

§ 2.1 Vektorräume

Sei K ein Körper

101

Bsp. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}; \quad K = \mathbb{Z}/p, \quad p$ Primzahl

2.1.1 Def

Ein K -Vektorraum V ist eine Menge V zusammen mit Abb.

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

so daß

(1) $(K, +)$ ist abelsche Gruppe

(2) $\forall v, w \in V, \lambda, \mu \in K$ gilt

(Distributivgesetz)

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

(Assoziativ)

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$$

gilt.

Insbesondere $\exists 0 = 0_V \in V$ mit

und zu $v \in V$ $\exists$ negatives, welches mit $(-1)_K v = -v$ übereinstimmt.

Die Elemente $\lambda \in K$ nennt man Skalare

und $K \times V \rightarrow V$ "Skalarmultiplikation"

$V \times V \rightarrow V$ Vektoraddition

2.1.2 Beispiele

1) $V = K^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

2) X beliebige Menge

$$V = \text{Abb}(X, K) = \{f: X \rightarrow K\}$$

Ein K -Vektorraum

$f, g \in \text{Abb}(X, K)$, dann $0 \in \text{Abb}(X, K)$ mit Abb.

$$0(x) = 0 \in K \quad \forall x \in X$$

$2f, f+g: X \rightarrow K$ definiert durch

$$0_K \in K, 0_V \in V$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und}$$

$$(2f)(x) = 2f(x) \quad \text{definiert.}$$

Der Spezialfall $X = \{1, \dots, n\}$

$$\text{Abb}(\{1, \dots, n\}, K) = K^n.$$

3) $K = \mathbb{R}$, $X = [a, b]$

$$C[a, b] := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

Vektorraum der stetigen Funktionen.

$$C^k[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig diffbar}\}$$

$$C^\infty[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \infty\text{-oft diffbar}\}$$

4) $K[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in K\}$ der

Raum der Polynome mit Koeffizienten in K

K -Vektorraum

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + b_3 x^3$$

Def:

$$f \in K[x] \quad f = a_0 + \dots + a_n x^n$$

$$\deg f = n \quad \text{falls } a_n \neq 0$$

$$V_d := \{f \in K[x] \mid \deg f \leq d\}$$

$$S) K[[X]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_i \in K \right\}$$

K -Vektorraum der formalen Potenzreihen.

102

21.3 Def:

Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum von V , wenn

$$+ \text{ bzw. } \cdot: U \times U \rightarrow U \subset V \quad \text{Wekt in } U \text{ hat}$$

$$U \times U \rightarrow U \subset V \quad \text{Wekt in } U \text{ hat}$$

und $(U, +, \cdot)$ ebenfalls ein K -Vektorraum ist.

Bem.:

$$U \subset V \quad \text{UVR (Untervektorraum)} \Rightarrow 0 \in U.$$

Beweis: $U \neq \emptyset$ da $0_U \in U$ existiert

$$0_U + 0_U = 0_U \in U \subset V$$

Addition von $-0_U \in V$

$$(0_U + 0_U) - 0_U = 0_U - 0_U = 0_V$$

"

$$0_U + (0_U - 0_U) = 0_U + 0_V = 0_U$$

Beispiele

1) $C^\infty[a, b] \subset C^k[a, b] \subset C[a, b] \subset \text{Abb.}([a, b], \mathbb{R})$
sind Untervektorräume

2) $\mathbb{R}^3$, $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade L ist UVR $(\Leftrightarrow) 0 \in L$
 $0 \in L$ ist klar für UVR. Umgekehrt

$$L = \{ t v \mid t \in \mathbb{R} \} \text{ durch } 0$$

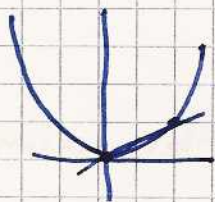
$$t_1 v + t_2 v = (t_1 + t_2) v \in L$$

$$2(t_1 v) = (2t_1) v \in L$$



Analog: $E \subset \mathbb{R}^3$ Ebene. E ist UVR $(\Leftrightarrow) 0 \in E$

3) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$



ist kein UVR.

Zwar gilt $0 \in \Gamma$. Aber $\frac{1}{2}(1,1) \notin \Gamma$ obwohl $(1,1) \in \Gamma$

4) $V_d = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid d_y f \leq d\}$
UVR von $C^\infty(\mathbb{R})$

5) Sei $\mathcal{W}_i$ eine Familie von UVR von V . Dann ist
 $\mathcal{U} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$ ein UVR.

$$v, w \in \mathcal{U} = \bigcap \mathcal{W}_i \Rightarrow v, w \in \mathcal{W}_i$$

$$\Rightarrow v + w \in \mathcal{W}_i \quad \forall i \Rightarrow v + w \in \mathcal{U} = \bigcap \mathcal{W}_i$$

$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ UVR, dann gilt c.a. nicht, daß
 $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ ein UVR ist.

Bsp.:

$$\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{U}_1 = \{(x, y) \mid y = 0\}, \mathcal{U}_2 = \{(x, y) \mid x = 0\}$$

$$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$$

$$\text{aber } (1,0) \in \mathcal{U}_1$$

$$(0,1) \in \mathcal{U}_2$$



21.4 Def.

Sei X eine Menge. Eine Familie von Elementen aus X (indiziert durch die Indexmenge I) ist eine Abbildung $\varphi: I \rightarrow X, i \mapsto x_i$

Bsp: $I = \{1, \dots, n\}, (x_i)_{i=1, \dots, n}$

Beachte: $\{x_1, \dots, x_n\}$ kann weniger als n Elemente haben, daher $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ nicht dasselbe wie $\{x_1, \dots, x_n\}$

Ist $J \subset I$, dann ist $\varphi|_J: J \rightarrow X$ eine Teilfamilie $(x_i)_{i \in J}$

Endliche Familie ist eine Familie $(x_i)_{i \in J}$, wobei die Indexmenge endlich ist.

21.5 Def

Ist V ein K -Vektorraum und $(v_i)_{i=1, \dots, t}$ eine Familie von Vektoren aus V , dann heißt $v \in V$ Linearkombination von $v_1, \dots, v_t$, wenn Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ existieren, so daß $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t$ gilt.

Der lineare Spann von $v_1, \dots, v_t$ ist $\text{span}(v_1, \dots, v_t) = \{v \in V \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t\} \subset V$.

Bem.:

$\text{Span}(v_i)_{i \in \{1, \dots, t\}}$ ist der kleinste UVR, der $v_1, \dots, v_t$ enthält.

- $\text{Span}(v_i)_{i=1, \dots, t}$ ist UVR
- Enthält $v_1, \dots, v_t$
- jedes UVR $W \subset V$ mit $v_1, \dots, v_t \in W$ enthält $\text{Span}(v_i)$

21.6 Def

$(v_i)_{i \in I}$ heißt Erzeugendensystem von V , wenn sich jedes Element von V als endliche Linearkombination von v_i darstellen lässt, d.h. $\forall v \in V$

$\exists J \in I, J$ endlich und $\lambda_j \in K$ für $j \in J$,

so daß $v = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$

Bsp.:

$K[X]$. Die Familie $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist ein Erzeugendensystem von $K[X]$

dann ist $f \in K[X]$ und $\deg f \leq n$, dann ist

f Linearkombination von $1, x, x^2, \dots, x^n$

$(x^k)_{k=0, \dots, n}$

21.7 Def.

Eine Familie von Vektoren $(v_i)_{i \in I}$ heißt linear unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ und jede Lineardarstellung der Null das gilt

$$0 = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j \in V \text{ gilt } \lambda_j = 0 \quad \forall j \in J.$$

Bsp.:

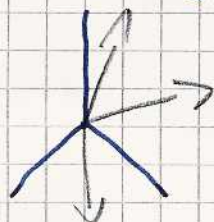
$(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $K[X]$ ist linear unabhängig, denn

$$0 = \sum_{j=0}^n \lambda_j x^j \Leftrightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j \text{ mit } 0 \leq j \leq n$$

Bsp.:

$\mathbb{R}^3$ $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ ist ein Erzeugendensystem

$\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ liegen nicht in einer Ebene E durch 0



$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig

$(\Leftrightarrow) v_1, v_2, v_3$ sind nicht in einer Ebene durch 0 enthalten

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ sind l. u.

$(\Leftrightarrow) v_1, v_2$ sind nicht in einer Geraden durch 0 enthalten

21.8 Lemma

Sei $(v_i)_{i \in \{1, \dots, t\}}$ eine Familie von Vektoren. $(v_i)_{i \in \{1, \dots, t\}}$ sind l. u. $(\Leftrightarrow)$ es zu jedem $v \in \text{Span}(v_i | i=1, \dots, t)$ genau eine Darstellung $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t$ gibt.

Beweis:

Die Existenz einer Darstellung folgt, da $\text{Span}(v_i)$ von $v_1, \dots, v_t$ erzeugt wird.

Ist die Darstellung eindeutig, so folgt insbesondere aus

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t = 0v_1 + \dots + 0v_t$$

$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_t = 0$ d.h. $v_1, \dots, v_t$ sind l. u.

Umgekehrt, sind $v_1, \dots, v_t$ l. u., und sind

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \quad v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_t v_t$$

zwei Darstellungen, so folgt

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_t - \mu_t)v_t$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_t - \mu_t = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_t = \mu_t$$

□

21.9 Beispiel

$$1) K^m \ni e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Position}}}{1}, \dots, 0)$$

Dann $e_1, \dots, e_n$ ein Erzeugendensystem

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$(x_1, 0, \dots, 0) + (0, \dots, x_n)$$

$$2) \{1, t, t^2\} = (t^k)_{k \in \mathbb{N}}$$

ist Erzeugendensystem von $K[t]$

$$3) \text{ In } V = K[[t]] \text{ ist } (t^k)_{k \in \mathbb{N}} \\ \text{kein Erzeugendensystem}$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

ist keine endliche Linearkombination

Def $(v_i)_{i \in I}$ Vektoren aus V

heißen linear unabhängig, wenn für jede endliche Summe

$$0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \text{ folgt } \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$$

Mit anderen Worten: Die Null läßt sich nur trivial darstellen.

21.10 Bsp.

$$1) K^m \ni e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

$e_1, \dots, e_n$ sind lin. unabh.

$$K^m \ni 0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

2) $(t^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind in $K[t]$ bzw. $K[[t]]$
 K -linear unabhängig.

Lemma:

$(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V und
 $\text{Span}(v_i)_{i \in I} \subset V$ aufgespannter UVR

Dann: $(v_i)_{i \in I}$ sind l.u.

($\Rightarrow$) j.d. Vektor $v \in \text{Span}(v_i)$ hat genau eine
Darstellung $v = \sum_{k=1}^r \lambda_k v_{i_k}$

2.11 Bem.

V K -Vektorraum $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren

1) Ist $(v_i)_{i \in I}$ l.u. ($\Rightarrow$) jede Teilfamilie $(v_i)_{i \in J}$
wobei $J \subset I$ ist l.u.

2) $v_{i_0} = 0$ für ein $i_0 \in I$. Dann ist $(v_i)_{i \in I}$
linear abhängig.

1. $v_{i_0} = 0$ aber $1 \neq 0$

3) $\exists i_1 \neq i_2 \in I$ mit $v_{i_1} = v_{i_2}$
 $\Rightarrow (v_i)$ linear abh. ($v_{i_1} - v_{i_2} = 0$)

4) $\{v\}$ ist l.u. ($\Rightarrow$) $v \neq 0$

Beweis: $v \neq 0$. $\lambda v = 0$

zu zeigen ist $\lambda = 0$

Ist $\lambda \neq 0$ $\exists \lambda^{-1} \in K$. $\lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$

$$(\lambda^{-1} \lambda) v = 1 \cdot v = v \quad \nabla$$

also $\lambda = 0$

Wenn

5) $v_1, \dots, v_r \in V$ lin. abh. sind, dann

existiert ein k , s.d. v_k sich aus $v_1, \dots, v_{k-1},$

$v_{k+1}, \dots, v_r$ linear kombinieren lässt.

Beweis:

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ nicht alle Null, s.d.

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$$

Ist $\lambda_k \neq 0$ dann folgt

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} v_{k+1} - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_k} v_r$$

$\Rightarrow v_k$ ist Linearkombination von $v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_r$.

6) $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus einem Unterraum $W \subset V$.

Dann $(v_i)_{i \in I}$ l.u. in $W \Leftrightarrow$ l.u. in V

21.12 Def.

Sei V ein Vektorraum. Ein Erzeugendensystem von V ist eine Familie von Vektoren $(v_i)_{i \in I}$, s.d. sich jeder Vektor aus V endliche Linearkombination von Vektoren v_i ist.

Analog: $\text{Span}((v_i)_{i \in I}) = V$.

Ein Erzeugendensystem $(v_i)_{i \in I}$ aus linear unabhängige Vektoren heißt Basis V .

Die Anzahl der Elemente von I heißt Länge der Basis.

21.13 Bsp.

1) $K^m \ni e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$e_1, \dots, e_n$ ist eine Basis von K^m

n ist die Länge dieser Basis

$e_1, \dots, e_n$ heißt Standardbasis von K^m

2) $V = K[t]$ ist $(t^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Basis

Die Länge der Basis ist unendlich.

$\{(x-1)^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine Basis

100

21.14 Satz

V K -Vektorraum, $V \neq \{0\}$, $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren.

Äquivalent sind

- 1) $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis
- 2) $(v_i)_{i \in I}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem, d.h. $\forall J \subsetneq I$ erzeugt $(v_i)_{i \in J}$ nicht mehr V .
- 3) $(v_i)_{i \in I}$ ist eine unverlängerbare Familie von l.l. Vektoren aus V , d.h. $(v_i)_{i \in J}$ weitere Familie, $I \subsetneq J$ ist linear abhängig
- 4) Jeder Vektor läßt sich eindeutig darstellen
$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} v_{ik}$$

d.h. λ_{ik} ist eindeutig bestimmt

$$\text{Span}((v_i)_{i \in I}) = \bigcap_{W \subset V} W \quad \text{UVR, } v_i \in W \quad \forall i \in I$$

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2)

angenommen $(v_i)_{i \in I}$ ist verkürzbar, etwa $v_1 \in$

$$\text{Span}((v_i)_{i \in I \setminus \{1\}}) = V$$

$$v_{i_0} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} v_{ik} \Rightarrow v_{i_0} \in \text{Span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) \text{ sind lin. abh.}$$

$\Rightarrow (v_i)$ keine Basis

2) $\Rightarrow$ 3)

$(v_i)_{i \in I}$ unverkürzbares Erzeugendensystem

zeigen zunächst: $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Wenn nicht $\exists i_0 : v_{i_0} = \lambda_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} v_{i_n}$

$$i_1, \dots, i_r \in I \setminus \{i_0\}$$

$$\Rightarrow v_{i_0} \in \text{span}((v_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$$

$$\Rightarrow \text{Alle } v_i \in \text{span}((v_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$$

$$\Rightarrow V = \text{span}((v_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}) \quad \text{zu unverkürzbar}$$

$(v_i)_{i \in I}$ ist nicht lin. unabh. vorzugeben, da jeder Vektor $v \in V$ Linearkombination der $(v_i)_{i \in I}$ ist.

$$3) \Rightarrow 4)$$

Sei $(v_i)_{i \in I}$ l. u., unvollständig

$\Rightarrow$ j. weitere Vektor $v \in V$ gibt linear abh.ing.

System $(v_i)_{i \in I} \cup \{v\}$

$$\text{Also } \exists \lambda v + \lambda_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} v_{i_r} = 0; \lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow v = -\left(\frac{\lambda_{i_1}}{\lambda} v_{i_1} + \dots + \frac{\lambda_{i_r}}{\lambda} v_{i_r}\right)$$

$\Rightarrow$ $\exists$ Darstellung. Eindeutigkeit gilt, da eine Differenz mit Koeffizienten null alle Null sonst eine Abhängigkeitsrelation wäre.

$$4) \Rightarrow 1)$$

$\exists$ Darstellung $\Rightarrow$ Erzeugendensystem
Eindeutigkeit $\Rightarrow$ linear unabh. $\Rightarrow$ Basis



21.15 Theorem

Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ ein endliches Erzeugendensystem von V , dann kann man unter diesen Vektoren eine Basis auswählen, d.h. $\exists m \leq r$ und $i_1, \dots, i_m$ so daß $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ eine Basis von V bilden

Beweis:

Nehmen Vektoren weg, solange bis wir ein unverkleinbares Erzeugendensystem erhalten. Dies ist dann eine Basis $\square$

Ziel: Je zwei Basen von V haben die gleiche Länge

21.16 Austauschlemma

Sei V ein K -Vektorraum, $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von

Ist $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in V$ ein Vektor $\neq 0$,

dann existiert ein $k \in \{1, \dots, r\}$, sodass

$v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r$ ebenfalls eine Basis von V bildet.

Beweis:

Da $w \neq 0 \exists k$ sd. $\lambda_k \neq 0$.

Nach Umr Nummerierung dürfen wir $k=1$ annehmen.

Wir zeigen $(w, v_2, \dots, v_r)$ bilden eine Basis.

1) Erzeugung

$$V \ni v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r.$$

Nach Vor. gilt

$$\frac{1}{\lambda_1} w = v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \dots + \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r$$

$$\text{also } v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r$$

$$\Rightarrow v = \mu_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \right) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r$$

$$= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + \left(\mu_2 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \lambda_2 \right) v_2 + \dots + \left(\mu_r - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \lambda_r \right) v_r$$

$\Rightarrow w, v_2, \dots, v_r$ erzeugen.

b) $w, v_1, \dots, v_r$ lin. unabh.

angenommen

$$0 = \mu_1 w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r$$

$$= \lambda_1 \mu_1 v_1 + (\mu_2 + \mu_1 \lambda_2) v_2 + \dots + (\mu_r + \mu_1 \lambda_r) v_r$$

$$v_1, \dots, v_r \text{ lin. unabh.} \Rightarrow \lambda_1 \mu_1 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$$

da K ein Körper ist

$$0 = \mu_2 + \mu_1 \lambda_2 = \mu_2, \dots,$$

$$0 = \mu_r + \mu_1 \lambda_r = \mu_r$$

was wir zeigen wollten. $\square$

21.17 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

Sei $v_1, \dots, v_r$ eine Basis des K -VR V und

$w_1, \dots, w_m$ eine Familie von lin. unabh. Vektoren aus V . Dann gilt:

$m \leq r$ und $\exists i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, r\}$, so daß

$\{w_1, \dots, w_m, v_j, j \notin \{i_1, \dots, i_m\}\}$ ebenfalls eine Basis von V bilden.

(Wir tauschen $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ mit $w_1, \dots, w_m$ aus)

21.18 Isomorphie

Je zwei Basen von V haben die gleiche Länge.

21.19 Satz (Austauschsatz)

Sei V K -VR und $v_1, \dots, v_r$ eine Basis.

Seien $w_1, \dots, w_n$ eine Familie linear unabh. Vektoren. Dann gilt $n \leq r$ und es existieren Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\}$, so daß nach Austausch von v_{i_k} mit w_k nachwievor eine Basis haben.

Gilt außerdem Wkten: Nach Umnummerierung von $v_1, \dots, v_r$ ist $w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r$ ebenfalls eine Basis.

Austauschlemma

$v_1, \dots, v_r$ Basis, $w \in V$, $w \neq 0$. Dann existiert ein k , so daß

$v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r$ eine Basis bildet.

Bew.: Da $v_1, \dots, v_r$ Basis sind $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$

$$\text{s.d. } w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$$

Ab k kann jeder Index mit $\lambda_k \neq 0$ gewählt werden.

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} w - \frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_k} v_r$$

(b'ke Term fehlt!)

$$u = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i = \frac{\mu_k}{\lambda_k} w + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r (\mu_i - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \lambda_i) v_i$$

$$\in \text{Span} \langle v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r \rangle$$

$\Rightarrow$ Erzeugendensystem linear unabh.

$$0 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k w + \dots + \mu_r v_r$$

$$= (\mu_1 + \lambda_1 \mu_k) v_1 + \dots + \lambda_k \lambda_k v_k + \dots + (\mu_r + \mu_k \lambda_r) v_r$$

$\lambda_k \neq 0 \Rightarrow \mu_k = 0, \mu_j = 0$

Beweis des Austauschsatzes

Induktion nach n

$n=0$: nichts zu zeigen

$n=1$, $w_1 \neq 0$, $v \neq \{0\} \Rightarrow r \geq 1$

Austauschlemma $\Rightarrow$ Nach Umnummierung von $v_1, \dots, v_r$ ist auch $w_1, v_1, \dots, v_r$ eine Basis, was die Beh. Fall $n=1$ ist

$n-1 \leadsto n$

Induktionsvoraussetzung

$w_1, \dots, w_{n-1}, v_n, \dots, v_r$ ist eine Basis von U .

$$v \ni w_n = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{n-1} w_{n-1} + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_r v_r$$

Es ist nicht möglich, daß $\lambda_n = 0, \dots, \lambda_r = 0$ gilt.

Denn dann wären

$w_1, \dots, w_{n-1}, w_n$ lin. abhängig im Widerspruch zur Voraussetzung

Insbesondere $r \geq n$.

Nach Umnummern können wir annehmen, daß $\lambda_n \neq 0$

Austauschlemma $\Rightarrow$

$w_1, \dots, w_{n-1}, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r$ eine Basis von U bilden

□

21.20 Def.

Sei V ein K -VR.

Hat V eine Basis $v_1, \dots, v_r$ endlicher Länge,
dann def. wir $\dim V = r$ und jede Basis
hat die Länge r . Insbesondere $\dim \{0\} = 0$.

Gibt es keine Basis endlicher Länge, dann
setzen wir $\dim V = \infty$

Also die Dimension eines K -VR ist

$$\dim V = \begin{cases} r \in \mathbb{N} \\ \infty \end{cases}$$

V heißt endlichdimensional, wenn $\dim V < \infty$

21.21 Beispiele

1) K^m , $e_1, \dots, e_m$ Standardbasis $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$
i-te Stelle

$$\Rightarrow \dim K^m = m$$

2) $K[t]$ hat Basis $\{t^k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{1, t, t^2, \dots\}$

$$\dim_K K[t] = \infty$$

3) $K[t]_{\leq d} = V_d$ hat Basis $1, t, t^2, \dots, t^d$

$$\Rightarrow \dim V_d = d+1$$

$1, (t-1), (t-1)^2, \dots, (t-1)^d$ ebenfalls Basis

4) $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$ -VR. $\mathbb{C}$ hat die Basis

$1, i$ als $\mathbb{R}$ -VR

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$$

5) $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ -VR

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = ?$$

6.22 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Seien $x_1, \dots, x_m$ Unbestimmte. Ein lineares Gleichungssystem für $x_1, \dots, x_m$ hat die Gestalt

$$* \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m & = b_m \end{cases}$$

m Koeffizienten $a_{ij} \in K$ und m Konstanten $b_1, \dots, b_m \in K$

Wie läßt sich die Lösungsmenge bestimmen?

22.1 Beispiel

$$K = \mathbb{Q}, \quad n = m = 3$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \quad \text{I} \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \quad \text{II} \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 3 \quad \text{III} \end{array}$$

Benutze I, um in II, III x_1 zu eliminieren

$$\text{II}' = \text{II} - 2 \cdot \text{I} \quad -x_2 + 4x_3 = 0$$

$$\text{III}' = \text{III} + \text{I} \quad 2x_2 + x_3 = 4$$

$$\text{III}'' = \text{III}' + 2 \cdot \text{II}' \quad 9x_3 = 4$$

Also nach Umformungen:

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ 9x_3 & = & 4 \end{array} \right\} \text{ hat Zeilenstufenform}$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{4}{9}, \text{ einsetzen in II}' : x_2 = \frac{16}{9}$$

$$x_1 + \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Probe!

22.2 Eigentlich ist es überflüssig, x_1, x_2, x_3 mit zu schleppen.

Def: Eine $n \times m$ Matrix $A = (a_{ij})$ ist ein System

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

von $n \times m$ Elementen aus K .

$M(n \times m, K) = K^{n \times m}$ bezeichnet die Menge aller $n \times m$ Matrizen mit Einträgen $a_{ij} \in K$.

$a_{i\bullet} = (a_{i1}, \dots, a_{im}) \in K^m$ heißt i -ter Zeilenvektor von A und

$a_{\bullet j} = a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^n$ heißt j -ter Spaltenvektor von A .

i : Zeilenindex

j : Spaltenindex

22.3 Def.

Sei A eine $K^{n \times m}$, $B = M(m \times k, K)$.

Dann ist das Matrixprodukt

$C = A \cdot B \in M(n \times k, K)$ durch

$C = (c_{il})$ mit $c_{il} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jl}$ erklärt.

(i -te Zeile von A $\cdot$ l -te Spalte von B)

Bem.:

Später werden wir sehen, daß Matrizen Abbildungen von $K^m \rightarrow K^n$ beschreiben und das Produkt die Komposition.

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{c|c} \overline{1} & \overline{0} \\ \hline \overline{1} & \overline{1} \\ \hline \overline{1} & \overline{2} \end{array} \right)$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \overline{6} & \overline{8} \\ \overline{15} & \overline{17} \end{bmatrix} \in M(2 \times 2)$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{5} & \overline{7} & \overline{9} \\ \overline{9} & \overline{12} & \overline{15} \end{bmatrix} \in M(3 \times 3)$$

ist nicht kommutativ!

Fassen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m = K^{m \times 1}$ als $m \times 1$ -Matrix auf,

so schreibt sich das Gleichungssystem (*)
in der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder kürzer:

$$\boxed{Ax = b}$$

22.4 Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem.
Dann heißt

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

die zugehörige erweiterte Matrix.

Durch Zeilenoperation können wir das Gleichungs-

System vereinfachen.

Def.: Die Operationen

1) Multiplikation einer Zeile mit Skalar $\lambda \neq 0 \in K$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2) Addition einer Zeile zu einer anderen (-ite zur k-ten)

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_k + a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_k + \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

4) Vertauschen von zwei Zeilen

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

heißten elementare Zeilenoperationen

22.5 Satz

Durch elementare Zeilenoperationen läßt sich jede Matrix in Zeilenstufenform bringen,

Def.:

$D = (d_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$ eine Matrix $\in M(n \times k, K)$

ist in Zeilenstufenform, wenn die Einträge unterhalb einer Treppe mit Stufen der Höhe 1 null sind



Idioten aus dem Beweis:

Gaußalgorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme

22.6 Gaußalgorithmus

A $n \times m$ Matrix, $b \in K^m$

Wollen $Ax = b$ mit $x \in K^m$ lösen.

Bilden die erweiterte Matrix $(A : b)$ und wenden elementare Zeilenoperationen an.

1) Suchen eine Zeile mit $a_{i1} \neq 0$ und vertauschen diese mit der ersten Zeile

(Pivotwahl)

2) Subtrahieren das $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ -fache der ersten Zeile von der k -ten für $k = 2, \dots, n$

Anschließend hat die erweiterte Matrix die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

(Erreichen wir auch, wenn erste Spalte = 0)

3) Lösen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

4) Setzen sämtliche Lösungen von 3) in die erste Gleichung ein und bestimmen zugehöriges x_1 .

(wenn $a_{11} = 0$, dann ist x_1 beliebig)

22.7 Aufwand des Gauß-Algorithmus

12

im Fall $n = m$

1) n Vergleiche mit Null

2) Division: $\frac{1}{a_{11}}$

Multiplikationen: $(m+1)(m-1)$

Addition: $m(m-1)$

3) Rekursion

4) $n-1$ Multiplikationen

$+1$
 $n-1$ Additionen

Insgesamt:

Multiplikation: $\sum_{k=1}^n [(k+1)(k-1) + k]$

Addition: $\sum_{k=1}^n [k(k-1) + (k-1)]$

Division: n

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation} \quad \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^3}{3} + O(n^2) = O(n^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Addition} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n &= \frac{n^3}{3} + O(n^2) = O(n^3) \end{aligned}$$

Division $O(n)$

Bsp.: 22.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3+1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1+1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7+1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Mit der 1 hat das Gleichungssystem keine Lösung
Ansonsten ist die letzte Gleichung überflüssig
($0=0$) und wir können x_4 beliebig wählen
und x_1, x_2, x_3 abhängig von x_4 bestimmen.

$$x_3 = \frac{7}{4} - x_4$$

$$x_2 = -2x_3 - 3x_4 + 3 = -\frac{7}{2} - x_4 + 3 = -\frac{1}{2} - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 + \frac{1}{2} + x_4 - \frac{7}{4} + x_4 - x_4 = -\frac{1}{4} + x_4$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

22.9 Bemerkung

- 1) Hat das Gleichungssystem Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim$$

$$\geq 1$$

dann existiert eine Lösung ($\Rightarrow$ die letzte Stufe ist im "a"-Bereich

- 2) Die Lösung hängt dann von "Anzahl # Fehl-stufen" Parameter ab.

§ 23 Matrizen und lineare Abbildungen

23.1 Def.

Seien V, W Vektorräume. Eine Abbildung

$$f: V \rightarrow W$$

heißt linear oder Vektorraumhomomorphismus,

wenn $\forall v_1, v_2 \in V$ und $\forall \lambda, \mu \in K$

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$$

gilt.

23.2 Beispiele

$$1) V_d = \mathbb{R}[x] \leq d$$

$$V_d \rightarrow V_d$$

$$p \mapsto p'$$

$$2) V = K^m, W = K^m \text{ und } A \in M(n \times m, K).$$

$$f: K^m \rightarrow K^m$$

$$f(x) = A \cdot x, \text{ denn:}$$

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$$

23.3 Def.

Ein bijektiver Vektorraumhomomorphismus

$f: V \rightarrow W$ heißt Isomorphismus.

V und W dann isomorph vermöge f .

Die Umkehrabbildung $g = f^{-1}: W \rightarrow V$ ist dann ebenfalls linear.

Beweis:

Wollen $g(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda g(w_1) + \mu g(w_2)$ zeigen.

Da f surjektiv ist $\exists v_1, v_2 \in V$ mit

$$f(v_1) = w_1 \text{ und } f(v_2) = w_2$$

$$f \text{ linear} \Rightarrow f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$$

$$= \lambda w_1 + \mu w_2$$

f injektiv:

$$g(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda g(w_1) + \mu g(w_2)$$

23.4 Satz

- 1) Sei V ein endlich dimensionaler K -VR und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis. Dann existiert genau ein Isomorphismus $\varphi: K^n \rightarrow V$ mit $\varphi(e_i) = v_i, i=1, \dots, n$.
- 2) V ein m -dimensionaler VR, W ein n -dimensionaler VR und $f: K^m \rightarrow V; \gamma: K^n \rightarrow W$ die durch Basen $v_1, \dots, v_m$ bzw. $w_1, \dots, w_n$ bestimmten Isomorphismen.

Sei $g: V \rightarrow W$ eine lineare Abb.

$$\begin{array}{ccc} K^m & \xrightarrow{A} & K^n \\ \varphi \downarrow & & \gamma \downarrow \\ V & \xrightarrow{g} & W \end{array}$$

Dann existiert genau eine Matrix $A \in M(n \times m, K)$, so daß $K^m \rightarrow K^n, x \mapsto Ax$

das Diagramm kommutativ macht.

Für $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ gilt:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$$

Bsp.:

- 1) $V = K^m, W = K^n$, dann ist das Bild des $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ der Vektor

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ die j -te Spalte von A .

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \in K^n \quad a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt definiert jede Matrix A die solche Abbildung $f = \gamma \circ A \circ \varphi^{-1}$

$$2) V_d = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$$

$$f = (-1)^1: V_d \rightarrow V_d, p \mapsto p'$$

$1, x, \dots, x^d$ Basis von V_d

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \in K^{d+1} \xrightarrow{\varphi} V_d \xrightarrow{\gamma} \sum_{k=0}^d a_k x^k \xrightarrow{\varphi^{-1}} \sum_{k=1}^d a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$$

Nebendiagonale!

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ d a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 2 & \\ & & \ddots & d \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

Beweis

$$\begin{aligned} 1) \varphi \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} &= \varphi \cdot \sum_{i=1}^n (\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varphi(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \end{aligned}$$

Also φ ist eindeutig bestimmt durch die Linearität und die Forderung $\varphi(e_i) = v_i$.

φ ist Isomorphismus, da jeder Vektor $v \in V$ genau eine Darstellung $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ in der Basis hat.

$$2) A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \lambda_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \lambda_j \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\Rightarrow \varphi \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \right) = \sum_{j=1}^m a_{1j} \lambda_j w_1 + \dots + \sum_{j=1}^m a_{nj} \lambda_j w_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j w_i$$