$$\varphi\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j \,, \quad f\circ\varphi\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \quad = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$$

$\Rightarrow$ Das Diagramm kommutiert

A ist eindeutig bestimmt, denn a_{ij} ist der Koeffizient von $f(v_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} w_k$ vor w_i, und dieser ist eindeutig, da $w_1, \dots, w_m$ eine Basis von W ist.

23.5 Korollar aus dem Beweis

Sind $v_1, \dots, v_k \in V$ beliebige Vektoren. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi: K^k \to V$ mit $f(e_j) = v_j$ $\square$

23.6 Def

Eine quadratische $n\times n$-Matrix $A \in M(n\times n, K)$ heißt invertierbar, wenn Matrixmultiplikation mit A einen Isomorphismus

$K^n \to K^n \,;\, x \mapsto Ax$

Äquivalent: es existiert eine $n\times n$-Matrix A^{-1} über K, so daß $A^{-1}\cdot A = E_n = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix ist.

Mit $GL(n,K) = \{A \in M(n\times n, K) \mid A \text{ ist invertierbar}\}$ bezeichnen wir die Gruppe der invertierbaren $n\times n$-Matrizen.

(GL : general linear)

Assoziativgesetz $(AB)\cdot C = A(BC)$ gilt, da A, B, C lineare Abb. $K^n \to K^n$ entsprechen

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

und Matrizenprodukt der Komposition von Abbildungen.

neutrales Element : $E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Inverses zu A ist A^{-1} $(\Rightarrow A \cdot A^{-1} = E_n)$

$e_j \mapsto \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ j-te Spalte $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} K^m \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\varphi"'] & K^n \arrow[d, "\psi"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

23.7. Satz

Seien $K^m \to K^n$, $K^k \to K^m$ lineare Abbildungen, die durch Matrizen $A \in M(n \times m, K)$, $B \in M(m \times k, K)$ gegeben sind. Dann ist deren Komposition $K^k \xrightarrow{B} K^m \xrightarrow{A} K^n$ durch das Produkt $A \cdot B \in M(n \times k, K)$

Beweis:

$e_l \in K^k$

$$B \cdot e_l = \begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{pmatrix} \in K^m$$

$\uparrow$ l-te Spalte von B

$$\mapsto A \cdot \begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j} b_{jl} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj} b_{jl} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

l-te Spalte von $A \cdot B$

$$AB = \left(\sum_j a_{ij} b_{jl} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ l=1,\dots,k}}$$

Bem.:

Matrizenmultiplikation ist assoziativ

$$(AB)C = A(BC),$$

da Komposition von Abbildungen assoziativ ist.

$GL(n,K) = \{ A \in M(n \times n, K) \mid A \text{ ist invertierbar} \}$

A ist invertierbar $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in M(n \times n, K)$ mit

$A^{-1} \cdot A = E$

$A \cdot A^{-1} = E$, $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $n \times n$ Einheitsmatrix

$A \cdot E = E \cdot A = A$

23.8 Berechnung der Inversen mit dem Gauß-Alg.

$A \cdot A^{-1} = E$

$A \cdot (\text{erste Spalte von } A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

lineares Gleichungssystem für die erste Spalte

analog für 2.-te Spalte usw.

Bilden die erweiterte Matrix $(A \mid E)$ $n \times 2n$-Matrix

Mit Zeilenoperationen zunächst auf Stufenform

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{⌊⌊⌊} & * \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ & B \\ & \end{array} \right)$$

$\Rightarrow A^{-1} = B$

BRUNNEN
Papier und viel mehr.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok.}$$

Aufwand $O(n^3)$

23.9 Satz (Basiswechsel)

Sei $K^m \to K^n$ die lineare Abbildung, die durch $C \in M(n \times m, K)$ gegeben ist. Sei $A \in GL(m, K)$, $B \in GL(n, K)$.

Dann haben Basisabbildungen und kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^m \arrow[r, "C"] \arrow[d, "A"'] & K^n \arrow[d, "B"] \\ K^m \arrow[r, "D"] & K^n \end{tikzcd}$$

wobei $D = BCA^{-1}$

gegeben ist.

23.10 Def.

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb zwischen K-VR.

Dann heißt

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

<u>Kern</u> von f und

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \exists v \in V \;\; f(v) = w\}$$

das <u>Bild</u> von f.

$\ker f \subset V$ ist Untervektorraum von V,

$\operatorname{im}(f)$ ist UVR von W.

Der Rang von f ist

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im}(f)$$

Ist $A \in M(n \times m, K)$. Dann haben wir analoge

$$\ker A, \; \operatorname{im}(A), \; \operatorname{rg} A$$

erklärt, indem wir die durch A definierte lineare Abbildung $K^m \xrightarrow{A} K^n$ betrachten.

Bem.:

$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Span}(a^1, \dots, a^m)$, man spricht auch von Spaltenrang.

Def: $A \in M(m \times n, K)$, dann ist die transponierte Matrix ${}^tA = (b_{ij}) \in M(n \times m, K)$

$b_{ij} = a_{ji}$

Bsp.:

$$ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} $$

Zeilenrang von $A := \operatorname{rg} {}^tA$

23.11 Satz

Sei $K^m \xrightarrow{C} K^n$ eine lineare Abb. definiert durch C.

Dann existieren invertierbare Matrizen $A \in GL(m, K)$, $B \in GL(n, K)$, so daß

$$ D = BCA^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} 1 \cdots 1 & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & \underbrace{\quad}_{m-r} \end{array} \end{array} $$

Dabei ist $r = \operatorname{rg} D = \operatorname{rg} C$.

Insbesondere gilt $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$

Beweis:

Wir wählen geschickt Basen von $V = K^m$, $W = K^n$.

Sei $k =$ dim ker C.

$u_1, \dots, u_k \in \ker C$ eine Basis.

Ergänzen diese zu einer Basis

$v_1, \dots, v_{m-k}, u_1, \dots, u_k$ von V.

(Austauschsatz)

Sei $w_i = C \cdot v_i \quad i = 1, \dots, m-k$

$w_1, \dots, w_{m-k}$ sind linear unabhängig, denn wenn nicht

$\exists \sum_{i=1}^{m-k} \lambda_i w_i = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m-k} \lambda_i v_i \in \ker C$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-k} = 0$, da $v_1, \dots, v_{m-k}, \underbrace{u_1, \dots u_k}_{\text{Basis von Ker } C}$

linear unabhängig sind.

Ergänzen $w_1, \dots, w_{m-k}$ zu einer Basis

$w_1, \dots w_k \in K^m$

In dieser Basis gilt für die durch C definierte lin. Abbildung

$v_1 \mapsto w_1$ $\Rightarrow$ das Bild von C ist durch

$\vdots$ $\quad w_1, \dots, w_{m-k}$ aufgespannt

$v_{m-k} \mapsto w_{m-k}$

$u_1 \mapsto 0$ $\quad \Rightarrow \dim \operatorname{im} C = \operatorname{rg} C = m-k$

$u_k \mapsto 0$

Bzgl. dieser Basis wird die Abbildung

$$D = \left.\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & & 1 & 0 & & \\ \hline & 0 & & & 0 & \end{array}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}}\right\} m-k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}}\right\} n \end{array}$$

$$r = \underbrace{m-k}_{} \quad \underbrace{k}_{}$$

$r = \operatorname{rg} D = \operatorname{rg} C = m-k$

und Matrizen A, B existieren, da jeder Basiswechsel von K^n bzw. K^m durch Elemente von $GL(n, K)$ bzw. $GL(m, K)$ beschrieben werden.

Zum Zusatz:

$${}^t(F \cdot G) = {}^tG \cdot {}^tF$$

$${}^t\left(F \leftarrow \underset{G}{\uparrow}\right) \xleftarrow{G^t} \underset{F^t}{\downarrow}$$

$A \in GL(n, K)$

$^t(A^{-1}) = (^tA)^{-1}$

$$^t(A \cdot A^{-1}) = E = \underbrace{^t(A^{-1})}_{=(^tA)^{-1}} \cdot {}^tA$$

$$^tD = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \end{array}\right) = {}^t(BCA^{-1}) = {}^tA^{-1} \cdot {}^tC \cdot {}^tB$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\wedge \\ rg\, C}}{rg\, D} = rg\, D^t = rg\, C^t$$

$\square$

Bemerkung:

Ist C in Zeilenstufenform

$\Rightarrow rg\, C =$ Anzahl der Stufen.

23.12 Korollar

Sei $\varphi: V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus.

Dann gilt:

$\dim V = \dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi)$

Beweis:

Im Fall $\dim V < \infty$ haben wir $r = m - k = \dim \operatorname{im}(\varphi)$

$k = \dim \ker \varphi$ die Gleichung

$m = \dim V = m - k + k$ im Beweis gezeigt.

Ist $\dim V = \infty$, dann ist wenigstens einer der

Räume $\ker \varphi$ $\operatorname{im} \varphi$ ebenfalls ∞-dimensional.

$\square$

23.13 Satz (Struktursatz für Lösung linearer Gleichungen)

Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $Ax = b$ für $b \in K^m$ eine lineares Gleichungssystem mit dieser Matrix.

Sei $r = \operatorname{rg} A$.

1) Gilt $r = m$, dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ für jede rechte Seite $b \in K^m$ wenigstens eine Lösung

Ist $r < m$, dann hat die Gleichung $Ax = b$ nur dann eine Lösung, wenn $b \in \operatorname{im}(A)$

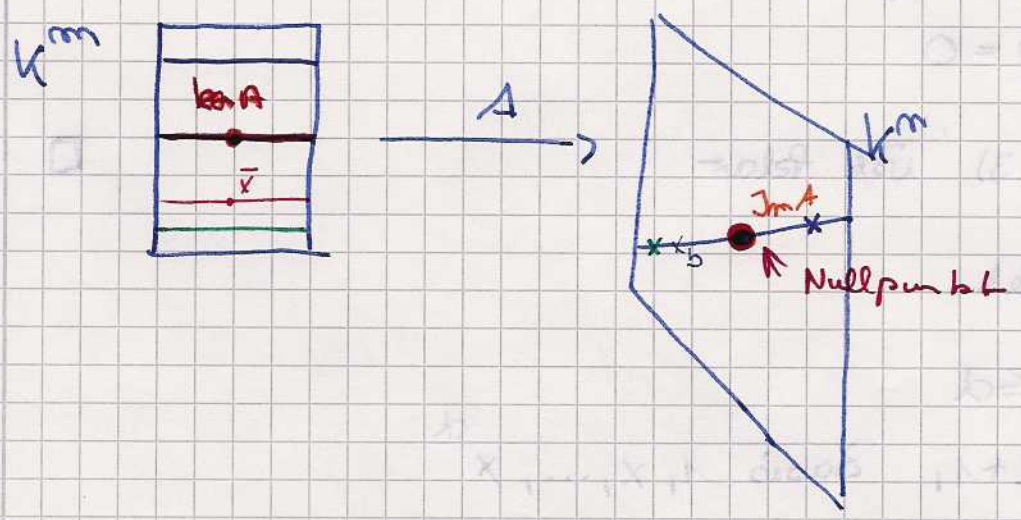
2) Gilt $r = n$, dann ist die Lösung $Ax = b$, wenn existent, eindeutig beschrieben.

Gilt $r < n$, dann ist die Lösung nicht eindeutig sondern hat die Gestalt

$L = \bar{x} + \ker A = \{ \bar{x} + v \mid v \in \ker A \}$,

wobei $\bar{x}$ eine spezielle Lösung ist.

3) Ist $r = n = m$, dann existiert für jedes $b \in K^n$ genau eine Lösung $x \in K^n$ von $Ax = b$, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$



23.14 Korollar

Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $\dim V = \dim W < \infty$.

Dann ist äquivalent:

1) $\operatorname{Ker}(\varphi) = 0$ (φ ist injektiv)

2) $\operatorname{im}(\varphi) = W$ (φ ist surjektiv)

3) φ ist ein Isomorphismus (φ ist bijektiv)

Beweis:

$\infty >$

$\dim W = \dim V = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im}(\varphi)$

1) $\Rightarrow$ 2) $\ker \varphi = 0$, $\dim W = \dim \operatorname{im}(\varphi)$

betrachten Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$

sind linear unabhängige Vektoren in W

$\Rightarrow$ Basis von W, da $\dim W < \infty$

$\Rightarrow W = \operatorname{im}(\varphi)$

2) $\Rightarrow$ 1) $W = \operatorname{im}(\varphi)$, $\dim W < \infty$

$\Rightarrow \dim \ker \varphi = 0$

$\Rightarrow \ker \varphi = 0$

1) & 2) $\Leftrightarrow$ 3) ist klar $\square$

23.15 Beispiel

$V_d = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$

$\dim V_d = d+1$, Basis $1, x, \dots, x^d$

Betrachten Punkte $a_1, \dots, a_{d+1} \in \mathbb{R}$

und die lineare Abbildung

$\varphi: V_d \to \mathbb{R}^{d+1}$

$p \mapsto {}^t(p(a_1), \dots, p(a_{d+1}))$

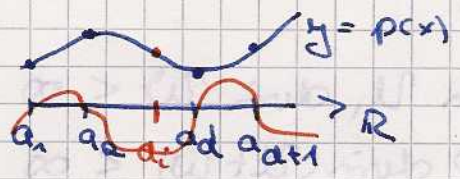
$\ker \varphi = 0$, denn $p \in \ker \varphi \Rightarrow p(a_1) = 0, \dots$

$\dots p(a_{d+1}) = 0$

$\Rightarrow p$ hat $(d+1)$ Nullstellen

$\deg p \leq d \Rightarrow p = 0 \in V_d$

Nach dem Korollar ist φ ein Isomorphismus, d.h. $\exists!$ Polynom $p \in V_d$, das vorgegebene Werte $b_i = p(a_i)$, $i = 1, \dots, d+1$ hat.



Was sind die Urbilder von $e_i = {}^t(0, \dots, 1, \dots 0) \in K^{d+1}$

$$P_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d+1} (x - a_j) \Big/ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d+1} (a_i - a_j)$$

i-te Lagrange Interpolationspolynom

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{d+1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{d+1} b_i P_i(x)$$

23.16 Summen und Durchschnitte von Unterräumen

Def: $U, W \subset V$ seien Untervektorräume.

Dann heißt

$$U + W = \{ v \mid \exists u \in U, w \in W \text{ mit } v = u + w \}$$

die Summe der Unterräume.

$U + W \subset V$ ist ein Untervektorraum

Ebenso ist $U \cap W \subset V$ ein Untervektorraum

23.17 Satz (Dimensionsformel)

$U, W \subset V$ seien Untervektorräume. Dann gilt:

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$$

Bsp.:

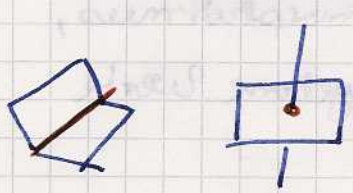
$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$$

$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$

$\dim(U + W) \leq 3$

$\dim U = 2$, $\dim W = 2$

$\Rightarrow \dim U \cap W \geq 1$



Beweis: OE

Wir wählen geordnete Basen. $\dim U, \dim W < \infty$

$\Rightarrow \dim(U+W) < \infty$

Sei $v_1, \dots v_k$ eine Basis von $U \cap W$. Wir ergänzen diese durch $u_{k+1}, \dots, u_n$ zu einer Basis von U und $w_{k+1}, \dots, w_m$ zu einer Basis von W.

Also $k = \dim U \cap W$

$n = \dim U$

$m = \dim W$

Wir zeigen jetzt

$\underbrace{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots u_n, w_{k+1}, \dots, w_m}_{m}$

ist eine Basis von $U+W$.

$m + m - k$, da k doppelt gezählt wurde

Dies impliziert die Behauptung

a) sie erzeugen

Sei $v = u + w \in U + W \Rightarrow u$ Linearkombination von $v_1 \quad v_k \; u_{k+1} \dots u_n$

w Linearkombination von $v_1 \quad v_k \; w_{k+1} \dots w_m$

$\Rightarrow v$ ist Linearkombination von allen diesen

b) linear unabhängig. Angenommen $\exists \lambda_i, \mu_i, \rho_i \in K$ so daß

$$0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j u_j}_{\in\, U} + \underbrace{\sum_{l=k+1}^{m} \rho_l w_l}_{U \cap W} \quad \text{gilt}$$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_i'$, so daß

$$-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i' v_i + \sum_{l=k+1}^{m} \rho_l w_l = 0$$

Da $v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_m$ Basis von W bilden

$\Rightarrow \rho_{k+1} = \dots = \rho_m = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j u_j = 0,$$

Basis von U

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

$\mu_{k+1} = \dots = \mu_n = 0$ $\square$

Berechnung des Durchschnitts ein Beispiel. Suchen

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit anderen Worten: alle Lösungen des homogenen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_3 = 0$

$\lambda_4 = -\lambda_2$

$\Rightarrow U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

§24 Die Determinante

Sei $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ in $\mathbb{R}^n$ n Vektoren

bzw.

$$A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R}),$$

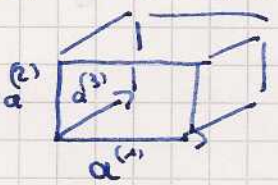
deren Spalten die Vektoren $a^{(j)}$ sind.

Wir wollen $\det A \in \mathbb{R}$ definieren.

24.1 Grundidee

Betrachten das Parallelotop

$$P = \{ \lambda_1 a^{(1)} + \dots + \lambda_n a^{(n)} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \lambda_j \leq 1 \}$$



Dann gilt $\det A = \pm \operatorname{vol}(P)$

das mit einem Vorzeichen versehene Volumen von P.

24.2 Eigenschaften

Welche Eigenschaften hat die Abbildung

$\det : M(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$?

1) det ist linear in den Spalten

a) $\det(a^{(1)}, \dots, a^{(j)} + b^{(j)}, \dots a^{(n)})$

$= \det(a^{(1)}, \dots, a^{(j)}, \dots, a^{(n)}) + \det(a^{(1)}, \dots, b^{(j)}, \dots, a^{(n)})$

b) $\det(a^{(1)}, \dots, \lambda a^{(j)}, \dots, a^{(n)})$

$= \lambda \det(a^{(1)}, \dots, a^{(j)}, \dots a^{(n)})$

2) Wenn eine Spalte doppelt vorkommt

$\det(a^{(1)}, \dots, a^{(i)}, \dots, a^{(j)}, \dots, a^{(n)}) = 0$

Folgerung

3) det ist alternierend

det von $(a^{(1)}, \dots, a^{(i)}, a^{(j)}, \dots, a^{(n)})$

$= -\det(a^{(1)}, a^{(j)}, a^{(i)}, \dots a^{(n)})$

denn

$0 \overset{2)}{=} \det(a^{(1)}, \dots, a^{(i)} + a^{(j)}, \dots a^{(j)} + a^{(i)})$

$\overset{1)}{=} \det(a^{(1)}, \dots, a^{(i)} \dots a^{(j)} \dots a^{(n)})$

$+ \det(a^{(1)}, \dots, a^{(j)} \dots, a^{(i)}, \dots a^{(n)})$

$\begin{cases} + \det(a^{(1)}, \dots a^{(i)} \dots a^{(i)} \dots) \\ + \det(a^{(1)}, \dots a^{(j)}, \dots a^{(j)} \dots) \end{cases}$

$\overset{2)}{=} 0$

24.3 Satz

Es gibt genau eine Abbildung

$$\det : M(n \times n, K) \to K$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) $\det E_n = 1$

2) det ist linear in den Spalten

3) det ist alternierend,

a) d.h. $\det(a^{(1)}, \dots, a^{(i)}, a^{(j)}, a^{(n)})$

$= -\det(a^{(1)}, \dots, a^{(j)}, \dots a^{(i)}, \dots a^{(n)})$

b) $\det(a^{(1)}, \dots a^{(i)}, \dots a^{(i)}, \dots a^{(n)}) = 0$

Ferner gilt:

$\det A \neq 0 \iff A$ ist invertierbar

Beweis

a) Eindeutigkeit (Gibt Methode det A zu berechnen)

Sei A eine Matrix durch Spaltenoperationen genauer Vertauschen von Spalten, Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen, können wir A in Spaltenstufenform bringen

$$A \to A^{\sim} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & & & 0 \\ & \tilde{a}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\det A = \pm \det A^{\sim}$,

wobei das Vorzeichen von der Parität der Anzahl der Vertauschungen abhängt.

2 Fälle

I) $\tilde{a}_{11}, \dots, \tilde{a}_{nn} \neq 0$. Dann zeigen wir

$$\det \tilde{A} = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{nn}$$

II) Ein Diagonaleintrag $= 0$. Dann hat die Spaltenstufenform die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

und die letzte Spalte $= 0$

$\Rightarrow \det \tilde{A} = 0$ und die Formel auch richtig

Fall I

$$\det \tilde{A} = \tilde{a}_{11} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{nn} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix},$$

indem wir die i-te Spalte durch $\tilde{a}_{ii}$ teilen

i-te Spalte $\dfrac{\tilde{A}^{(i)}}{\tilde{a}_{ii}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

nun durch Addition Vielfacher von einer Spalte zu anderen

$$\Rightarrow \det \tilde{A} = \tilde{a}_{11} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{nn} \det(E_n) = \tilde{a}_{11} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{nn} \quad \square$$

b) Existenz ?

24.4 Satz (Leibniz)

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$. Dann gilt:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2(\sigma_2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

dabei ist S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$

und $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i>j} \dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j} \in \{\pm 1\} = (-1)^k$

falls σ ein Produkt von k Transpositionen ist

Beispiel: 24.5

1) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

2) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$
$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$

Aufwand der Permutationssumme : $O(n!)$ Addition
$O((n-1)^{n!})$ Multiplikationen

Beweis von 24.4 und der Existenz

Wegen der Eindeutigkeit genügt es zu zeigen, daß die Permutationssumme die Eigenschaften (1), (2), (3) hat.

Zunächst gilt:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1)\,1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)\,n}$$

$$= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{\rho(1)1} \cdots a_{\rho(n)n}$$

da mit $\sigma \in S_n$ auch $\rho = \sigma^{-1}$ S_n durchläuft und
$\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma$

$(i,j) \in S_n$, $(i,j)^{-1} = (i,j)$,

also $\sigma = \prod_{\nu=1}^{k} (i_\nu, j_\nu) \Rightarrow \sigma^{-1} = \prod_{\nu=1}^{k} (i_{k-\nu}, j_{k-\nu})$

$\operatorname{sgn}: S_n \to \{\pm 1\}$ ist Gruppenhomomorphismus,
d.h. $\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$

(2) Die Linearität

zu zeigen ist:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{\sigma(1)1} \cdots (a_{\sigma(1)j} + b_{\sigma(j)j}) \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

und Faktor λ in j-ter Spalte zieht sich heraus.

$$\sum \operatorname{sgn} \sigma \, (a_{\sigma(1)1} \cdots \lambda a_{\sigma(j)j} \cdots)$$

$$= \lambda \cdot \sum \operatorname{sgn} \sigma \, (a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots)$$

(3) Alternierend

A hat zwei gleiche Spalten, etwa $a^{(i)} = a^{(j)}$

Sei $\tau = (i, j)$. Dann

$$S_n = A_n \cup \tau A_n = A_n \cup A_n \tau$$

$A_n = \ker(S_n \xrightarrow{\operatorname{sgn}} \{\pm 1\})$ geraden Permutation

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} \overset{1}{\operatorname{sgn} \sigma} \, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)j} \cdots a_{\sigma(j)i} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

da Zeile gleich

$$- \sum_{\sigma\tau \in A_n\tau} (- a_{\sigma\tau(1)1} \cdots a_{\sigma\tau(i)i} \cdots a_{\sigma\tau(j)j} \cdots a_{\sigma\tau(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} (\qquad\qquad) - \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)i} \cdots a_{\sigma(i)j} \cdots a_{\sigma(n)}$$

$$= 0$$

Schließlich (1)

Kronecker-Symbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

also $E_n = (\delta_{ij})$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; \delta_{\sigma(1)1} \cdots \delta_{\sigma(n)n}$$

$$= \operatorname{sgn}(id) \, \delta_{11} \cdots \delta_{nn} = 1 \qquad \square$$

24.6 Korollar aus dem Beweis

$A \in M(n \times n, K)$. Dann gilt:

$$\det {}^tA = \det A$$

Insbesondere verändert sich die Determinante einer Matrix unter elementaren Zeilenoperationen genauso wie unter den entsprechenden Spaltenoperationen.

24.7 Beispiel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 \cdot 3$$
$$- 1 \cdot 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 9 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= 18 - 20 + 3 + 10 - 12 - 9$$
$$= -10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

$V_3 = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$p \longmapsto (p(1), p(2), p(3), p(4))$

bzgl. Basis $1, x, x^2, x^3$ von V_3

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 42 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$

24.8 Korollar

Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \det A$

Analog für untere Dreiecksmatrizen

24.9 Satz

$A, B \in M(n \times n, K)$. Dann gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Insbesondere gilt für eine invertierbare Matrix

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Korollar:

$$\det : GL(n, K) \longrightarrow (K^*, \cdot)$$

ist Gruppenhomomorphismus

Def.:

$SL(n, K) = \{ A \in M(n \times n, K) \mid \det A = 1 \}$

heißt Spezielle lineare Gruppe.

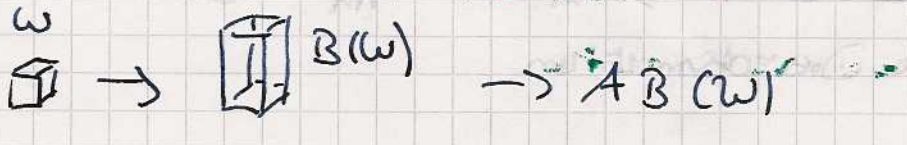
$SL(n, K) \subset GL(n, K)$ ist eine Untergruppe.

Plausibilitätsbeweis: $K = \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "A \cdot B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\det A = \pm \operatorname{vol}(\text{Bild von Einheitswürfel in } \mathbb{R}^n)$

$\det A$ ist der Volumenverzerrungsfaktor



24.10 Def.

Die Matrizen $S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ – i-te Zeile

$\lambda \neq 0$

i-te Spalte

$$Q_i^j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots i \\ \\ \cdots j \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & i & j \end{array} \end{array}$$

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_i^j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & i & j \end{array} \end{array}$$

heißen Elementarmatrizen in $M(n \times n, \mathbb{K})$

24.11 Satz

Multiplikation von A mit Elementarmatrix von rechts gibt eine elementare Spaltenoperation

von links eine Zeilenoperation

Beweis

$$R = Q_i^j(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & -\lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \quad i & \quad j & \end{array} \end{array}$$

$$A = (a_{ij}) = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$$

$$A \cdot R = (a^{(1)}, \dots, a^{(i)}, \dots, a^{(j)} + \lambda a^{(i)}, \dots a^{(n)})$$

$$R = S_i(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} j \\ i \end{array} \end{array}$$

$$A S_i(\lambda) = (a^{(1)}, \dots, \lambda a^{(i)}, \dots, a^{(n)})$$

$$R = P_i^j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & 1 \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & j \end{array} \end{array}$$

$$A \cdot P_j^i = (a^{(1)}, \dots, a^{(j)}, \dots, a^{(i)}, \dots a^{(m)})$$

Vertauschen der Spalten i und j

von links multipliziert

$R \cdot A$

$${}^t(RA) = {}^tA \cdot {}^tR$$

Spaltenoperation auf ${}^tA$, da auch ${}^tR$ eine Elementarmatrix ist.

Also RA gibt elementare Zeilenoperation $\square$

24.12 Satz

Jede invertierbare Matrix $A \in M(n \times n, K)$ ist ein endliches Produkt von Elementarmatrizen.
(Mit anderen Worten: Die Gruppe $GL(n, K)$ wird von den Elementarmatrizen erzeugt)

Beweis:

Im Gauß-Alg. haben wir gesehen, daß jede invertierbare Matrix in endlich vielen Schritten mit Elementartransformationen in E_n überführt werden kann.
Also $\exists\, N \in \mathbb{N}$ und Elementarmatrizen $R_1, \dots, R_N$

$$R_N \cdots R_2 \cdot R_1 \cdot A = E$$

$$\Rightarrow A = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot \ldots \cdot R_N^{-1}.$$

Da mit R auch R^{-1} eine Elementarmatrix ist

$$(P_i^j)^{-1} = P_i^j, \quad S_i(\lambda)^{-1} = S_i\left(\tfrac{1}{\lambda}\right), \quad Q_i^j(\lambda)^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$$

$\square$

Beweis des Produktsatzes

Teil a) Wir betrachten zunächst den Fall, daß A oder B eine Elementarmatrix ist.

Sei etwa $B = S_j(\lambda)$, A beliebig $= (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$

$$A \cdot S_j(\lambda) = (a^{(1)}, \dots, \lambda a^{(j)}, \dots, a^{(n)})$$

$$\det(A S_j(\lambda)) = \lambda \det(a^{(1)}, \dots, a^{(j)}, \dots a^{(n)}) = \det A \cdot \det S_j$$

$$A \cdot Q_i^j(\lambda) = (a^{(1)}, \dots, a^{(i)}, a^{(j)} + \lambda a^{(i)}, \dots, a^{(n)})$$

$$\det(A \cdot Q_i^j(\lambda)) = \det A = \det A \cdot \det Q_i^j(\lambda)$$

$$A \cdot P_i^j = (a^{(1)}, \dots, a^{(j)}, \dots, a^{(i)}, \dots a^{(n)})$$

$$\det(A \cdot P_i^j) = -\det A = \det A \cdot \det P_i^j$$

denn $P_i^j = (b_{ij})$

$$\det P_i^j = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n}$$

$$= \operatorname{sgn}(i,j) \cdot 1 = -1$$

nur einen Summanden $\neq 0$, nämlich den mit $\sigma = \tau = (i,j)$

Für AR Elementarmatrix gilt:

$$\det R \cdot B = \det R \cdot \det B$$

da $\det(RB) = \det({}^t(RB)) = \det({}^tB \cdot {}^tR)$

$$\underset{\text{von rechts}}{=} \det({}^tB) \cdot \det({}^tR) = \det B \cdot \det R$$

Teil b) Den Fall A oder B ist nicht invertierbar

Sei etwa $\det B = 0 \iff \ker(B) \supsetneq \{0\}$

Zeigen müssen wir: $\det(AB) = 0$

$\ker(A \cdot B) \supset \ker(B) \neq 0$

$\Rightarrow \det(AB) = 0$

Andere Fall $\det A = 0$. Betrachten $\ker(AB)^t$

$$= \ker({}^tB \cdot {}^tA)$$

Teil c) $A, B \in GL(n, K)$ beliebig

Beweisen die Aussage mit Induktion nach der Anzahl N der Faktoren von A als Produkt von Elementarmatrizen

$$A = \prod_{k=1}^{N} R_k$$

Induktionsanfang folgt mit Teil a)

Induktionsschritt ($N-1 \to N$)

$$A = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{N-1} R_k \right)}_{= A'} R_N = A' \cdot R_N$$

Es gilt

$$\det A = \det(A' \cdot R_N) = \det A' \cdot \det R_N \quad \text{nach Teil a}$$

$$\det(AB) = \det(A'(R_N \cdot B))$$

$$\overset{\text{Ind.v.}}{=} \det A' \cdot \det(R_N \cdot B)$$

$$\overset{\text{Teil a)}}{=} \det A' \cdot \det R_N \cdot \det B$$

$$= \det A \cdot \det B \qquad \square$$

24.12 Satz (Determinantensatz)

Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Blockmatrix der Gestalt

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{k} & \underbrace{}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

$B \in M(k \times k, K)$, $D \in M(n-k \times n-k, K)$

$C \in M(k \times n-k, K)$.

Dann gilt:

$$\det A = \det B \cdot \det D$$

Beweis:

Wir bringen A durch Spaltenoperationen auf obere Spaltenstufenform.

$$A \to \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{b}_{11} & & & & * & \\ & \ddots & & & & \\ & & \tilde{b}_{kk} & & & \\ \hline & & & \tilde{d}_{11} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tilde{d}_{m-k\,m-k} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \tilde{B} & \tilde{C} \\ \hline 0 & \tilde{D} \end{array}\right)$$

dabei hängt $\tilde{B}$ nur von B ab und

$\det \tilde{B} = \pm \det B$, analog

$\det \tilde{D} = \pm \det D$

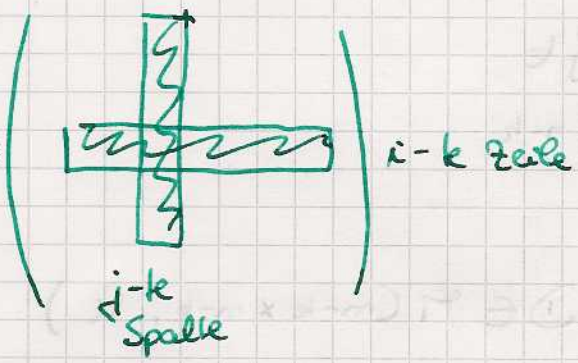
$\det A = \pm \det \tilde{A} = \pm \det \tilde{B} \cdot \det \tilde{D} = \det B \cdot \det D$ $\square$

24.13 Laplace'sche Entwicklungssatz

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times m, K)$

i und j ein Zeilen index bzw. Spaltenindex

Dann sei

$A_{ij} =$ 

schreiben: $A_{ij} \in M(m-1 \times m-1, K)$

also insgesamt m^2 kleine Matrizen

Satz (Laplace, Entwicklung nach der i-ten Zeile)
Mit Notation wie oben gilt:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Analoger Satz gilt für die Entwicklung nach einer Spalte)

Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_{12} \to (-1)^{1+2} = (-1)^3 \to \underline{-1}$$

$$\det A = -3 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -3 \cdot (-13) + 0 - 4 \cdot 1 = 39 - 4 = 35$$

$$\det A = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2$$
$$= 0 + 16 + 45 - 20 - 0 - 6$$
$$= 35$$

24.14 Def.

Sei $A \in M(n \times n, K)$

Sei $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}$ ← Cofaktor

Indices sind vertauscht!

Dann heißt

$$A^{ad} = (\tilde{a}_{ij}) \in M(n \times n, K)$$

die adjungierte Matrix bzw. die Matrix der Cofaktoren von A.

24.15 Satz

$A \in M(n \times n, K)$. Dann

$$A \cdot A^{ad} = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E_n$$

Insbesondere gilt wenn $A \in GL(n, K)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{ad} = \left(\frac{\tilde{a_{ij}}}{\det A} \right)$$

Beispiel

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{ad} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

wenn $ad - bc \neq 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Vorzeichenschema

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{matrix}$$

$$^t A^{ad} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

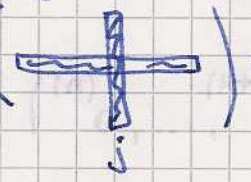
$$A^{ad} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bem. 24.15 und Laplace-Entwicklungssatz sind äquivalent

Erinnerung:

$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$

$A_{ij} =$ 

Cofaktor-Matrix (adjungierte Matrix)

$$A^{ad} := \left((-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji} \right) := (\tilde{a}_{ij})$$

$(\tilde{a}_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ vertauscht!

Satz 24.15 $\quad A^{ad} \cdot A = A \cdot A^{ad} = \det A \cdot E_n = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}$

Beweis.

$$A'_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i-1\,1} & & \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline & & \\ & & a_{nn} \end{array}\right)$$

$$\det A'_{ij} = (-1)^{i+j} \det (A_{ij})$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A_{ij} \\ 0 & \end{pmatrix} = \det A_{ij} = (-1)^{j-1+i-1} \cdot \det A'_{ij}$$

Ferner

$$\det(A_{ij}') = \det(a^{(1)}, \dots, a^{(j-1)}, \dots e_i, a^{(j+1)}, \dots a^{(n)}$$

$$C = (C_{kl}) = A \cdot A^{ad}$$

$$C_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot \tilde{a}_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot \det A_{lj}'$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot \det(a^{(1)}, \dots, a^{(l-1)}, e_j, a^{(l+1)}, \dots a^{(n)})$$

$$= \det(a^{(1)}, \dots, a^{(l-1)} \underbrace{\sum a_{kj} e_j}_{a^{(k)}} a^{(l+1)}, \dots, a^{(n)})$$

$$= \det(a^{(1)}, \dots, a^{(l-1)}, a^{(k)} \dots a^{(n)}) = \delta_{kl} \cdot \det A$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

24.16. Satz (Cramer'sche Regel)

Sei $A \in GL(n,K)$, $b \in K^n$ und $x = {}^t(x_1, \dots x_n) \in K^n$ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

Dann gilt:

$$x_k = \frac{\det(a^{(1)}, \dots, a^{(k-1)}, b, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)})}{\det A}$$

Folgerung: Die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ hängt stetig von den Koeffizienten von $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ ab.

§25 Endomorphismen und Eigenwerte

Bis jetzt haben wir lineare Abbildungen

$$f: V \to W$$

zwischen verschiedenen Vektorräumen betrachtet.

Nun Fall $W = V$

25.1 Def.

Sei V K-VR. Eine lineare Abbildung $f: V \to V$ heißt Endomorphismus.

$\mathrm{End}(V) = \{ f: V \to V \mid f \text{ linear} \}$

heißt Endomorphismen-Ring (zu "Ring" später)

Beispiele

1) $V_d = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$, $f: p \to p'$

$\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

$p \mapsto p'$ Endomorphismus

2) $V = K^n$, $A \in M(n \times n, K)$

$\varphi_A: K^n \to K^n$

$x \mapsto Ax$ Endomorphismus

3) $\mathbb{R}^3$ mit $\| \ \|$ und $\langle x, y \rangle$

Drehung φ mit $0 \in \mathbb{R}^3$ fest

$\Rightarrow$ φ ist linear

$^t(x_1, x_2, x_3) = x \qquad \langle x, e_i \rangle = x_i$

$\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$

Sei V ein n-dimensionaler VR

$f \in \mathrm{End}(V)$; $(v_1, \dots, v_n) \in V$ Basis

$$\begin{tikzcd}
v_j & V \arrow[r, "f"] & V & v_i \\
e_j \arrow[u, mapsto] & K_n \arrow[u, "\varphi_{v_1 \dots v_n}", "\cong"'] \arrow[r, "A"] & K_n \arrow[u, "\cong"'] & e_i \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

25.2 Satz

V VR, $v_1, \dots, v_n$ Basis

$w_1, \dots w_n$ weitere Basis

$f \in \mathrm{End}(V)$

$\exists\ S \in GL(n, K)$.

$$\begin{tikzcd}
 & v_j & V \arrow[dr, "\cong"] & w_i \\
e_j \in K^n \arrow[ur, mapsto] \arrow[rr, "S"'] & & K^n \arrow[ur, "\cong"] & e_i \arrow[ul, mapsto]
\end{tikzcd}$$

wobei $S = (s_{ij})$ durch $v_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} w_i$ bestimmt ist

Ist $A \in M(n \times n, K)$, die f bzgl. der Basis $v_1, \dots, v_n$ darstellt, und B diejenige für f dargestellt bzgl. der Basis $w_1, \dots, w_n$, dann gilt:

$$B = SAS^{-1}$$

Beweis:

1. Teil schon bekannt

$$\begin{tikzcd} & v_j \arrow[dr, phantom, "="] & = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i \\ e_j \arrow[ur] \arrow[r, mapsto, "S"] & \sum s_{ij} e_i \arrow[ur] & = \begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

2. Teil

$$\begin{tikzcd} K^m \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\varphi_{w_i}", "\cong"'] & K^m \arrow[d, "\varphi_{w_i}"', "\cong"] \\ V \arrow[r, "f"] & V \\ K^n \arrow[u, "\varphi_{v_i}", "\cong"'] \arrow[r, "A"] \arrow[uu, bend left=60, "S"] & K^n \arrow[u, "\varphi_{v_i}", "\cong"'] \arrow[uu, bend right=60, "S"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert

$\Rightarrow B = SAS^{-1}$

25.3 Def

Sei V ein endlich dimensionaler K-VR, $f \in End(V)$

Dann ist $\det(f) := \det A \in K$

wobei die Matrix A den Endomorphismus in irgendeiner Basis beschreibt. $(End(K^n) = M(n \times n, K))$

Bem.:

1) $\det(f)$ ist wohldefiniert

Denn ist B eine weitere solche Matrix bzgl. anderer Basis. Dann gilt

$$B = SAS^{-1}$$

$$\rightarrow \det B = \det(SAS^{-1}) = \det S \cdot \det A (\det S)^{-1}$$
$$= \det A \in K$$

2) Für $V = K^n$ und $f = \varphi_A$:

$\det(f) = \det(A)$

3) f ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

klar: f ist iso $\Leftrightarrow A$ invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ $(= \det(f))$

Frage.

Sei $f \in End(V)$. Wie sieht f aus?

Anders: Können wir geschickt eine Basis wählen, so daß A möglichst einfach wird

Also: Wir betrachten die Operation

$$GL(n,K) \times M(n\times n, K) \longrightarrow M(n\times n, K)$$
$$(S, A) \qquad SAS^{-1}$$

Wir suchen Normalformen von A unter dieser Operation

Der zentrale Begriff für diese Fragestellung ist:

25.5 Def

Sei V ein Vektorraum, $f \in End(V)$.

Ein Vektor $v \neq 0 \in V$ heißt Eigenvektor von f mit Eigenwert λ, wenn

$$f(v) = \lambda \cdot v$$

[analog: $v \in K^n \setminus \{0\}$ ist EV von $A \in M(n\times n, K)$, wenn $\exists \lambda \in K$ mit $Av = \lambda v$]

$\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f, wenn ein $v \in V$ existiert mit $v \neq 0$, sodaß

$$f(v) = \lambda v$$

$Eig(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ heißt Eigenraum von f bzgl. λ.

Bem.:

1) $Eig(f, \lambda) \supsetneq \{0\} \iff \lambda$ ist Eigenwert

2) $Eig(f, \lambda) \subset V$ ist Untervektorraum

Bew. $v_1, v_2 \in Eig(f, \lambda)$.

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 \in Eig(f, \lambda)$$

Beispiel:

1) Beschreibt $D \in GL(3, \mathbb{R})$ eine Drehung, dann ist Drehachse

$Eig(D, 1) =$ Drehachse

$S \in GL(3, \mathbb{R})$ Spiegelebene

$Eig(S, 1) =$ Spiegelebene

2) $V = C^\infty(\mathbb{R}) \ni f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\frac{d}{dx} = \varphi = End(V)$

$\varphi(f) = f'$

$e^{\lambda x} \in C^\infty(\mathbb{R})$ Eigenvektor zum Eigenwert λ.

$f' = \lambda f$

$Eig(\frac{d}{dx}, \lambda) = \langle e^{\lambda x} \rangle$

← zu Bem 2)

$\mu \in K \quad v \in Eig(f, \lambda)$

$f(\mu v) = \mu f(v) = \mu \lambda v = \lambda(\mu v)$

$\Rightarrow \mu v \in Eig(f, \lambda)$

3) ~~$v_1 \in V$ zu λ_1, $v_2 \in V$ zu λ_2~~

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann gilt:

$Eig(f, \lambda_1) \cap Eig(f, \lambda_2) = 0$

Sei $v \in Eig(f, \lambda_1) \cap Eig(f, \lambda_2)$

$\Rightarrow \lambda_1 v = f(v) = \lambda_2 v$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow v = 0$ $\square$

25.6. Satz

Es seien $v_1, \dots, v_k$ Eigenvektoren von f bzgl. paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
Dann sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig.

Beweis:

$k=1$: $v_1 \neq 0$ nach Def. von Eigenvektor.

Induktion

$(k-1) \to k$

Angenommen $\mu_1 v_1 + \dots \mu_k v_k = 0$ für $\mu_i \in K$

$$\Rightarrow 0 = f(0) = f(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k)$$
$$= \mu_1 f(v_1) + \dots + \mu_k f(v_k)$$
$$= \mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots \mu_k \lambda_k v_k = 0$$

λ_k-fache der ersten Gleichung abgezogen gilt:

$$\mu_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \mu_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0$$

Ind. Vor.

$$\mu_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = 0 \quad \dots \quad \mu_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$$

Eigenwerte paarweise verschieden $\Rightarrow \lambda_j - \lambda_k \neq 0$

$\Rightarrow \mu_1 = 0, \dots, \mu_{k-1} = 0$

$\Rightarrow \mu_k = 0$

Satz ... $A^{ad} \cdot A = A \cdot A^{ad} = \det A \cdot E_n$

Beweis:

z.z.: $A^{ad} \cdot A = \det A \cdot E_n$

$C = A^{ad} \cdot A = (C_{kl})$ $\qquad \tilde{a}_{kj} = \det(a^{(1)}, \dots, e_j, a^{(k+1)}, \dots a^{(n)})$

$$C_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{kj} \cdot a_{jl} = \sum_{j=1}^{n} \det(a^{(1)}, \dots, a^{(k-1)}, e_j, a^{(k+1)}, \dots a^{(n)}) \cdot a_{jl}$$

$$= \det(a^{(1)}, \dots, a^{(k-1)}, \sum_{j=1}^{n} a_{jl} e_j, \dots a^{(n)})$$

$$= \det(a^{(1)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(l)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)})$$

$$= \delta_{kl} \cdot \det A$$

Für $A \cdot A^{ad} = \det A \cdot E_n$ transponieren wir.

$({}^tA)^{ad} = {}^t(A^{ad})$, 1. Teil ${}^tA^{ad} \cdot A = {}^t(\det A \cdot E_n)$

$\Rightarrow {}^t({}^tA^{ad} \cdot {}^tA) = A \cdot A^{ad} = \det A \cdot E_n$ $\square$

Erinnerung $f \in \mathrm{End}(V)$

$v \in V$, $v \neq 0$ heißt Eigenvektor von f,

wenn $\lambda \in K$ mit $f(v) = \lambda v$

$\lambda \in K$ mit $\exists\, v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$ heißt

Eigenwert von f

$\mathrm{Eig}(f, \lambda) := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$ UVR, $\neq 0 \Leftrightarrow \lambda$ EW

25.7. Def.

$U, W \subset V$ Untervektorräume

Dann heißt die Summe $U+W \subset V$ direkt,

Schreibweise $U \oplus W$, falls $U \cap W = \vartheta$

Allgemeiner: $U_1, \dots, U_k \subset V$ UVR.

$$U_1 \oplus \dots \oplus U_k = (U_1 \oplus \dots \oplus U_{k-1}) \oplus U_k \subset V$$

25.8 Korollar

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte. Dann ist

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_k) \subset V$$

direkt.

(verschiedene Eigenräume schneiden sich nicht)

Berechnung von Eigenwerten

Sei V n-dimensionales VR, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $A \in M(n \times n, K)$ Matrixdarstellung von f bzgl. einer Basis.

25.9 Def.

Das Polynom

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot E_n - A) = \det \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & \\ -a_{21} & t-a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & t-a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

charakteristische Polynom von A.

- $\chi_f(t) := \chi_A(t)$, wobei A Matrixdarstellung von f.

$\chi_f \in K[t]$ ist wohldefiniert, denn ist B Darstellung bzgl. anderer Basis, dann $\exists\, S \in GL(n, K)$ mit $B = SAS^{-1}$

$\chi_B(t) = \det(tE - B) = \det(tE - SAS^{-1})$

$= \det(S(tE-A)S^{-1} = \det S \cdot \det(tE - A) \cdot \frac{1}{\det S} = \chi_A(t)$

25.10 Satz

1) $\lambda \in K$ ist EW von A $\Leftrightarrow$ λ ist eine Nullstelle von χ_A (

2) $Eig(A,\lambda) = Ker(\lambda E - A) = \{ x \in K^n \mid (\lambda E - A)x = 0 \}$

Beweis:

2) $(\lambda E - A)x = 0 \Leftrightarrow \lambda E x = Ax \Leftrightarrow \lambda x = Ax$

$\Leftrightarrow x \in Eig(A,\lambda) \subset K^n$

1) λ EW $\Leftrightarrow Eig(A,\lambda) \supsetneq 0 \Leftrightarrow Ker(\lambda E - A) \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda E - A \in M(n \times n, K)$ ist nicht invertierbar

$\Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0$

25.11 Beispiel

$V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in M(2\times 2, A) = End(\mathbb{R}^2)$

$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & t+2 \end{pmatrix} = (t-1)(t+2) - 2\cdot 2$

$= t^2 + t - 6$

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4\cdot 6}}{-2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$= \frac{4}{2}$ oder $-\frac{6}{2}$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$

$Eig(A,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$x_2 = 1$, $x_1 = -2$

$\Rightarrow Eig(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$Eig(A,-3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$ $\Rightarrow Eig(A,-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & +\frac{1}{5} \\ +\frac{1}{5} & +\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$T \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Probe o.k.

$B = S A S^{-1}$ soll Diagonalmatrix werden

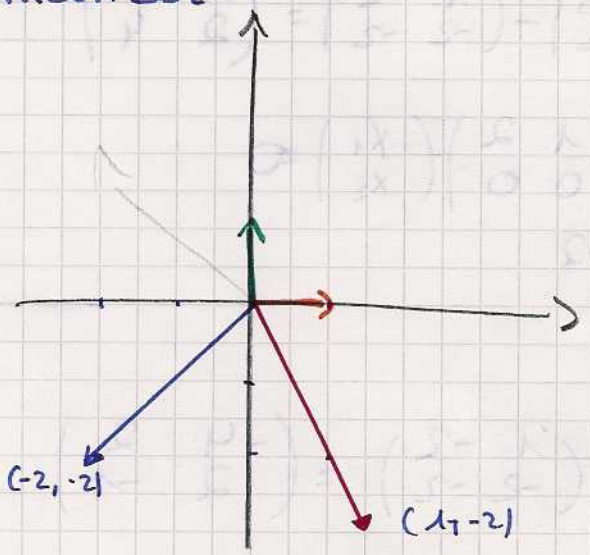
$S = T^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ +1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

geometrisch:



in Original Koordinaten

25.12 Def.

Ein Endomorphismus $f \in End(V)$ heißt halbeinfach oder diagonalisierbar, wenn es eine Basisdarstellung von f durch eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Analog: $A \in M(n \times n, K)$ heißt diagonalisierbar, wenn $\exists\ S \in GL(n, K)$, sodaß

$$SAS^{-1} = D \text{ diagonal}$$

ist.

Bem.:

Eine 1×1 Matrix ist einfach

halbeinfach = "direkte Summe von Einfachen"

25.13 Satz

$A \in M(n \times n, K)$. Äquivalent sind:

1) A ist diagonalisierbar

2) Das charakt. Polynom

$$\chi_A(t) = \prod_{k=1}^{r} (t - \lambda_k)^{e_k}$$

und

$$\dim Eig(A, \lambda_k) = e_k \quad \text{für } k = 1, \dots, r$$

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2)

A diagonalisierbar

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i') = \prod_{k=1}^{r} (t - \lambda_k)^{e_k}$$

wobei λ_k e_k-mal in $\lambda_1', \dots, \lambda_n'$ vorkommt.

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_k) = \ker \begin{pmatrix} \lambda_k - \lambda_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k - \lambda_n' \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_k) = \# \{ j \mid \lambda_j' = \lambda_k \}$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Sei $\chi_A(t) = \prod_{k=1}^{r} (t - \lambda_k)^{e_k}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sind die Eigenwerte von A und

$W = \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(A, \lambda_k) \subset V$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \dim W &= \sum_{k=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_k) \\ &= \sum_{k=1}^{r} e_k \\ &= \deg \chi_A(t) = n \end{aligned}$$

$\dim W = \dim V$

$\Rightarrow W = V$

$\Rightarrow K^n = V$ hat eine Basis aus Eigenvektoren zu A.

bzgl. dieser hat A Diagonalgestalt, $A \in \mathrm{End}(K^n)$

Also $\exists\, S = T^{-1}$ wobei T Spaltenmatrix der Eigenvektoren,

so daß

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \dots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{e_1} \qquad \underbrace{\qquad}_{e_k}$$

25.14 Korollar

Hat $A \in M(n \times n, K)$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist A diagonalisierbar.

Beweis:

Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die paarw. versch. Eigenwerte

$\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ Nullstellen von $\chi_A(t)$, $\deg \chi_A = n$

$\Rightarrow \chi_A(t) = (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n) = \prod_{k=1}^{n} (t-\lambda_k)$

Ferner:

$\dim \operatorname{Eig}(A, \lambda_k) \geq 1$, da $\operatorname{Eig}(A, \lambda_k) \neq 0$

Andererseits

$n \geq \dim W = \sum_{k=1}^{n} \dim \operatorname{Eig}(A, \lambda_k) \geq \sum_{k=1}^{n} 1$

und überall gilt Gleichheit, d.h.

$\dim \operatorname{Eig}(A, \lambda_k) = 1$ $\square$

25.15. Bem.:

Im Fall $K = \mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren (Hauptsatz der Algebra)

Typisch ist: Ein Polynom $\in \mathbb{C}[t]$ vom Grad n hat n verschiedene Nullstellen.

Die Polynome, wo das nicht der Fall ist, sind Polynome, wo die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung genügen.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 7 \\ 20 & -19 & 16 \\ 12 & -12 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{(später)}$$

25.16 Bem.

$\chi_A(t)$ zerfällt in Linearfaktor allein nicht für die Diagonalisierbarkeit

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix} = t^2$

Einziger EW ist $\lambda = 0$, $e_1 = 2$

$Eig(A,0) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim Eig(A,0) = 1 < 2$

A ist nicht diagonalisierbar

wenn überhaupt kommt wegen $\chi_A(t) = t^2$

nur $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in Frage.

Aber $SBS^{-1} = 0 \neq A$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 10 & -9 & 7 \\ 20 & -19 & 16 \\ 12 & -12 & 11 \end{pmatrix} = A$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-10 & 9 & -7 \\ -20 & t+19 & -16 \\ -12 & 12 & t-11 \end{pmatrix}$$

$$(t-10)(t+19)(t-11) + 9(-16)(-12) + (-7)(-20)12$$
$$- (-7)(t+19)(-12) - (-16)(12)(t-10) - (t-11)9\cdot(-20)$$

$$= t^3 + t^2(-10+19-11) + t\,(19(-11) + (-10)(-11) - 10\cdot 19$$
$$- 7\cdot 12 + 16\cdot 12 + 9\cdot 20)$$
$$+ 110\cdot 19 + 9\cdot 16\cdot 12 + 7\cdot 20\cdot 12 - 7\cdot 19\cdot 12 - 16\cdot 12\cdot 10$$
$$- 11\cdot 9\cdot 20$$

$$= t^3 - 2t^2 + (9\cdot 12 - 19\cdot 21 + 10\cdot 11 + 18\cdot 10)\,t$$
$$+ (12(-16\cdot 10 - 7\cdot 19 + 7\cdot 20 + 9\cdot 16) + 110\cdot 19 - 11\cdot 9\cdot$$

$$= t^3 - 2t^2 + (\underbrace{108 - 399 + 110 + 180}_{-1})t$$
$$+ 12(7-16) + 1900 + 190 - 1800 - 180$$

$$\Rightarrow \chi_A(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2 = (t-1)(t+1)(t-2)$$

$$\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

Algorithmus

1) Berechne $\chi_A(t)$

2) Faktorisiere $\chi_A(t)$ (Raten einer kleinen Lösung in $\mathbb{Z}$)

$$(t^3 - 2t^2 - t + 2) : (t-1) = t^2 - t - 2 \;;$$
$$- \underline{t^3 - t^2}$$
$$- t^2 - t + 2$$
$$- \underline{t^2 + t}$$
$$-2t + 2$$
$$\underline{-2t + 2}$$
$$0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 2\cdot 4}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1$$

3) Berechnung der Eigenräume $\lambda_1 = 1$

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \ker\left(\begin{pmatrix} -9 & 9 & -7 \\ -20 & 20 & -16 \\ -12 & 12 & -10 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_2 = -1$

$$\mathrm{Eig}(A,-1) = \ker\left(\begin{pmatrix} -11 & 9 & -7 \\ -20 & 18 & -16 \\ -12 & 12 & -12 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -10 & 9 & -8 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -21 & 42 \end{pmatrix}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ & 1 & -2 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_3 = 2$

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \ker\left(\begin{pmatrix} -8 & 9 & -7 \\ -20 & 21 & -16 \\ -12 & 12 & -9 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \ker\left(\begin{pmatrix} -8 & 9 & -7 \\ -4 & +3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \ker\left(\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4) Überprüfen $e_k = \mathrm{Eig}(A, \lambda_k)$ übereinstimmig,
wenn Nullstellen alle verschieden
= wenn ja
$\Rightarrow \exists\, S \in GL(n, K)$ mit

$$SAS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Notation:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5) Berechnung von S

Wissen $T = (v_1, \dots, v_n)$ Matrix aus l. u. EV
$S = T^{-1}$, bzw. $S^{-1} = T$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimme S aus S^{-1} mit Gauß-Alg.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = M(m \times m, K)$ Menge

$G = GL(m, K)$ Gruppe

Operation durch Konjugation

$$G \times M \xrightarrow{\varphi} M$$
$$(S, A) \longmapsto SAS^{-1}$$

Operation heißt

1) $S = E$, $EAE^{-1} = A$ ok.

$$\varphi(ST, A) = \varphi(S, \underbrace{\varphi(T, A)}_{TAT^{-1}})$$
$$\overset{\shortparallel}{STA(ST)^{-1}}$$
$$\overset{?}{=} S(TAT^{-1})S^{-1}$$

Richtig, da

$$(ST)^{-1} = T^{-1} \cdot S^{-1}$$

25.18 Def

Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times m, K)$ heißen konjugiert (in Zeichen $A \sim B$), wenn $\exists\, S \in GL(n, K)$ mit $B = SAS^{-1}$. $\Rightarrow S^{-1}BS = A$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation, die Bahnen heißen Konjugationsklassen

Charakt. Polynom $\chi_A(t) = \det(tE - A) = t^n - c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} \ldots$
$(-1)^k c_k t^{n-k} + \ldots (-1)^n c_n$

$$C: M(m \times m, K) \longrightarrow K^m$$
$$A \longmapsto (c_1(A), \ldots, c_n(A))$$

$c_k = c_k(A)$

25.19 Def.

$$C_1(A) =: \underset{\text{trace}}{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

heißt Spur (trace) von A

$C_n(A) = \det A$ Determinante

Gilt $\chi_A(t) = \prod_{j=1}^{n} (t - \lambda_j)$

$$\Rightarrow C_k(A) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$

Elementarsymm. Funktion von $\lambda_1 \dots \lambda_n$

Also: $n = 3$:

$C_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$

Es gilt: Die Abbildung $C: M(n \times n, K) \to K^n$ ist konstant auf den Bahnen unter Konjugation, denn $\chi_{SAS^{-1}}(t) = \chi_A(t)$

Korollar:

Ist $\chi_A(t) \in K[t]$ ein Polynom, das n paarweise verschiedene Nullstellen in K hat, dann gilt

$$C^{-1}(C(A)) = \{ SAS^{-1} \mid S \in GL(n, K) \}$$

die Konjugationsklasse ("Bahn") von A.

Frage: Gilt das für alle Werte in K^n?

Antwort: Nein

$$\underset{A_1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\mathcal{O}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \in C^{-1}(0)$$

$\chi_A(t) = \chi_{\mathcal{O}}(t) = t^2$, $A_1 \not\sim \mathcal{O}$

$\{ S \mathcal{O} S^{-1} \mid S \in GL(n, K) \} = \{ \mathcal{O} \}$

25.20 Def.

$A \in M(n \times n, K)$.

A heißt nilpotent, wenn $\exists\, k \in \mathbb{N}$, sodaß

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{k\text{-Faktoren}} = \vartheta$$

Bsp.:

A eine strikte obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ ist nilpotent}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \vartheta$$

25.21 Satz

Die Eigenwerte einer nilpotenten Matrix sind alle ϑ.

Beweis:

Ang.: λ EW $\neq 0$, $v \in K^n$ EV

$\Rightarrow Av = \lambda v \neq 0$, $A^k v = \lambda^k \cdot v \neq 0 \Rightarrow A^k \neq 0 \;\forall k$ □

25.22 Satz

$$C^{-1}(C(0)) = C^{-1}(0) = \{ A \in M(n \times n, K) \mid \chi_A(t) = t^n \}$$
$$= \{ \text{nilpotente Matrizen} \}$$

25.23 Def.

Ein Jordan-Kästchen ist eine Matrix

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M(k \times k, K)$$

Eine Matrix ist in Jordanscher Normalform, wenn

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{k_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix}$$

25.24 Satz (Jordan'sche Normalform)

Zerfällt das charakt. Polynom einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ $\chi_A(t) \in K[t]$ in Linearfaktoren, dann $\exists\, S \in GL(n, K)$, so daß

$$SAS^{-1} = J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

Jordan'sche Normalform hat. J ist bis auf Reihenfolge der Kästchen eindeutig bestimmt.

z.B. haben wir diese Normalform für $K = \mathbb{C}$

25.25 Korollar

Konjugationsklassen von nilpotenten Matrizen, werden durch Partition $k_1 + \dots + k_r = n$ von n bestimmt.

N nilpotent,

$$N \sim \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_r}(0) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$$

25.26 Bem.:

Die Konjugationsklasse von $J_n(0) \in M(n\times n, \mathbb{R})$ enthält im "Abschluß" alle anderen nilpotenten Jordan-Matrizen.

Bsp.:

$$M(4\times 4, \mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \varepsilon & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon \to 0}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

$GL(n, \mathbb{C}) \times M(n\times n, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \chi : M(n\times n, \mathbb{C}) &\longrightarrow M/G \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ A &\longrightarrow \operatorname{koeff} \chi_A \end{aligned}$$

25.27 Satz (Cayley-Hamilton)

$A \in M(n\times n, K)$ $\quad \chi_A(t) \in K[t]$

$\chi_A(A) = 0 \in M(n\times n, K)$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-5 \end{pmatrix}$

$= t^2 - 7t + 10 - 12$

$= t^2 - 7t - 2$

$$7A = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 28 & 35 \end{pmatrix} \qquad A^2 - 7A - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 28 & 37 \end{pmatrix}$$

kein Beweis.

§26 Orthogonale und symm. Matrizen

Wir betrachten jetzt den $\mathbb{R}^n$ mit Zusatzstrukturen, die durch das Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = {}^t x \cdot y$$

⌜In Physik $\langle \, , \, \rangle$ bra
$\, , \rangle$ ket ⌟

26.1 Def

Eine Matrix $S \in GL(n, \mathbb{R})$ heißt orthogonal, wenn

$$\langle Sx, Sy \rangle = \langle x, y \rangle$$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, d.h. das Skalarprodukt und damit Abstände

$$\| x - y \| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$$

werden respektiert.

$$O(n) = \{ S \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid S \text{ ist orthogonal} \}$$

und

$$SO(n) = \{ S \in O(n) \mid \det S = 1 \}$$

heißen orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe.

26.2 Satz

Eine Matrix $S = (s^{(1)}, \dots, s^{(n)})$ mit Spalten $s^{(i)}$ ist orthogonal genau dann, wenn

$$\langle s^{(i)}, s^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$$

also $s^{(i)} \perp s^{(j)}$ für $i \neq j$ $\quad \| s^{(i)} \| = 1$

Beweis:

Sei S orthogonal, dann gilt: $s^{(i)} = S e_i$

$$\langle s^{(i)}, s^{(j)} \rangle = \langle S e_i, S e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} .$$

Umgekehrt: $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann $x = \sum x_i e_i$,

$y = \sum y_j e_j$

$$Sx = \sum_{i=1}^{n} x_i s^{(i)}$$

$$Sy = \sum_{j=1}^{m} y_j s^{(j)}$$

$$\langle Sx, Sy \rangle = \langle \sum x_i s^{(i)}, \sum y_j s^{(j)} \rangle$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j \langle s^{(i)}, s^{(j)} \rangle$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j \cdot \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = \langle x, y \rangle \qquad \square$$

26.3. Korollar

$S \in O(n)$. Dann $S^{-1} = {}^tS$

Beweis:

$$S^t \cdot S = (c_{ij}) = (\delta_{ij}) = E$$

mit $c_{ij} = {}^tS^{(i)} \cdot S^{(j)} = \langle S^{(i)}, S^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$

Bem.:

$\mathbb{R}^n \ni v_1, \dots, v_k$ heißt Orthogonalsystem, wenn $v_i \neq 0$ und $v_i \perp v_j$ ($\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$) $i \neq j$

$\Leftrightarrow$ linear unabhängig:

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \Rightarrow 0 = \langle \sum \lambda_j v_j, v_i \rangle$$

$$= \sum \lambda_j \langle v_j, v_i \rangle = \lambda_i \cdot \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_i = 0$$

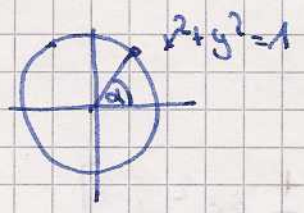
$v_1, \dots, v_k$ sind Orthogonalsystem, wenn zusätzlich $\|v_i\| = 1$

$S \in O(n) \Rightarrow S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ ist eine Orthonormalbasis.

26.4 Beispiele $n = 2$

$$O(2) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

Wissen: $s_{11}^2 + s_{12}^2 = 1$, $\langle S^{(1)}, S^{(2)} \rangle = 0$



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Fall a)

$\det = 1$

$\Rightarrow \in SO(2)$

Drehung um α

Fall b

$\det = -1$

$\Rightarrow \in O(2) \setminus SO(2)$

Spiegelung

$n=3 \quad O(3) \ni S \qquad \chi_S(t) \in \mathbb{R}[t]$ reel vom Grad 3

$\Rightarrow$ wenigstens 1 Nullstelle λ_1 EW

v_1 zugehöriger EV OE $\|v_1\|=1$,

$\left(\text{sonst } v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} \right)$

$$\langle Sv_1, Sv_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle = 1$$
$$= \langle \lambda_1 v_1, \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1^2 \cdot \langle v_1, v_1 \rangle = \lambda_1^2$$
$$\rightsquigarrow \lambda_1 = \pm 1$$

$$W = v_1^\perp = \{ w \in \mathbb{R} \mid \langle w, v_1 \rangle = 0 \} \cong \mathbb{R}^2$$
$$\downarrow$$
$$w \mapsto Sw$$
$$\langle Sw, Sv_1 \rangle = \langle w, v_1 \rangle = 0$$
$$\parallel$$
$$\langle Sw, \lambda_1 v_1 \rangle = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{\lambda_1} \underbrace{\langle Sw, v_1 \rangle}_{=0}$$

$$S|_W : W \to W$$

Sei v_2, v_3 orthonormal Basis von W

$\rightsquigarrow v_1, v_2, v_3$ orthonormal Basis von $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \mp \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \pm \cos\alpha \end{pmatrix} \sim S$$
$$\in O(2)$$

$$\chi_S(t) = (t \mp 1) \left[(t - \cos\alpha)(t \mp \cos\alpha) \pm \sin^2\alpha \right]$$

26.5 Satz

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$

Dann gilt ${}^tA = A \iff \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$

"A ist selbst adjungiert"

Beweis

$A = {}^tA \Rightarrow \langle x, Ay \rangle = {}^tx(Ay) = ({}^tx \cdot A)y = ({}^tAx)y$
$= \langle {}^tAx, y \rangle = \langle Ax, y \rangle$

Umgekehrt:

$x = e_i, \; y = e_j$

$\langle e_i, Ae_j \rangle = \langle e_i, a^{(j)} \rangle = a_{ij}$

$\shortparallel$

$\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle a^{(i)}, e_j \rangle = a_{ji}$

$\Rightarrow {}^tA = A$ $\square$

26.6 Hilfssatz

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $A = {}^tA$ eine Sym. Matrix.
Dann hat A wenigstens einen <u>reellen</u> Eigenwert.

Beweis in MfI 2.

26.7 Satz (Hauptachsentransformation)

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existieren $S \in SO(n)$, so daß

$$SAS^{-1} = SA\,{}^tS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Zu zeigen ist: $\exists$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu A.
Nach dem Hilfssatz $\exists$ EV $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ mit EW, $\lambda \in \mathbb{R}$
Betrachten

$W = v^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v \rangle = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$

$W \cong \mathbb{R}^{n-1}$, $v \notin W$, $\mathbb{R}^n = W \oplus \langle v \rangle$

Senkrechte direkte Summe

$w \in W$, $Aw \overset{!}{\in} W$, denn $\langle Aw, w \rangle = \langle w, Av \rangle$

$= \langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = 0$

Wählen Basis $v_2, \dots, v_n$ von W

Darstellung von A bzgl. dieser Basis.

$$\left|\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right|$$

genauer: $\tilde{A}$ ist wieder symmetrisch und OE $v_2, \dots, v_n$ eine Orthonormalbasis von W $\Rightarrow$ $\tilde{A}$ symm.

Induktion nach n

$\Rightarrow$ OE $v_2, \dots, v_n$ Orthonormalbasis aus EV von $A|_W : W \to W$

$T = (v_1, \dots, v_n) \in O(n)$, $T \notin SO(n)$

dann $v_1 \rightsquigarrow -v_1$

$\Rightarrow \exists\, T \in SO(n)$ aus Eigenvektoren von A

$S = {}^tT = T^{-1}$ haben wir

$SAS^{-1} = SAS^t = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\square$

26.8 Beispiel

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-3 \end{pmatrix} = (t-1)(t-3) - 4$

$= t^2 - 4t - 1$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$

$$\mathrm{Eig}(A, 2+\sqrt{5}) = \ker \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$s^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(4+6+2\sqrt{5})^{1/2}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}} \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,(5-\sqrt{5})}{5} \\ \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5}}}{5}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(30-10\sqrt{5})}}{5} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{200-40\sqrt{5}}}{5} \\ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}} \\ \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4)+4 = t^2-5t = t(t-$$

$$\mathrm{Eig}(A, 0) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A, 5) = \ker \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A, 0) \perp \mathrm{Eig}(A, 5)$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \det T = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

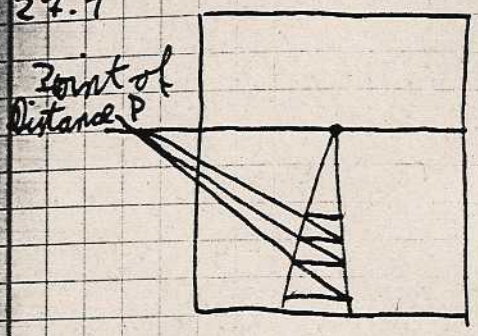
$$SAS^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{diag}(0, 5) \qquad \square$$

§27 Projektive Geometrie und Dualität

27.1



Koordinaten

Def.: $\mathbb{R}^3$. Dann sei $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \{1\text{-dimensionalen UVR von } \mathbb{R}^3\}$

Allgemeiner: V bel K-Vektorraum, K Körper $\quad \mathbb{P}^n_K = \mathbb{P}(K^{n+1})$ n-dim. Projektive Ra

$$\mathbb{P}(V) = \{1\text{-dim. } K\text{-UVR von } V\}$$

Bsp.: $V \cong K \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \{pt\}$

$\mathbb{R}^2$: $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

$$S^{-1} \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \cong S^1$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

Horizont oder unendlich ferne Gerade

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \supset \mathbb{R}^2 \cup H = \{L \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid L \text{ ist parallel zu } H\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \longleftarrow\!\shortmid (x, y)$$

$$\mathbb{P}^n_K = K^n \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}_K}_{\text{unendlich ferne Hyperebene}} = K^n \cup K^{n-1} \cup \ldots \cup K^0$$

27.2 Konstruktion von $\mathbb{P}^n$ vermöge Äquivalenzrel.

$$\begin{array}{ccc} K^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \\ \cup & & \\ x & \longmapsto & \langle x \rangle \end{array}$$

$x, y \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ Dann

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in K^* : \lambda x = y$$
$$\iff \langle x \rangle = \langle y \rangle$$

Operation von $(K^*, \cdot)$ durch Skalarmultiplikation

27.3 Def.: Ist $x = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$

dann bezeichnet $[x] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$

die Äquivalenzklasse. $x_0, \dots, x_n$ heißen <u>homogene Koordinaten</u> auf $\mathbb{P}^n$.

$$\mathbb{P}^n_K = \underset{\substack{\Psi \\ [1:x_1:\dots:x_n] \leftarrow\!\shortmid (x_1, \dots, x_n)}}{K^n} \dot\cup \underset{\substack{\cong \\ \{[x_0:\dots:x_n] \mid x_0 = 0\}}}{\mathbb{P}^{n-1}_K}$$

Ist $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n$

$x_0 = 0 \Rightarrow x \in H_\infty$

$x_0 \neq 0 \quad [x_0 : \dots : x_n] = [1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}] \in K^n$

Allgemeiner

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_i} K^n$$

$$x \mapsto [\frac{x_0}{x_i}, \dots, \underset{i\text{-te auslassen}}{\dots}, \frac{x_n}{x_i}]$$

$H_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 0\} = \mathbb{P}^n \setminus U_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$

U_i liefert affine Karte von $\mathbb{P}^n$ und $\{U_0, \dots, U_n\}$ liefert Standardatlas von $\mathbb{P}^n$.

Kartenwechselabb.

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \subset U_j \ni (y_1, \dots, y_j = 1, \dots y_n)$$

$$U_i \ni (x_1, \dots, x_i = 1, \dots x_n)$$

$$x_0, \dots, x_i = 1, \dots, x_n \longmapsto (\frac{x_0}{x_j}, \dots, \underset{i\text{-te}}{\frac{1}{x_j}}, \dots, x_j = 1, \dots \frac{x_n}{x_j})$$

Speziell $n = 1$

$\mathbb{P}^1_K = K \dot\cup \mathbb{P}^0_K = K \dot\cup \{\infty\}$

$U_0 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\} \to K \quad \frac{x_1}{x_0} = z$

$U_1 = \{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\} \to W = \frac{x_0}{x_1}$

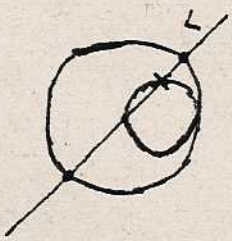
$\mathcal{U}_{01} = \{(1:z) \mid z \neq 0\} \ni z \longrightarrow$
$\{(w:1) \mid w \neq 0\} \ni w = \frac{1}{z}$

1) 27.4 Bsp.: $K = \mathbb{R}$

$n = 1$ $\quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

$\quad \cup \qquad\qquad\qquad \cong$

$\quad S^1 \longrightarrow S^1/\{\pm 1\} \cong S^1$

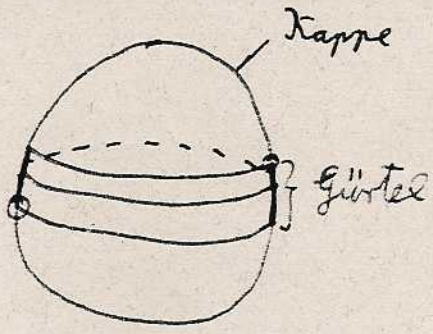


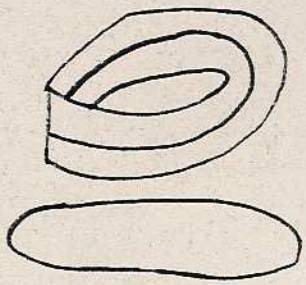
$n = 2$ $\quad \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$\quad \cup \qquad\qquad\qquad \cong$

$\quad S^2 \longrightarrow S^2/\{\pm 1\}$

reell projektive Ebene





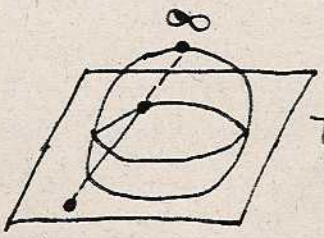
Kreisscheibe

$K = \mathbb{C}$ $\quad n = 1$

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\cong$

S



Gaußsche Zahlen Ebene

Gaußsche Zahlenkugel

$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$\quad \cup$

$\quad S^3 \xrightarrow{\pi} S^3/U(1) = S^2$

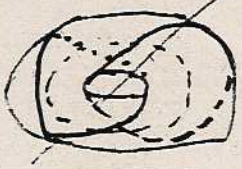
Operation von $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Urbild $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$ unter π ist ein Kreis.

π heißt Hopffaserung

Urbild von ∞ = „Kreis durch ∞" $\in S^3$

Urbild von $0 \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$



π^{-1}(Äquator) = Torus

27.5 <u>Automorphismen von $\mathbb{P}^n$</u>

$A \in GL(n+1, K)$

$$K^{n+1} \to K^{n+1}$$
$$x \mapsto Ax$$

A induziert eine Abb.

$$\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$$
$$\overset{\Psi}{L} \to AL$$

Die induzierte Abb. gibt die Identität genau dann, wenn
$A = \lambda E_{n+1}, \lambda \in K^*$

27.6 <u>Satz:</u> Es seien $p_0, \dots, p_n, p_{n+1}$ $n+2$ Punkte in $\mathbb{P}^n_K$, von denen je $n+1$ nicht auf einer Hyperebene liegen
(Äquivalent sind $v_0, \dots, v_{n+1} \in K^{n+1}$ Repräsentanten, dann sind je $(n+1)$ lin. unabh. also eine Basis von K^{n+1})
Dann gibt es genau einen Automorphismus von $\mathbb{P}^n$, der die Punkte $p_0, \dots, p_{n+1}$ auf die Punkte $[1:0:\dots:0], \dots, [0:\dots:1], [1:1:\dots:1]$ abbildet.

Bew.: Wir betrachten die Matrix

$$B = (v_0, \dots, v_n) \in GL(n+1, K)$$

Die von B induzierte Abb. bildet

$$[e_i] \to [v_i] = p_i$$

$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_i \in K$

Es gilt $\lambda_i \neq 0$ $\forall i$ da sonst
$v_{n+1}, v_0, \dots, \underset{v_i \text{ weglassen}}{\nearrow}, v_n$ lin abh. wären.

setzen $\tilde{B} = (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n) \in GL(n+1, K)$

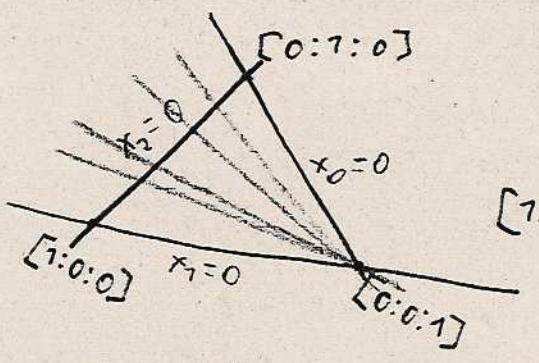
$$\tilde{B} : [e_i] \to [\lambda_i v_i] = p_i$$

und $[1:\dots:1] \mapsto \left[\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i\right] = [v_{n+1}] = p_{n+1}$

durch die letzte Bedingung wird B bis auf Faktor $\lambda \in K^*$ festgelegt. $A = B^{-1}$

Man nennt $p_0, \dots, p_n$ Koordinationspunkte und p_{n+1} Skalierungspunkt. $\square$

27.7 Wir betrachten $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ und eine allg. Koordinatentransformation, s.d. die Koordinatenpunkte im neuen U_0 liegen



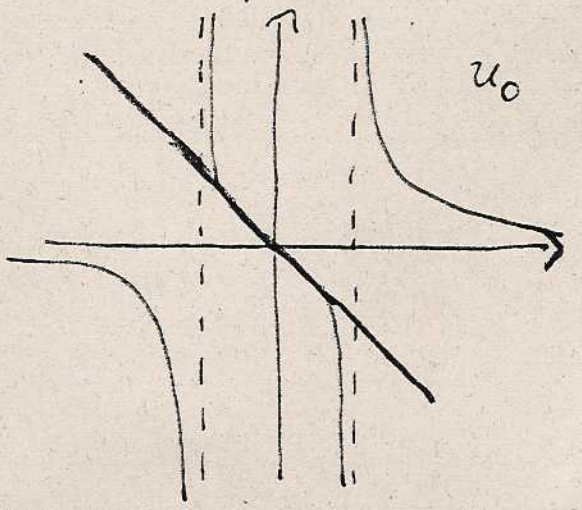
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} & & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

$$(x,y) \longrightarrow x$$

$$[1:x:y] \longmapsto 1:x$$

$\rightsquigarrow$ Punktprojektion und Orthogonale Projektion werden zum gleichen Konzept.

$y = \frac{x}{x^2-1}$



Bem.: $f \in K[x_0, \dots, x_n]$, und $[a] = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$ dann ist $f(a)$ nicht wohldef.

Aber ist f homogen vom Grad d dann gilt

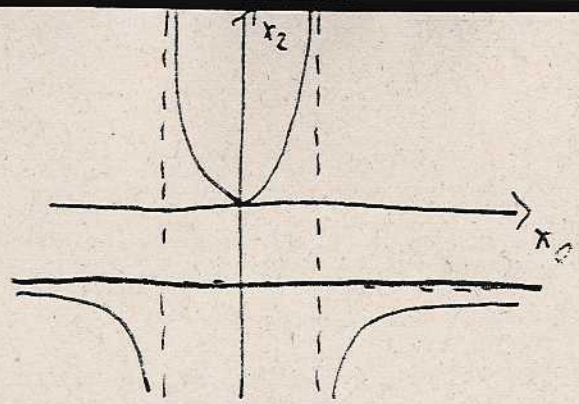
$f(\lambda a) = \lambda^d f(a)$ und somit ist

$V(f) = \{ a \in \mathbb{P}^n \mid f(a) = 0 \}$ wohldef. für homogene.

$[x_0 : x_1 : x_2] \to (1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$ $\quad \frac{x_2}{x_0}\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - 1\right) = \frac{x_1}{x_0} \quad | \, x_0^3$

$$x_2 = (x_1^2 - x_0^2) = x_1 x_0^2$$

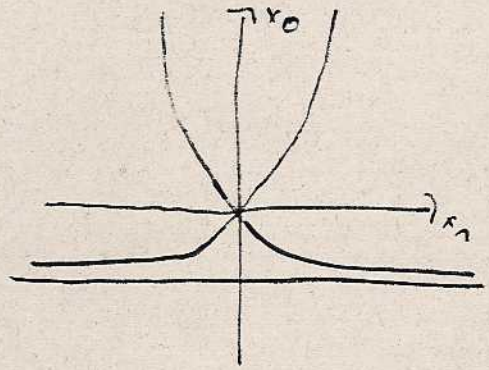
$U_1 = \{ x_1 = 1 \}$ $\quad x_2 \cdot (1 - x_0^2) = x_0^2$



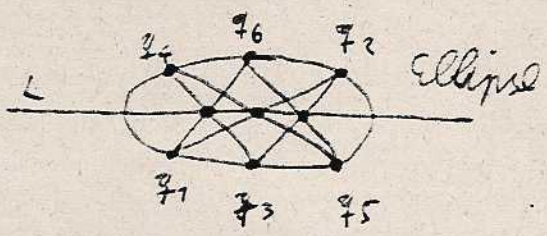
$U_2 = \{x_2 = 1\}$ $\quad x_1^2 - x_0^2 = x_1 x_0^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_1 x_0^2} = \frac{x_0^2}{x_1 x_0^2} + 1$$

$$x_0^2 = \frac{x_1}{\frac{1}{x_1}+1} = \frac{x_1^2}{1+x_1} \qquad x_0 = x_1\sqrt{\frac{1}{1+x_1}}$$



27.9 Satz: (von Pascal)



6 Punkte auf Ellipse

$\overline{q_1 q_2} \cap \overline{q_4 q_5} = P_1$

$\overline{q_2 q_3} \cap \overline{q_5 q_6} = P_2$

$\overline{q_3 q_4} \cap q_6 q_1 = P_3$

Dann liegen P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden

Sei V ein K-VR, W ein Weiter.

Dann ist $\mathrm{Hom}(V,W) = \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ ist linear}\}$

ein VR

$(\varphi + \chi)(v) = \varphi(v) + \chi(v)$

$\lambda\varphi(v) = (\lambda\varphi)(v)$

$V = K^n$, $W = K^m$, $\mathrm{Hom}(V,W) \cong M(n \times m, K)$

$V^* = \mathrm{Hom}(V,K)$ heißt Dualraum von V

27.70 Bsp.: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$

$\int_0^1 \in V^*$ $\quad p \mapsto \int_0^1 p(x)\,dx \in \mathbb{R}$

$\delta_a(p) := p(a)$ Diracsche Delta „Funktion"

$\delta_a \in V_d^*$

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\quad \int_0^1 p(x)\,dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}$

$\delta_0 \quad \delta_{1/2} \quad \delta_1$

$\delta_0(p) = a_0$

$\delta_{1/2}(p) = a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} a_2$

$\delta_1(p) = a_0 + a_1 + a_2$

$\Rightarrow$ $\int_0^1$ ist lin. abh. von $\delta_0, \delta_1, \delta_{1/2}$

Satz (Faßregel)

In U_2^* gilt:

$$ {}_a\int^b = \frac{b-a}{6}\left(\delta_a + 4\,\delta_{\frac{a+b}{2}} + \delta_b\right) $$

Beweis:

$$ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 $$

$$ {}_a\int^b p(x)\,dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3}\right]_a^b $$

$$ = a_0 b + \frac{a_1 b^2}{2} + \frac{a_2 b^3}{3} - \left(a_0 a + a_1 \frac{a^2}{2} + a_2 \frac{a^3}{3}\right) $$

$$ = a_0(b-a) + \frac{a_1}{2}(b^2-a^2) + \frac{a_2}{3}(b^3-a^3) $$

$$ = (b-a)\left[a_0 + \frac{a_1}{2}(a+b) + \frac{a_3}{3}(a^2+ab+b^2)\right] $$

$$ \delta_a(p) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 $$

$$ \delta_{\frac{a+b}{2}}(p) = a_0 + a_1\left(\frac{a+b}{2}\right) + a_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 $$

$$ \delta_b(p) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 $$

$$ \left(\delta_a + 4\delta_{\frac{a+b}{2}} + \delta_b\right)(p) = 6a_0 + a_1(3a+3b) + a_2\underbrace{\left(a^2 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \right.}_{=\ (2a^2+2ab+2b} $$

$$ = \frac{1}{6}\left(a_0 + \frac{a_1}{2}(a+b) + \frac{a_2}{3}(a^2+ab+b^2)\right) $$

$$ \Rightarrow {}_a\int^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(\delta_a + 4\delta_{\frac{a+b}{2}} + \delta_b\right) $$

$\boxtimes$

27.12 Def.

Sei V K-VR, $v_1, \dots, v_n$ eine Basis.
Dann nennt man Linearform $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ duale Basis, wenn

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$$

Bem.:

1) $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ ist dann in der Tat eine Basis von V^*
2) Die φ_i sind durch die Bedingung $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ $j = 1, \dots, n$ eindeutig bestimmt.

Beweis von 2):

Sei $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$
Da φ_i linear ist, gilt dann

$$\varphi_i(v) = \varphi_i\left(\sum_j \lambda_j v_j\right) = \sum_j \lambda_j \varphi_i(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i$$

Angenommen $\sum \mu_j \varphi_j = 0 \in V^*$.
Setzen v_i ein!

$$\sum \mu_i \varphi_j(v_i) = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \quad \forall i$$

$\Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ sind linear unabhängig

Zeigen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ spannen V^* auf
Sei $\varphi \in V^*$, $\lambda_i = \varphi(v_i) \in K$

Beh.: $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n$

Wegen der Linearität von Linearformen genügt es, dies ausgewertet in einer Basis $v_1, \dots, v_n$ zu zeigen.

$$\varphi(v_i) = \lambda_i = \sum \lambda_j \varphi_j(v_i) = \sum \lambda_j \delta_{ji} \qquad \square$$

27.13 Korollar

Ist $\dim V < \infty$, dann gilt $\dim V^* = \dim V$

Bem.:

$(V^*)^* = \mathrm{Homomorphismen}^{\mathrm{Hom}}(V^*, K)$

Es gibt eine natürliche lineare Abbildung

$$V \longrightarrow (V^*)^*$$
$$v \longmapsto \{V^* \to K, \varphi \mapsto \varphi(v)\}$$

27.14 Korollar

$\dim V < \infty$, dann gilt: $V \to (V^*)^*$ ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Da $\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^*$, genügt es zu zeigen, daß

$V \to (V^*)^*$ injektiv ist.

Dies ist klar. $v \in V \setminus \{0\}$, ergänzen $v, v_2, \dots v_n$ zu Basis, $\varphi_1, \dots \varphi_n$ duale Basis

$\varphi_1(v) = 1$, also $\varphi \mapsto \varphi(v)$ ist nicht 0.

$\Rightarrow v \notin \ker(V \to (V^*)^*)$ $\square$

Beispiel:

$V_d = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$. $V_d^* \ni \delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_{d+1}}$

$a_1, \dots a_{d+1}$ paarweise verschiedene Polynome

$$V_d \to \mathbb{R}^{d+1}$$
$$p \mapsto (p(a_i))_{i=1,\dots,d+1}$$

Bzgl. der Basis $1, x, \dots, x^d$ hat ψ die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^d \\ 1 & a_2 & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{d+1} & a_{d+1}^2 & \dots & a_{d+1}^d \end{pmatrix}$$

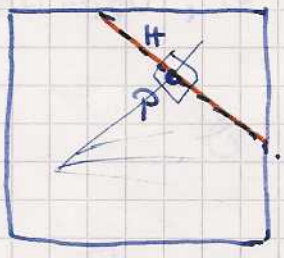
Die zu $\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_{d+1}}$ duale Basis von V_d sind die Lagrangen Interpolationspolynome

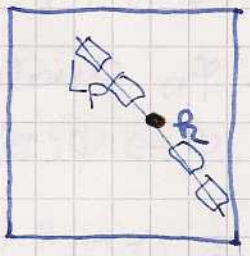
$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - a_j)}{(a_i - a_j)}$$

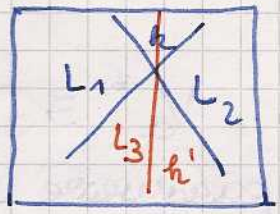
$\mathbb{P}(V) = \{ 1\text{-dim UVR von } V \}$

$\mathbb{P}(V^*) = \{ 1\text{-dim UVR von } V^* \} \cong \{ \text{codim. } 1 \text{ UVR von } V \}$
$= \check{\mathbb{P}}(V)$

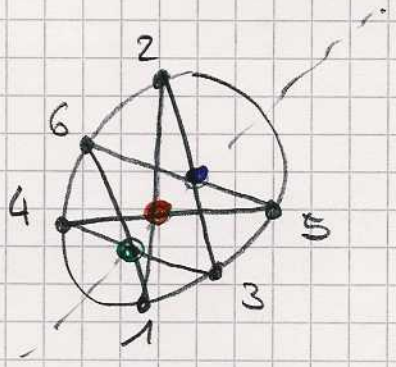
$\mathbb{P}^2$ $\qquad\qquad$ $\check{\mathbb{P}}^2$







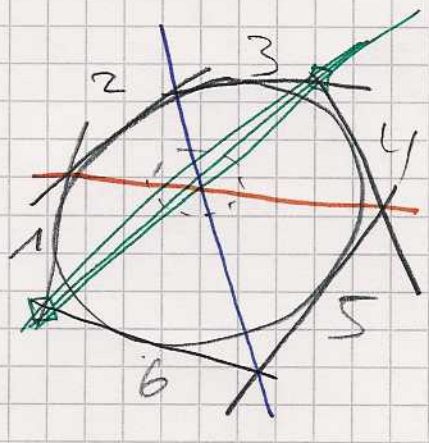
Satz von Pascal



$\mathbb{P}^2$

Duale Satz

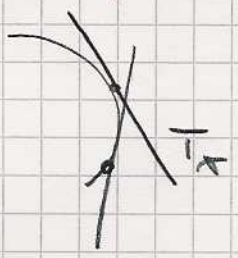
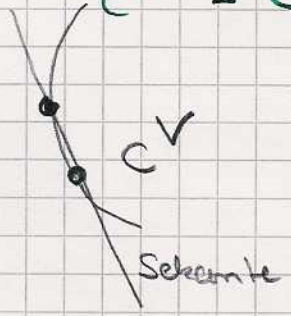
Desargue



$\check{\mathbb{P}}_2$

$$C \to \check{C} = \{ L \subset \mathbb{P}^2 \mid L \text{ tangential an } C \}$$

$\mathbb{P}^2$



$\check{\check{C}} = C$