0 = 1$$

$n+1 \qquad \qquad \qquad n+1 \qquad \qquad \qquad n+1$

$\Rightarrow$ a) und b) haben den selben Konvergenzradius wie P

19.4 bzw. 19.6 $\Rightarrow$ Beh.

19.8 Beispiele

1) Die Logarithmusreihe

$\ln(1+x)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ für $|x| < 1$

Gleichweise Integration und $\ln(1) = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{für } |x| < 1$$

2) Arcus tangens : $\arctan(x)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1$$

gleichweise integrieren

$$\arctan(0) = 0$$

$$\Rightarrow \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2$$

$] -R, R[$

4) In den Bsp. 1) u. 2) konvergiert die Reihe auch für $x=1$, was:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln(2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

man legt.

Das ist tatsächlich richtig.

19.9 Satz (Abel'scher Grenzwertsatz)

Die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konvergiert in $x = R > 0$.

Dann konvergiert P auf $[0, R]$ gleichmäßig, insbesondere ist P auf $[0, R]$ stetig (19.3)

Lemma (Cauchy-Kriterium)

Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$; $(f_n)_n$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

$$\forall x \in I$$

Lemma

$(f_n)_n$ Folge von Funktionen auf $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
und $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ Folge mit:

- 1) $(f_n(x))_n$ ist monoton fallend
- 2) $\exists M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f_n(x)| \leq M \quad \forall n \quad \forall x \in [a, b]$
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot f_n$ gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$.

Beweis von 19.9

Nehme im Lemma $f_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$; $C_n := a_n R^n$, $\eta :=$

Beweis des Lemmas:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad ; \quad A_k := \sum_{n=0}^k a_n$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=l+1}^m a_n f_n &= \sum_{n=l}^{m-1} A_n (f_n - f_{n+1}) + A_m f_m - A_l f_l \\ &= \sum_{n=l}^{m-1} (A_n - A) (f_n - f_{n+1}) + (A_m - A) f_m - (A_l - A) f_l \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und N so groß, daß $|A_n - A| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Dann $\forall x \in [a, b]$:

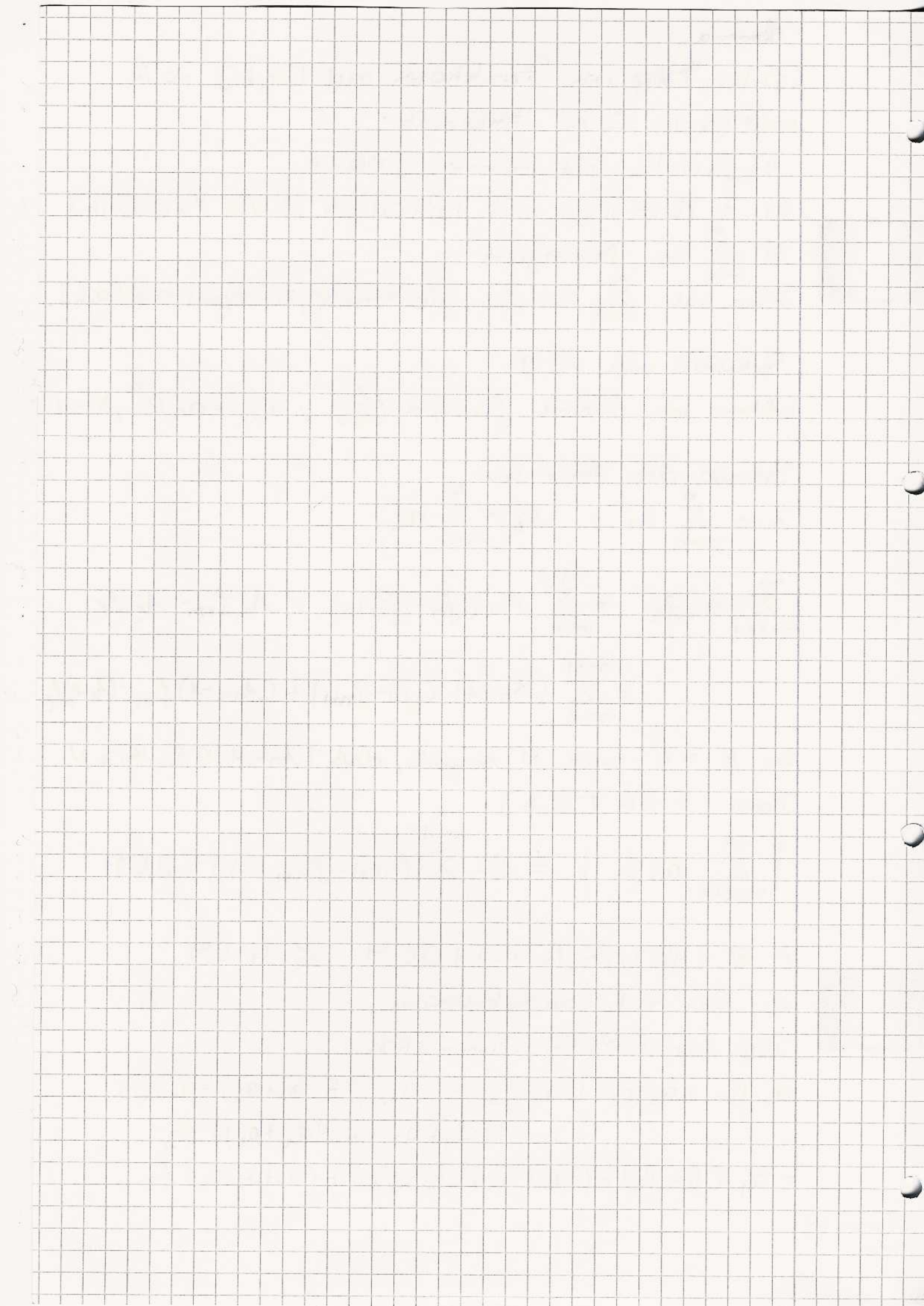
$$\left| \sum_{n=l+1}^m a_n f_n \right| \leq \varepsilon \cdot \sum_{n=l}^{m-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x)) + 2\varepsilon \eta$$

$$= \varepsilon \cdot (f_l(x) - f_m(x)) + 2\varepsilon \eta \leq 4\varepsilon \eta$$

$\Rightarrow$ Beh. mit Cauchy Kriterium □

Bsp. zur Abel'schen Summation

$$\begin{aligned} a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 &= a_1 f_1 + ((a_1 + a_2) - a_1) f_2 \\ &\quad + ((a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2)) f_3 \\ &= a_1 (f_1 - f_2) + (a_1 + a_2) (f_2 - f_3) + (a_1 + a_2 + a_3) f_3 \end{aligned}$$



IV Lineare Algebra

§ 20 $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$

Punkte im Raum $\xleftrightarrow[\text{nach Wahl von Koordinatensystem}]{\text{identifizieren}}$ Tupel im $\mathbb{R}^3 \rightarrow (a_1, a_2, a_3)$

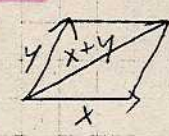
Im $\mathbb{R}^3$, allgemein $\mathbb{R}^n$ können wir für Punkte Zeilen- oder Spaltenvektoren verwenden.

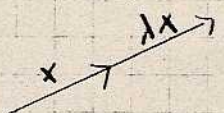
Letzteres ist in Linearer Algebra üblich

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n, n > 3$ tritt natürlich auf: z.B. $\{ \text{Geraden im } \mathbb{R}^3 \}$

20.1 Definition: (Vektoraddition, Skalarmultiplikation)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x+y := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$


$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$


20.2 Definition: $x, y \in \mathbb{R}^n$

Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

euklidische Norm $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Pythagoras $\Rightarrow$ im $\mathbb{R}^3$ beschreibt $\|x\|$ den Abstand von x zum Nullpunkt.

$$\begin{aligned} \text{Länge von } x &= \sqrt{\|x\|^2 + x_3^2}, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \|x\| \end{aligned}$$

Definition: Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt $\|x\|$ die Länge des Vektors x .

$x, y \in \mathbb{R}^n$ dann heißt $\|x-y\| =: d(x, y)$ Abstand von x und y .

20.3 Satz: (Eigenschaften des Skalarprodukts)

86

Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

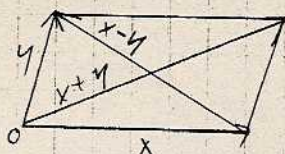
2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

5) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

6) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (Parallelogrammgleichung)



Beweis zu 20.3: 1), 2), 3), 4) ✓

5) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2} + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{2\langle x, y \rangle} + \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\|^2}$

6) addiere die Gleichung aus 5) mit $\pm$.

20.4 Satz: (Cauchy - Schwarzsche Ungleichung)

$x, y \in \mathbb{R}^n$ dann

1) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

2) Sind $x, y \neq 0$ dann gilt

$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: x = t \cdot y$

Beweis: $y=0$: Beide Seiten 0

$y \neq 0$: $\mu = \langle y, y \rangle$, $\lambda = \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mu x - \lambda y, \mu x - \lambda y \rangle = \mu^2 \langle x, x \rangle - 2\mu\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \\ &= \underbrace{\langle y, y \rangle}_{>0} \cdot (\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2) \\ &\Rightarrow 0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 \quad (*) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh. mit Monotonie der $\sqrt{}$

"=" in (*) gilt $\Leftrightarrow 0 = \langle \mu x - \lambda y, \mu x - \lambda y \rangle$

$$\Leftrightarrow \mu x - \lambda y = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, y \rangle} y \quad \square$$

20.5 Satz: (Eigenschaften der Norm)

$$x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$1) \|x\| \geq 0 \text{ und } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$3) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\Delta\text{-Ungleichung})$$

Beweis: 1) o.o.

$$2) \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle}$$

$$3) \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Pythagoras

$$\begin{aligned} &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz-Ungl.}}{=} (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \text{Beh. mit Monotonie der } \sqrt{} \end{aligned}$$

20.6 Definition: $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen senkrecht zueinander ($x \perp y$)
 $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

Bemerkung: $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\stackrel{\text{vor.}}{=} c^2 \stackrel{P.}{=} a_1^2 + (b_1 + b)^2 \stackrel{P.}{=} a^2 - b_1^2 + b_1^2 + 2b_1b + b^2 \\ &= a^2 + 2b_1b + b^2 \Rightarrow b_1 = 0 \end{aligned}$$

20.7 Definition: (Winkel)

$$\text{Cauchy-Schwarzsche-Ungl.} \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

$$\Rightarrow \exists \text{ ein } \varphi \in [0, \pi] : \cos(\varphi)$$

$\uparrow$
Winkel

20.8 Definition: $V, W \in \mathbb{R}^n$: $V + \mathbb{R}W = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : u = v + \lambda w\}$

$L \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gerade: $\Leftrightarrow \exists v, w \in \mathbb{R}^n : L = v + \mathbb{R}w$
 $w \neq 0$

Bemerkung: λ heißt Parameter, vorgegebenem $x \in L$ ist λ eindeutig.

v, w sind nicht eindeutig.

• $\forall v' \in L \quad \forall \mu \neq 0, w' = \mu w$ gilt $L = v' + R w'$

20.9 Definition: (Lineare Unabhängigkeit)

$w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig $\Leftrightarrow$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

andernfalls "linear abhängig".

Bemerkung: w_1, w_2 linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$
und $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0$

- Nullvektor ist in jedem Vektor linear abhängig
- Wenn $w_1 \neq 0, w_2 \neq 0$ gilt

w_1 und w_2 linear abhängig $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : w_1 = t w_2$
 $t \neq 0$

20.10 Definition: $v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$

$v + R w_1 + R w_2 := \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u = v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \}$

$E \subset \mathbb{R}^n$ heißt Ebene $\Leftrightarrow \exists v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ gilt

mit w_1, w_2 linear unabhängig und $E = v + R w_1 + R w_2$

Bemerkung: λ_1, λ_2 heißen Parameter zu gegebenem $x \in E$ eindeutig.

Sind $v', w_1', w_2' \in E$ mit $w_1' = w_1 - v', w_2' = w_2 - v'$

linear unabhängig, dann $E = v' + R w_1' + R w_2'$

Insbesondere gibt es durch 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, genau eine Ebene.

20.11 Definition: $L \subset \mathbb{R}^n$ Gerade, $u \in \mathbb{R}^n$ dann heißt

$d(u, L) = \min \{ \|u - x\| \mid x \in L \}$ heißt

Abstand von L und u .

20.12 Satz: Sei $L = v + R w$ Gerade, $u \in \mathbb{R}^n$

1) $\exists$ ein $x \in L$ mit $\langle x - u, w \rangle = 0$

$$2) d(u, L) = d(x, u)$$

1. h. der senkrechte Abstand ist der kürzeste

$$3) d(u, L) = \|v - u\| - \frac{\langle v - u, w \rangle}{\|w\|}$$

99

Beweis: 1) Schreibe $x = v + \lambda w$

$$0 \stackrel{!}{=} \langle x - u, w \rangle = \langle v + \lambda w - u, w \rangle = \langle v - u, w \rangle + \lambda \langle w, w \rangle \quad (20.3)$$

$$\Rightarrow \lambda = - \frac{\langle v - u, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$$

$$2) \forall x' = v + \lambda' w \in L \text{ mit}$$

$$\|x' - u\|^2 \stackrel{20.3.5)}{=} \|x - u\|^2 + 2 \langle u - x, x - x' \rangle + \|x - x'\|^2$$

$$\underbrace{\langle u - x, x - x' \rangle}_{=0} = \langle u - x, (\lambda - \lambda') w \rangle = 0$$

$$> \|x - u\|^2$$

3) Einsetzen

20.13 Beispiel: $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$+ 2 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle + 2$$

$$-4 - 1 + 2$$

$$-5 \cdot 1 = -5$$

$$0 \stackrel{!}{=} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -3 + 3\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\|x - u\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\|v + \lambda w - u\|$$

20.14 Definition: $E \subset \mathbb{R}^n$ Ebene, $u \in \mathbb{R}^n$

$$d(u, E) = \min \{ \|u - x\| \mid x \in E \}$$
 heißt Abstand von E und u .

20.15 Satz: $E = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$ Ebene, $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$1) \exists \text{ ein } x = v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in E \text{ mit}$$

$$\langle x - u, w_1 \rangle = 0, \langle x - u, w_2 \rangle = 0$$

$$2) d(u, E) = d(u, x)$$

$$3) \text{ im Beweis explizite Formel für } \lambda_1, \lambda_2$$

Beweis:

$$1. (I) \quad 0 = \langle x - u, w_1 \rangle = \langle v - u, w_1 \rangle + \lambda_1 \langle w_1, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle w_2, w_1 \rangle$$

$$(II) \quad 0 = \langle x - u, w_2 \rangle = \langle v - u, w_2 \rangle + \lambda_1 \langle w_1, w_2 \rangle + \lambda_2 \langle w_2, w_2 \rangle$$

$$\langle w_2, w_2 \rangle I - \langle w_1, w_2 \rangle II:$$

$$0 = (\langle w_2, w_2 \rangle \langle v - u, w_1 \rangle - \langle w_1, w_2 \rangle \langle v - u, w_2 \rangle) + \lambda_1 (\underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle \langle w_2, w_2 \rangle - \langle w_1, w_2 \rangle^2}_{\neq 0 \text{ (20.4 2)}})$$

$$0 = (\langle w_1, w_1 \rangle \langle v - u, w_2 \rangle - \langle w_1, w_2 \rangle \langle v - u, w_1 \rangle) + \lambda_2 (\underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle \langle w_2, w_2 \rangle - \langle w_1, w_2 \rangle^2}_{\neq 0 \text{ (20.4 2)}})$$

also λ_1, λ_2 eindeutig.

$$2. \quad \forall x' = v + \lambda_1' w_1 + \lambda_2' w_2 \text{ ist mit (20.3 5)}$$

$$\|x' - u\|^2 = \|u - x\|^2 + 2 \underbrace{\langle u - x, (\lambda_1 - \lambda_1') w_1 + (\lambda_2 - \lambda_2') w_2 \rangle}_0 + \|x - x'\|^2$$

$$> \|u - x\|^2$$

20.16 Beispiel: $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$0 \stackrel{!}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + \lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x - u\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

