

6.6 Die Anordnungsaxiome

34

$\mathbb{R}$ ist nicht nur ein Körper, sondern wir haben eine Anordnung, d.h. Relation $>$.

6.1 Def.

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Eine Anordnung von K besteht aus einer Menge positiver Elemente, d.h.

$$P = \{a \in K \mid a > 0\}$$

für $a \in P$ schreiben wir $a > 0$.

mit folgenden Eigenschaften

(A1) Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der Bedingungen

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

$$(A2) \quad a, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$$

$$(A3) \quad a \cdot b > 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$$

Hat man eine Anordnung $>$, so definiert man allgemeiner

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \text{ oder } a = b$$

6.2 Bsp:

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ haben Anordnungen.

Endliche Körper haben keine Anordnung.

(Beweis später)

6.3 Folgerungen aus den Axiomen

Sei $(K, +, \cdot)$ mit $>$ ein angeordneter Körper.

Dann gilt

$$1) \quad 1 > 0, \quad -1 < 0, \quad 0 > -1$$

$$2) \quad \geq \text{ und } > \text{ sind transitiv}$$

$$\text{Bew.: } a \geq b \text{ und } b \geq c \Rightarrow a - b \geq 0, \quad b - c \geq 0$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} a - b + b - c \geq 0 \Rightarrow a \geq c$$

$$(3) \quad a \geq b \text{ und } x \geq y \Rightarrow a+x \geq b+y$$

Bew. wie (2)

$$(4) \quad a \geq b \geq 0, \quad x \geq y \geq 0 \Rightarrow ax \geq by$$

$$(5) \quad a \geq b \geq 0, \quad c < 0 \Rightarrow 0 \geq bc \geq ac$$

$$(6) \quad a \geq b \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} > 0$$

$$0 > a \geq b \Rightarrow 0 > \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$$

$$(7) \quad x \in K \Rightarrow x^2 \geq 0$$

Bew.:

Zunächst (7)

$$3 \text{ Fälle: } x=0, \quad x>0, \quad x<0$$

$$\Downarrow \\ x^2 = 0 \geq 0$$

$$x > 0: \Rightarrow x \cdot x > 0 \text{ aus A3}$$

$$x < 0: \Rightarrow (-x) > 0 \Rightarrow (-x) \cdot \underbrace{(-x)}_{x^2} > 0$$

$$(1) \quad 1^2 = 1 > 0 \text{ aus (7)}$$

$$\text{Wäre } -1 > 0 \Rightarrow 1 + (-1) > 0 \quad \downarrow$$

Die anderen Regeln sind ähnlich einfach wie (2)

□

6.4 Def

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann heißt

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

der Absolutbetrag von a .

Satz

$(K, +, \cdot)$. Dann gilt:

$$1) \quad |x| \geq 0 \text{ und } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$3) \quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Beweis:

32

1), 2) klar

Zu 3) Sei $x, y \geq 0 \Rightarrow x+y > 0$ und
daher $|x+y| = x+y = |x|+|y|$

Ist $x > 0 > y$, dann gilt falls $|x| > |y|$ $x+y > 0$

$$|x+y| = x+y = |x|+y \leq |x|+|y| \quad y \leq |y|$$

andere Fälle ähnlich.

6.6 Satz

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann ist

$$\mathbb{N} \rightarrow K, \quad n \mapsto n \cdot 1_K = \underbrace{1_K + \dots + 1_K}_{n\text{-Stimmenden}}$$

injektiv. Wie können deshalb

$\mathbb{Z}$ mit einer Teilmenge von K identifizieren.

Beweis:

Angenommen $n \cdot 1_K = m \cdot 1_K$. Ist $n > m$

$$\Rightarrow (n-m) \cdot 1_K = 0 \Rightarrow 0 > 0 \quad \downarrow$$

Folgerung:

Endliche Körper lassen sich nicht anordnen.

Beweis:

$\mathbb{N} \rightarrow K$ kann nicht injektiv sein, wenn $|K| < \infty$
(Schubfachprinzip)

6.7 Def Archimedisches Axiom

Ein angeordneter Körper heißt archimedisches,

wenn $\forall a \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a < n = n \cdot 1_K$

Bsp.: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind archimedisches

6.8 Satz

Sei K archimedisch angeordneter Körper. Dann gilt

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ so daß $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

2) Sei $b > 1$. Dann gilt $\forall a \in K \quad \exists n$ so daß $a < b^n$

3) Sei $0 < b < 1$. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n$ so daß $0 < b^n < \varepsilon$

Beweis:

1) Betrachte $a = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt nach arch. Axiom (AA)

$$\exists n \text{ so daß } a = \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{a} = \varepsilon$$

2) Wir zeigen zunächst

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall x \geq 0$$

klein. Binom. Formel

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k}_{\geq 0} \geq 1 + nx$$

also mit $b = 1+x$ und $b^n - 1 = (1+x)^n - 1$

$$\geq 1 + nx - 1 = nx$$

gilt falls $\frac{a-1}{x} < n$

nach (AA) $\exists n$ so daß $\frac{a-1}{x} < n$

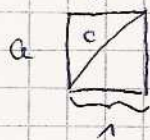
$$\Rightarrow b^n - 1 > nx > \frac{a-1}{x} \cdot x = a-1$$

d.h. $\exists n$ so daß $b^n > a$

3) folgt aus 2) angewendet auf $a = \frac{1}{\varepsilon}$ und $b^{-1} = \frac{1}{b}$

Bemerkung: Will man mit Zählen Strecken messen, so kommt man mit den rationalen Zahlen nicht aus!

Bsp: $\square$ Quadrat mit Seitenlänge 1



$$a^2 + b^2 = c^2$$

gibt die Diagonale hat Länge c mit

$$c^2 = 1 + 1 = 2$$

Mit anderen Worten: c ist $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ etwa

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}$$

$$\Rightarrow q \cdot \sqrt{2} = p \Rightarrow q^2 \cdot 2 = p^2$$

$$\Rightarrow p \text{ ist gerade etwa } p = 2p_1 \Rightarrow q^2 \cdot 2 = (2p_1)^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2p_1^2 \Rightarrow q \text{ ist gerade.}$$

Ein Widerspruch zu p und q teilerfremd

Bsp.

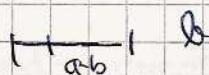
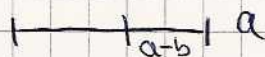
Def.:

Zwei Strecken a und b heißen kommensurabel, (gleich lang)

wenn es eine Teilstrecke d gibt, so daß

$$a = m \cdot d, \quad b = n \cdot d \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ das Längenverhältnis der Strecken.

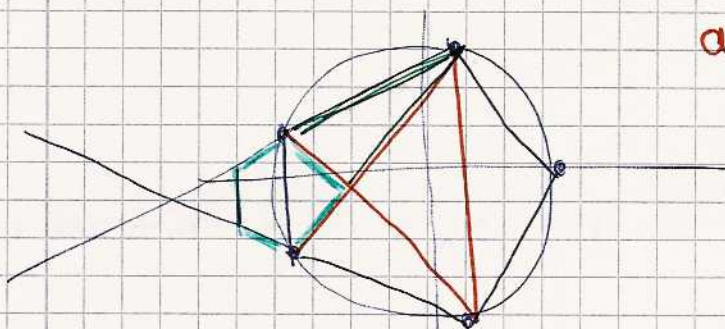


mit euklid. Alg. abtragen

Anderenfalls heißen a und b inkommensurabel.

Bsp.:

Die Seite und Diagonale des regulären 5-Ecks sind inkommensurabel.



$$a - b = c$$

goldenes Schnitt

Es ist augenscheinlich klar, daß das Verfahren nicht endet.

$$x = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Eudoxos 408 - 355 v.C.

Großentheorie: Eukleids Elemente Bd. 5 Def 5
325-265 v.C.

Delekreind 1831-1916

6.7 Konvergenz

Konvergenz ist das zentrale Begriff der Analysis.

7.1 Def.

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen ist eine Abbildung
 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$

üblicherweise bestimmt die Abb. keinen Namen,
sondern wir verwenden die Indexnotation a_n .

Bsp.:

1) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, $a_n = \frac{1}{n}$

2) (q^n) , $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$

3) $(2, 4, 3, 6, 5, 10, \dots)$

4) $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ Folge der Fibonacci-Zahlen

In IQ-Tests soll man rekursives Bildungsgesetz raten.

3) $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ a_{n-1} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$

4) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

5) $(1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, \dots)$ $a_n = (n\text{-te Primzahl}) - 1$

$(a_1, a_2, \dots, a_k)$ raten

$$a_n = \begin{cases} b_n & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

Für die Analysis verwenden wir Folgen anders. 34

Wir wollen eine gegebene oder gesuchte reelle Zahl beliebig gut durch bekannte Zahlen approximieren.

Bsp.:

(3, 3.1, 3.14, 3.141, ...)

approximiert die Kreiszahl $\pi = 3,141592...$ immer besser.

Wir geben dieser Idee eine präzise Definition 7.2 Def.

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) heißt konvergent gegen a

in Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

wenn

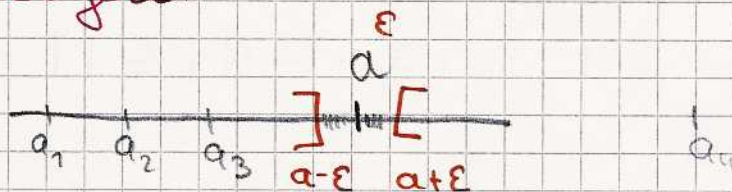
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ daß

$|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$

gilt.

a heißt Grenzwert oder Limes der Folge.

Fall (a_n) keinen Grenzwert, so heißt (a_n) divergent.



Bsp.:

1) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

In der Tat zu $\varepsilon > 0 \exists (AA)$ ein n_0 , so daß

$0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Dann gilt

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$2) (a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$$

$a = 1$ ist Grenzwert

Sei $\varepsilon > 0$ und n_0 mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Dann

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

3) die konstante Folge (a_n) mit $a_n = a$ konvergiert gegen a .

$$4) (a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$

$((-1)^n)$ divergiert.

Zu zeigen ist:

$\exists \varepsilon > 0$ so daß $\forall n_0$ ein $n \geq n_0$ existiert mit

$$|a_n - a| > \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$. Angenommen $\exists n_0$, so daß

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

also

$$|(-1)^n - a| < 1 \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow |-1 - a| < 1 \quad \text{und} \quad |1 - a| < 1$$

$$2 = |1 - (-1)| = |1 - a + a - (-1)| \leq |1 - a| + |a - (-1)| < 1 + 1 = 2 \quad \text{!}$$

7.3. Satz

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b . Dann gilt

1) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

2) $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3) Ist $b \neq 0$ dann ist $\frac{1}{b_n}$ für fast alle n ,
d. h. alle bis auf endlich viele existiert und
konvergiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Bemerkung:

Für Konvergenz spielt der Anfang einer Folge
keine Rolle.

Bsp.:

$$c_n = \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 1} = \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{a_n}{b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 - 0 = 1$$

analog:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 + 0 = 2 = b \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ vorge.

zu 1) Für $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists n_1$ so daß $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1$
 $\exists n_2$ so daß $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2$

Setzen $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Dann gilt $\forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a + b)| &= |a_n - a + b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu 2) } |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a b_n + a b_n - a \cdot b| \\ &\leq |a_n \cdot b_n - a b_n| + |a b_n - a \cdot b| \\ &= |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \end{aligned}$$

Da $b_n \rightarrow b$ existiert zu $\varepsilon = 1$ ein n_1 , so
daß $|b_n - b| < 1 \Rightarrow |b_n| \leq |b| + 1$

Ferner $\exists n_2, n_3$, so daß

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \quad \forall n \geq n_2, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} \quad \forall n \geq n_3$$

Also für $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ gilt:

$$|a_n b_n - ab| \leq (|b|+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} + (|a|+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

7.4 Def

Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen

$f = O(g)$ $\exists n_0, \exists C$ sodass $f(n) \leq C \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$

$f = o(g)$ falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$f = \omega(g)$ $\exists C_1, C_2 \exists n_0 \quad C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$

Bsp.:

$f(n) = 2n^4 + n^3 - n + 1 \quad f \in O(n^4) \quad C = 2.1$

$f(n) = 2n^4 + o(n^4)$

$f(n) = 2n^4 + \omega(n^3)$

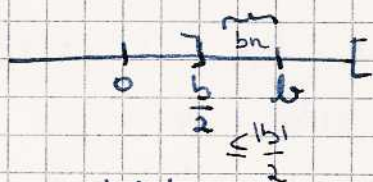
Wachstum

(b_n) konvergiert gegen b , $b \neq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{b_n}\right)$ ist für fast alle n erklärt

und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |b_n| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$



zu $\varepsilon_1 = \frac{|b|}{2} \exists n_0$ so dass $|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0$

also ist $\frac{1}{b_n}$ erklärt für alle $n \geq n_0$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$\left| \frac{1}{b_m} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_m}{|b_m| \cdot |b|} \right| \leq \frac{|b - b_m|}{\frac{1}{2} |b|^2}$$

$$\text{zu } \varepsilon' = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} |b|^2 \quad \exists m_2 \text{ so da\ss}$$

$$|b_m - b| < \varepsilon' \quad \forall m \geq m_2$$

Wählen $m_0 = \max(m_1, m_2)$

$$\left| \frac{1}{b_m} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{|b - b_m|}{\frac{1}{2} |b|^2} < \varepsilon \quad \forall m \geq m_0 \quad \square$$

7.5 Satz

Der Grenzwert a einer konvergen^{ten} Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien a und a' Grenzwerte.

Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ so da\ss

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |a_n - a'| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow |a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a - a'| = 0 \Rightarrow a = a' \quad \square$$

Wie kann man feststellen, ob eine Folge (a_n) konvergiert, ohne den Grenzwert zu kennen?

7.6 Def.

Eine Folge (a_n) hei\ss t Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ so da\ss } |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

7.7. Bemerkung

Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen.

Beweis:

$(a_n) \rightarrow a$, dann $\exists$ zu $\varepsilon/2$ ein n_0 ,

$$\text{so da\ss } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{also } |a_m - a_n| \stackrel{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall n, m \geq n_0$$

7.8 Vollständigkeitsaxiom

Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

7.9 Def.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann heißt

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall

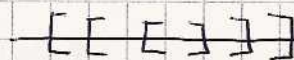
$b - a$ ist die Länge des Intervalls

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit zwei Bedingungen:

1) $I_n \supset I_{n+1}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

(Intervalle werden kleiner)



7.10 Satz

Sei $I_n = [a_n, b_n]$ und (I_n) eine Intervallschachtelung.
(abgeschlossene Intervalle mit $|I_n| \rightarrow 0$).

Dann enthält

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$$

genau einem Punkt.

Diese Aussage nennt man auch Intervallschachtelungsprinzip.

$\bigcap_{n=1}^{\infty}]0, \frac{1}{n}[= \emptyset$, also I_n abgeschlossen
ist wesentlich

Beweis:

Wir betrachten die Folge (a_n) . (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0$ so daß $0 < |b_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq n_0$

$$[a_{n_0}, b_{n_0}] \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Da $I_m, I_n \subset [a_{n_0}, b_{n_0}]$ folgt

$$a_m, a_n \in I_{n_0}$$

$$\Rightarrow |a_m - a_n| \leq |b_{n_0} - a_{n_0}| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom konvergiert die Folge (a_n) .

$$\text{Sei } a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Bleibt zu zeigen, daß $a \in I_n \quad \forall n$

Da die I_n eine Schachtelung bilden, genügt
 $a \in I_n \quad \forall n \geq n_0$

1. Fall: Die linken Intervallgrenzen werden schließlich
gleich, d.h. $\exists n_0$, so daß $a_n = a_m$
 $\forall n, m \geq n_0$

dann folgt: $a = a_{n_0}$ und $a \in I_n \quad \forall n \geq n_0$

2. Fall: Für jedes n_1 existiert ein $n_2 > n_1$, so daß
 $a_{n_1} < a_{n_2}$

$$[[\cdot]]$$

Sei jetzt $\varepsilon = a_{n_2} - a_{n_1}$ und n_3 so groß, daß

$$|b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_3$$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$$

Will $a_{n_1} \leq a \leq b_{n_1}$ zeigen

$$\left. \begin{array}{l} |a - a_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |b_{n_2} - a_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} |a - b_{n_2}| < \varepsilon$$

$$|a - a_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow a_{n_2} - |a - a_{n_2}| > a_{n_2} - \frac{\varepsilon}{2} > a_{n_2} - a_{n_1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$a_{n_2} - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} > a_{n_2} - a_{n_1} + \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{2}$$

7.11 Bemerkung

Man kann zeigen, daß aus dem Intervallschachtelungsprinzip und den Axiomen außer dem vollst. Axiom das vollst. Axiom folgt

Existenz der reellen Zahlen

7.12. Satz

Jeder archimedisch angeordnete Körper ist isomorph zu $\mathbb{R}$ vermöge einer kanonisch gegebenen bijektiven Abbildung $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$

Mit anderen Worten: $\mathbb{R}$ wird durch die bisherigen Axiome vollständig charakterisiert.

Beweis

Sei $\mathbb{R}' = K$ so ein Körper.

Da $\mathbb{R}'$ archimedisch angeordnet ist, haben wir eine Einbettung

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}' = K, \quad n \mapsto n \cdot 1_K = n$$

$$\uparrow$$

$$\mathbb{Q}$$

Diese läßt sich zu einer Einbettung von $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{K}$ fortsetzen.

38

$$q = \frac{a}{b} \mapsto \frac{a \cdot 1_{\mathbb{K}}}{b \cdot 1_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$$

$$\text{Also } \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{K} & & \mathbb{R} \end{array}$$

Sei $a \in \mathbb{K}$. Wir wählen eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Der Grenzwertbegriff und Cauchyfolgenbegriff läßt sich alles mit $\mathbb{Q}$ erklären.

$a > 0 \iff \exists m \in \mathbb{N}$ so daß $a > \frac{1}{m} > 0$
nach einer Folgerung aus dem archimed. Axiom
Es genügt in der Definition von Konvergenz bzw. Cauchy-Folge ε der Gestalt $\varepsilon = \frac{1}{N}$

zu verwenden, $N \in \mathbb{N}$.

Wir wählen $a_n \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[\cap \mathbb{Q}$, etwa
 $a_n = \frac{b_n}{m}$, $b_n \in \mathbb{Z}$

Betrachten

$a_n \in \mathbb{R}$. (a_n) ist in $\mathbb{R}$ ebenfalls eine Cauchy-Folge

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \in \mathbb{R}$.

Wir definieren $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(a) := b$

Dann ist φ wohldefiniert, respektiert $>$ und Körperaxiome und außerdem bijektiv. $\square$

Wegen Satz 7.12 ist es egal, wie wir $\mathbb{R}$ konstruieren. 2 Methoden gibt es:

A) $\mathcal{H} = \{ (a_n) \mid (a_n) \text{ ist Cauchy-Folge mit } a_n \in \mathbb{Q} \}$
Menge der rationalen Cauchy-Folgen

auf $\mathcal{H}$ ist $+$ erklärt

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \in \mathcal{H}!$$

auf $\mathcal{H}$ erklären wir jetzt eine Äquivalenzrelation:

$$(a_n) \sim (b_n) \quad :\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

Man sagt: die Folge $(c_n) = (a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge.

Def:

$$\mathbb{R} = \mathcal{H} / \sim$$

Man zeigt, daß repräsentantenweise Addition und Multiplikation $\mathcal{H} / \sim$ zu einem Körper machen.

$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}, q \mapsto [(q)]$ Klasse der konstanten Folge
< läßt sich ebenfalls definieren.

Zur Vollständigkeit sei $c_k = [(a_{k,n})]$ Elemente von $\mathcal{H} / \sim$, so daß (c_k) eine Cauchy-Folge bildet.

Dann repräsentiert die Diagonalfolge
 $d = [(a'_{n,n})]$ einen Grenzwert. $\square$

Lemma:

Seien $(a_n), (b_n)$ zwei konvergente Folgen. Gilt
 $(a_n) \leq (b_n) \quad \forall n$, dann gilt auch
 $\lim a_n \leq \lim b_n$

Bem.: Aus $a_n < b_n \quad \forall n$ kann man
 $\lim a_n < \lim b_n$ nicht folgern.

Bsp: $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$, $\lim a_n = 0 = \lim b_n$

Beweis:

39

angenommen $a = \lim a_n > b = \lim b_n$

Betrachten $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$



Für ε $\exists n_0$ so daß $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$
 $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_n > a - \varepsilon$, $b_n < b + \varepsilon$, $-b_n > -b - \varepsilon$

$\Rightarrow a_n - b_n > a - b - 2\varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon > 0$ $\downarrow$

Satz (Intervallschachtelungsprinzip)

Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Folge von Intervallen mit

1) $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$

Beweis

Betrachten (a_n)

• (a_n) ist eine Cauchy-Folge

Nach Vor. 2) gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$

$$|I_{n_0}| = b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$$

Für dieses n_0 folgt

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

da $a_n, a_m \in I_{n_0}$ nach 1)

Sei $a = \lim a_n$ (ex. nach Vollständigkeitsaxiom)

Wollen $a \in I_k \quad \forall k$ zeigen.

Es gilt

$$a_k \leq a_n \leq b_k \quad \forall n \geq k$$

Lemma angewendet auf konstante Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

(a_n) bzw. $(a_n), (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \Rightarrow$

$$a_k \leq \lim a_n = a \leq b_k \quad \text{Also } a \in I_k$$

$$\Rightarrow a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$$

Bleibt z.z.: a ist der einzige Punkt

$$\text{Sei } b \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

$$\Rightarrow a, b \in I_k \quad \forall k$$

$$\Rightarrow |a-b| \leq |I_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Also } |a-b|=0 \Rightarrow b=a$$

□

- Der Körper der reellen Zahlen ist durch die Körperaxiome, Ordnungsaxiome, dem Archimed. Axiom und vollst. Axiom eindeutig bestimmt.

Existenz: 2 Methoden

$$A) \quad \mathbb{R} := \{ \text{nationale Cauchyfolgen} \}$$

$$\mathbb{R} := \{ \text{nationale Nullfolgen} \}$$

Warum ist $\mathbb{R}$ dann vollständig?

(r_n) Folge in diesem $\mathbb{R}$.

$$r_n = [(a_{n,k})]$$

(r_n) Cauchy-Folge $\Rightarrow r := [(a_{k,k})]$ ist Grenzwert

Im Computer:

Floating points numbers $\underbrace{2.13 \dots 7}_{14 \text{ Ziffern}} \cdot 10^k, k \in \mathbb{Z}$

Frage: Welches Körperaxiom ist für floats nicht erfüllt?

$$(-1 \cdot 10^{20} + (1 \cdot 10^{20}) + 1) = 0 + 1 = 1$$

↑
= $-1 \cdot 10^{20} + 1 \cdot 10^{20} = 0$
wird verschluckt

Assoziativgesetz für "+" gilt nicht! ▽

3) $\tau \in \mathbb{R}$, $U = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \tau\}$
 $V = \{p \in \mathbb{Q} \mid \tau \leq p\}$
 $U \cup V = \mathbb{Q}$

Def:

Ein Dedekind'scher Schnitt ist ein Paar (U, V) wobei $U, V \subset \mathbb{Q}, \neq \emptyset$, und $U \cup V = \mathbb{Q}$ und $q < p \quad \forall q \in U, \forall p \in V$.

$\mathbb{R} := \{(U, V) \mid \text{Dedekind'scher Schnitt}\} / \sim$

Ist $\tau \in \mathbb{Q}$, dann haben wir zwei Dedek. Schnitt

$(\{q < \tau\}, \{\tau \leq p\}) = (U_1, V_1)$
 $(\{q \leq \tau\}, \{\tau < p\}) = (U_2, V_2)$
 $(U_1, V_1) \sim (U_2, V_2)$

Weitere Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom

7.15 Def:

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt beschränkt, wenn eine Schranke $\eta \in \mathbb{R}$ existiert mit $|a_n| \leq \eta \quad \forall n$

Bsp.:

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) konvergent gegen a . Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein n_0 , so daß

$|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n| \leq |a| + 1 \quad \forall n \geq n_0$

und $\eta = \max \{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1\}$ ist eine Schranke

Die Folge (n) ist unbeschränkt.

(Weg. Real. Axiom)

7.16 Def.

Eine Folge heißt monoton wachsend (fallend),
wenn $a_n \leq a_{n+1} \forall n$ ($a_n \geq a_{n+1} \forall n$)

Bsp.:

(n) ist monoton wachsend

$\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ist monoton fallend.

Ziel:

Satz 7.17

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Wir wenden diesem Satz über einen interessanten
Umweg an.

7.18 Def.:

Sei (a_n) eine Folge. Eine Teilfolge ist eine Folge
der Gestalt

$$(a_{m_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$$

Bsp.:

(a_{2n}) die Teilfolge der Glieder mit geradem Index.

7.19 Def.

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. $a \in \mathbb{R}$ heißt
Häufungspunkt der Folge, wenn eine Teilfolge
existiert $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Bsp.:

$a_n = (-1)^n$, $((-1)^n)$ hat Häufungspunkte 1 und -1

$a_n = n+1 + (-1)^n \cdot n$, hat Häufungspunkt 1 (einiger HP)
 $a_n = (1, 5, 1, 9, 1, 13, 1, \dots)$

Anders formuliert: a ist HP von (a_n) genau dann wenn für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele a_n die Bedingung $|a_n - a| < \varepsilon$ erfüllen.

Beweis:

Ist diese Bedingung erfüllt, so können wir uns wie folgt eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ konstruieren.

Zu $\varepsilon = \frac{1}{k}$ wählen wir ein n_k , so daß $(n_1 = 0$

1) $n_{k-1} < n_k$

2) a_{n_k} liegt im Intervall $[a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}]$

Dann: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

Die Folge $(-1)^n + \frac{1}{n}$ hat die HP $1, -1$
($0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{5}{6}, \dots$)



7.20 Satz (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge hat wenigstens einen Häufungspunkt.

Beweis:

Sei (a_n) eine Folge und M eine Schranke, also $|a_n| \leq M$.

Wir konstruieren rekursiv eine Folge von Intervallen

$$I_k = [d_k, b_k],$$

die unendlich viele Glieder der Folge enthalten.

$I_0 = [-M, M]$. Ist I_k schon konstruiert,

dann enthält eines der Intervalle

$$[d_k, \frac{d_k + b_k}{2}], [\frac{d_k + b_k}{2}, b_k]$$

unendlich viele Glieder der Folge.

Dann sei I_{k+1} dieses Intervall (im Zweifel

das umkre.)

Dann 1) $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$

$$2) |I_k| = b_k - a_k = M \cdot 2^{-k+1}$$

da $|I_{k+1}| = \frac{1}{2} |I_k|$ und $|I_0| = 2M$

dies dem Intervallschachtelungsprinzip

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{a\}$$

a ist Häufungspunkt von (a_n) , denn jede ε -Umgebung $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ enthält das I_k mit $|I_k| = M \cdot 2^{-k+1} < \varepsilon$

Beweis von Satz 7.17

Sei (a_n) monoton und beschränkt, OE monoton wachsend. Nach Satz von Bolzano-Weierstraß, gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) , die konvergiert,
 $a = \lim a_{n_k}$.

Wir zeigen: $\lim a_n = a$

Da $a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}} \leq \dots$ gilt $a_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ nach Lemma

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann $\exists k_0$ so daß

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

Setzen $n_0 = n_{k_0}$.

$$0 \leq a - a_{n_{k_1}} \leq a - a_n \leq a - a_{n_{k_0}} = a - a_{n_0} < \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_0$$

wobei $n_{k_1} > n_1$, $k_1 = k_1(m)$

Existenz von Quadratwurzeln in $\mathbb{R}$

42

Sei $b > 0$. Sei $a_0 = 1$

und def. rekursiv

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b}{a_n} \right)$$

Dann gilt: Die Folge (a_n) konvergiert und der Grenzwert ist eine Zahl $a > 0$ mit $a^2 = b$

Beweis:

1) Die Folge ist definiert, da $(a_n) > 0 \quad \forall n$

(Induktion nach n) $a_n > 0 \Rightarrow \frac{b}{a_n} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0$

2) $a_{n+1}^2 \geq b \quad \forall n$

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - b &= \left[\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b}{a_n} \right) \right]^2 - b = \frac{1}{4} a_n^2 + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4a_n^2} \\ &= \frac{1}{4} a_n^2 - \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4a_n^2} = \left(\frac{1}{2} \left(a_n - \frac{b}{a_n} \right) \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

3) $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b}{a_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n} \right) = a_n$$

1) u. 3) :

$(a_n)_{n \geq 1}$ ist eine monoton fallende Folge
beschränkt durch $(a_1 \geq a_n \geq 0) \quad |a_1|$

B.-W. $\exists a = \lim a_n$;

$$2) 0 < b \leq \lim a_{n+1}^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a \neq 0 \quad \text{also } a > 0$$

4) Rechenregeln für den Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b}{a_n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim a_n + \frac{b}{\lim a_n} \right) = \frac{1}{2} a + \frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} a^2 + \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} b \Leftrightarrow a^2 = b$$

8.1 Von allen Konstruktionsschritten

$$\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist der letzte der einfachste.

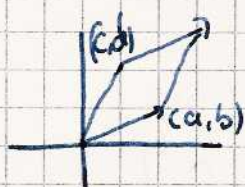
Motivation ist die Einführung von $\mathbb{C}$ durch die Tatsache, daß $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat. Hätten wir eine Lösung, etwa i , dann wäre $i^2 = -1$.

Haben wir i , so können wir mit sog. "komplexen" Ausdrücken $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ rechnen.

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2 bd \\ = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

8.2 Wir definieren den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, indem wir auf $\mathbb{R}^2$ Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einführen.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$



Vektoraddition

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Dann ist die Abb.

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

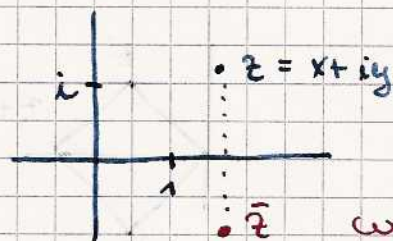
$$a \mapsto (a, 0)$$

eine mit $+$, $\cdot$ verträgliche Einbettung.

und $i = (0, 1)$.

Gauß'sche Zahlenebene

43



wird gespiegelt am x-Achse

$$i^2 = (-1, 0) = -1$$

Satz + Def.

Dies macht $\mathbb{R}^2$ zu einem Körper, $\mathbb{C}$.

Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$.

$x = \text{Realteil von } z$ $\text{Re } z$

$y = \text{Imaginärteil von } z$ $\text{Im } z$

Beweis

Alle Körperaxiome kann man leicht nachrechnen außer evtl. $\exists z^{-1}$

$$z = x + iy \neq 0$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{\underbrace{x^2 + y^2}_{> 0}}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

□

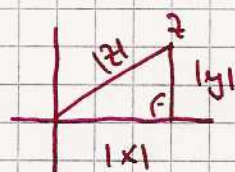
Die Zahl $\bar{z} = x - iy$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl.

8.4 Def:

zu $z = x + iy$ heißt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

der Betrag von z .

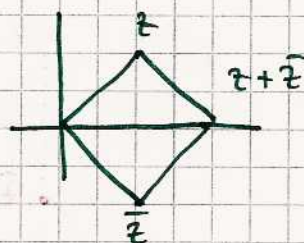
(Abstand von z vom Nullpunkt = $|z|$)



8.5 Satz

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} a) \quad 1) \quad \overline{z+w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\ \overline{\bar{z}} &= z \end{aligned}$$



$$2) \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$b) \quad 1) \quad |z| \geq 0 \quad \text{und} \quad (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$$

$$2) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

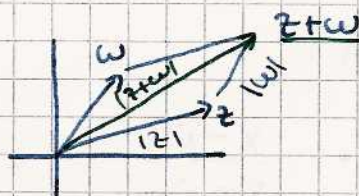
$$3) \quad |z+w| \leq |z| + |w| \quad \Delta\text{-Ungleichung}$$

$$c) \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Beweis:

zu b3)



gilt, da die Summe der Längen zweier Seiten $\geq$ der Länge der dritten Seite im Dreieck

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

$$\Leftrightarrow |z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \quad (z+w)(\bar{z} + \bar{w})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w}_{2 \operatorname{Re}(z \bar{w})} \leq 2 \cdot |z| \cdot |w| = 2 \cdot |z \bar{w}|$$

□

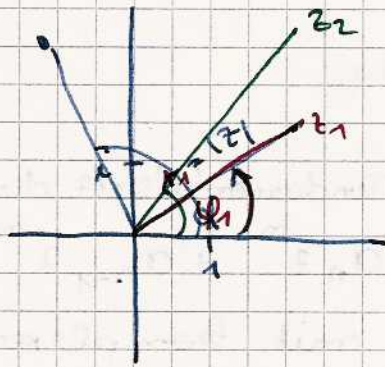
8.6. Geometrische Interpretation der Multiplikation

$$z = x + iy$$

$$= r (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$$r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$



$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i \cdot (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

wg. Additionstheoreme für sin, cos.

Also Winkel addieren sich, Beträge multiplizieren sich.

8.7. Def.

Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen heißt konvergent gegen z , wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$, so daß

$$|z_m - z| < \varepsilon \quad \forall m \geq n_0$$

Bem.:

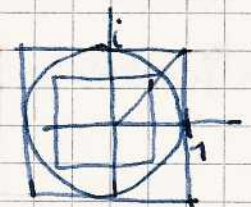
$z_m = x_m + i y_m$. Dann konvergiert $(z_n) \Leftrightarrow (x_n)$ und (y_n) konvergieren

Beweis:

Sei w komplexe Zahl

$$\max(|\operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} w|) \leq |w|$$

$$\leq \sqrt{2} \cdot \max(|\operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} w|)$$



Begriffe wie Cauchy-Folge sind analog zu $\mathbb{R}$ erklärt.

$\mathbb{C}$ ist vollständig.

P.8. Satz Fundamentalsatz der Algebra

Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

ein Polynom mit komplexen Koeffizienten

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ vom Grad n , d.h. $a_n \neq 0$.

Dann hat p mit Vielfachheit gezählt genau n Nullstellen, d.h. $\exists z_1, \dots, z_n$, so daß

$$p(z) = a_n \cdot \prod_{j=1}^n (z - z_j)$$

Beweis: wesentlich später

Bem: $\mathbb{C}$ läßt sich nicht anwenden.

$$-1 = i^2 > 0, \quad 1 > 0 \Rightarrow -1 + 1 = 0 > 0 \quad \text{!}$$

2) Ist $a_n z^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit

reellen Koeffizienten, dann folgt

mit $z \in \mathbb{C}$ ist $\bar{z}_1 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle

$$0 = \overline{p(z_1)} = p(\bar{z}_1)$$

Also für reelle Polynome hat man

Faktorisierung von

$$(z - x_1)$$

oder

$$(z - z_1) \cdot (z - \bar{z}_1) = z^2 - 2\operatorname{Re} z_1 z + |z_1|^2$$

(hat reelle Koeffizienten.)

in lineare oder quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten!

9.9 Reihen

45

9.1. Def.

Sei (a_n) eine Folge reeller oder komplexer Zahlen.

Dann nennen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

eine Reihe, genauer dies bezeichnet die Folge der Partialsummen $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$ k -te Partialsumme

und 2) wenn (s_k) konvergiert ebenfalls dem Grenzwert

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Reihen sind nur anders geschriebene Folgen.

(b_n) Folge

$$a_0 = b_0, \quad a_n = b_n - b_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ mit Partialsummen } \sum_{n=0}^k a_n = b_k$$

9.2 Satz Cauchy-Konvergenzkriterium f. Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ so daß } \forall m \geq n \geq n_0$$

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| < \varepsilon$$

Insbesondere bilden die Summanden an einer konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Nullfolge (a_n)

9.3 Bsp.

Sei $q \in \mathbb{C}$ Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

eine geometrische Reihe.

Satz:

Die geometrische Reihe konvergiert genau dann,
wenn $|q| < 1$ und in diesem Fall gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$|q| < 1$ ist notwendig, damit $q^n \rightarrow 0$

Zureichend:

$$s_k = \sum_{n=0}^k q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

Da mit $|q| < 1$ $|q|^{k+1} \rightarrow 0$, $q^{k+1} \rightarrow 0$

folgt

$$\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$$

Die Bedingung an $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ist nicht hinreichend
für die Konvergenz in $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

9.4 Bsp: Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \text{ divergiert,}$$

denn die Folge der Partialsummen ist unbeschränkt.

$$\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Also 2^k -te Partialsumme

$$\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{n=2^l+1}^{2^{l+1}} \frac{1}{n}$$

$$\geq 1 + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{n=2^l+1}^{2^{l+1}} \frac{1}{2^{l+1}} \right)$$

$$= 1 + \sum_{l=0}^{k-1} 2^l \cdot \frac{1}{2^{l+1}} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

9.5 Beispiel

$$b \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_n < b-1$$

Dann heißt

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot b^{-n} \quad \text{ein } b\text{-adischer Bruch}$$

Speziell: $b = 10$, Dezimalzahlen

b -adische Brüche konvergieren: Die Summanden sind positiv, die Partialsummen bilden daher eine monoton steigende Folge. Es reicht daher zu zeigen, daß die Partialsummen beschränkt bleiben.

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=k}^l a_n \cdot b^{-n} \leq (b-1) \cdot \sum_{n=k}^l b^{-n} = (b-1) \cdot b^{-k} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{l-k} b^{-n}}_{\text{geom. Reihe in } \frac{1}{b}} \\ &= (b-1) \cdot b^{-k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{b}\right)^{l-k+1}}{1 - \frac{1}{b}} \leq b^{-k+1} \end{aligned}$$

unabhängig von l

Die a_n heißen Ziffern des b -adischen Bruchs, üblich ist die Notation

$$a_{-k} a_{-k+1} \dots a_{-1} \mid a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Jede reelle Zahl läßt sich in einen b -adischen Bruch entwickeln, aber die Entwicklung ist nicht eindeutig.

$$b = 10 \quad 0.9999 = 0.\overline{9} = 1.0$$

Konvergenzkriterien für Reihen

9.6 Def.

Seien a_n positive reelle Zahlen. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ eine alternierende Reihe

Satz Leibniz-Kriterium

Eine alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert, wenn die Folge (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist.

Bsp.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots \text{konvergiert}$$
$$\stackrel{!}{=} \ln 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots$$
$$\stackrel{!}{=} \frac{\pi}{4}$$

Die Konvergenz folgt jeweils aus dem Satz. Grenzwert zu bestimmen ist ein anderes Thema und wesentlich schwieriger (ist später)

Beweis des Satzes:

Die Folge der ungeraden Partialsummen $s_{2k+1} = \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n a_n$

$$= \sum_{l=0}^k (a_{2l} - a_{2l+1}) \stackrel{\geq 0}{\leq} s_{2k+3}$$

ist monoton wachsend, die geraden Partial-

Summen $s_{2k} = a_0 + \sum_{l=1}^k (-a_{2l-1} + a_{2l}) \stackrel{\leq 0}{\geq} s_{2k+2}$

ist monoton fallend und

$$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_0$$

Also (s_{2k+1}) wächst und ist durch s_0 von oben

beschränkt, analog (s_{2k}) fällt und ist durch s_1 nach unten

unten beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = S \text{ existiert, } \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = S'$$

$$\text{und } S - S' = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k+1} a_{2k+1} = 0$$

Damit ist $S = S'$ und $\sum (-1)^n a_n = S$

9.7. Def.

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (komplexer / Zahlen) heißt absolut konvergent, wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bem.: Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz
(Umkehrung gilt nicht!)

Beweis:

$\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann $\exists n_0$ sodass $\sum_{n=n_0}^m |a_n| < \varepsilon$
 $\forall m \geq n \geq n_0$

$$\left| \sum_{n=n_0}^m a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^m |a_n| < \varepsilon$$

Also Cauchy Kriterium ist erfüllt. $\square$

9.8. Satz: Majorantenkriterium

Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ Reihen und $|a_n| \leq |b_n| \forall n$

Dann gilt: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Man nennt $\sum b_n$ eine Majorante von $\sum a_n$

Beweis:

$\sum |a_n|$ hat eine monoton wachsende Folge von Partialsummen. Es reicht zu zeigen diese bleibt beschränkt.

$$S_k = \sum_{n=0}^k |a_n| \leq \sum_{n=0}^k b_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

9.9 Satz Quotientenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit Summanden $\neq 0$.

Falls ein q mit $0 < q < 1$ existiert, so daß

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \forall n,$$

dann konvergiert die Reihe absolut.

Bsp.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{konvergiert}$$

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{3} = q \quad \forall n \geq 1$$

Beweis:

Mit Induktion folgt

$$|a_n| \leq |a_0| \cdot q^n$$

Also die geom. Reihe $|a_0| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist eine konvergente Majorante.

9.10 Theorem (Euler-Kriterium)

Sei $\sum a_n$ eine Reihe. Gilt

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \theta$$

mit $0 \leq \theta < 1$, dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Beweis:

Sei $\theta < q < 1$. Dann gilt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$

für fast alle n . Dies reicht

□

9.11 Bem.

48

Die Voraussetzung $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ für alle n reicht nicht im Majorantenkriterium.

Bsp.:

Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert,

obwohl

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{für alle } n.$$

→ Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, dann kann man

Konvergenz bzw. Divergenz nicht entscheiden.

Bsp.:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Diese Reihe erfüllt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Die Reihe konvergiert:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

also

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

9.12 Bsp.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Beweis:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ ist konvergente Majorante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Schwierig zu verstehen})$$

Umschreibung von Reihen

Endliche Summen können wir in einer beliebigen Reihenfolge aufsummieren mit gleichem Ergebnis.

Für Reihen ist dies falsch.

Bsp.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} = S \quad \text{konvergiert nach Leibniz}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$1 \geq S \geq \frac{1}{2}$$

$$S_{1/6} \geq S \geq \frac{7}{12}$$

Wir sortieren um:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2}}_{\left(\frac{2}{4k-2}\right) \rightarrow \frac{1}{4k-2}} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S \neq S$$

9.14 Satz

A) Kleiner Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und

$\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion.

Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut

$$\text{und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$$

B) Großer Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und sei

$I_k \subset \mathbb{N}$ eine Familie von disjunkten Teilmengen mit $\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k = \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$s_k = \sum_{n \in I_k} a_n \quad \text{absolut konvergent (wohldefiniert wg. A)}$$

und $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ konvergiert absolut mit Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

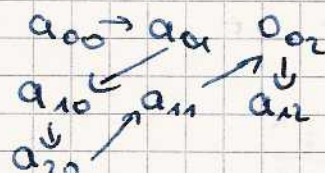
Bsp.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \right) \quad \text{gilt,}$$

$\exists M$, so daß

falls für jede endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\sum_{(n,m) \in E} |a_{n,m}| < M$$



$$b_0 = a_{0,0}, \quad b_1 = a_{0,1}, \quad b_2 = a_{1,0}, \quad b_3 = a_{2,0}$$

$$\text{Vor.} \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| < \infty$$

Satz $\Rightarrow$ Beh.

Beweis von Satz 9.14

1) ist Spezialfall von 3 mit $I_k = \{ \tau(k) \}$.

Zunächst zeigen wir die absolute Konvergenz von $\sum_{n \in I_k} a_n$

Für $I' \subset I'' \subset I_k$ endliche Teilmengen

gilt:

$$\sum_{n \in I'} |a_n| \leq \sum_{n \in I''} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Absolute Partialsummen sind monoton und

beschränkt $\Rightarrow$ konvergent

$$\text{Also} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |s_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in I_k} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Für die Gleichheit der Grenzwerte wählen wir

die $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß

$$1) \quad \left| S - \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n \right| < \varepsilon, \quad 2) \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

Sei k_0 so groß daß $\{0, \dots, n_0\} \subset \bigcup_{k=0}^{k_0} I_k$

Dann gilt für alle $k_1 \geq k_0$

$$\left| S - \sum_{k=0}^{k_1} s_k \right| \leq \left| S - \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n \right| + \sum_{k=0}^{k_1} \sum_{n \in I_k, n \geq n_0} |a_n| \leq \varepsilon + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \leq 2\varepsilon$$

Potenzrechen

9.15 Definition

Eine Reihe der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wobei $z \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ heißt Potenzreihe und die a_n nennt man die Koeffizienten der Potenzreihe.

Bsp.:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$

9.16 Satz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe.

Wenn die Potenzreihe in einem Punkt $z = z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für alle $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < |z_0|$ absolut.

Beweis:

Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergent ist, ist $(a_n z_0^n)$ eine Nullfolge, insbesondere beschränkt.

Sei M obere Schranke, also $|a_n z_0^n| \leq M \quad \forall n$

$$\Rightarrow |a_n \cdot z_1^n| \leq M \cdot \left| \frac{z_1}{z_0} \right|^n \quad \forall n$$

$$\underbrace{\quad}_{q < 1}$$

$\Rightarrow$ Die Reihe $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z_1}{z_0} \right|^n$ ist eine konvergente

Majorante.

□

9.17 Korollar

Sei $\sum a_n z^n$ eine Potenzreihe. Dann existiert ein R mit $0 \leq R \leq \infty$, so daß

- $\sum a_n z^n$ konvergiert $\forall z$ mit $|z| < R$
- $\sum a_n z^n$ divergiert $\forall z$ mit $|z| > R$

Ist $|z| = R$, dann kann Konvergenz vorliegen aber nicht notwendig.

R heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.



Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

konvergiert für $z = -1$

divergiert für $z = 1$

$\Rightarrow R = 1$

Bsp.: Radien der Beispiele

1) geom. Reihe: konvergiert für $|z| < 1$
divergiert für $|z| \geq 1$

$\Rightarrow R = 1$

2) $z_0 \in \mathbb{C}$. Quotientenkriterium

$$\left| \frac{z_0^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{z_0^n}{n!} \right| = \frac{|z_0|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ Konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$ also $R = \infty$

3) $R \leq 1$, da $\sum n$ divergiert

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{z_0^{n+1}}{n+1} : \frac{z_0^n}{n} \right| = |z_0| \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z_0|$$

$|z_0| < 1 \Rightarrow$ Konvergenz des Eulerkriteriums

$$\Rightarrow R = 1$$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ ist divergent $\forall z \neq 0$

$$\Rightarrow R = 0 \quad (\text{nach Eulerkriterium})$$

§ 10 Punkt Mengen in $\mathbb{R}$.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

10.1 Def. Häufungspunkt

Sei $M \subset \mathbb{R}$.

$a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt, falls
 $\forall \varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Punkte $b \in M$
mit $|b - a| < \varepsilon$.

Bsp.:

$$1) M = \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Jeder Punkt $a \in [0, 1]$ ist Häufungspunkt, da sich beliebige Zahlen durch rationale Zahlen beliebig gut approximieren lassen.

2) Sei a_n eine Folge mit paarweise verschiedenen Gliedern. Dann sind die HP von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 $=$ HP von der Folge (a_n)

$(a_n) = ((-1)^n)$ hat HP $\{\pm 1\}$.

Aber $M = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\pm 1\}$ hat keine HP.

10.2 Def.

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn
 $\exists K$, so daß $a \leq K \quad \forall a \in M$.

K heißt obere Schranke von M

(analog untere Schranke: $\exists K$, so daß $a \geq K \quad \forall a \in M$)

10.3 Def. + Satz

51

Sei M eine nach oben beschränkte Menge $\neq \emptyset$.

Dann existiert eine kleinste obere Schranke von M .

Diese heißt Supremum von M , bez. $\sup M$ $\in \mathbb{R}$

Beweis:

Sei K_0 eine obere Schranke von M und $a_0 \in M$.

also $K_0 \geq a_0$. Wir konstruieren eine Folge (K_n) von oberen Schranken und (a_n) von Elementen von M .

Ist K_n, a_n schon konstruiert, so betrachten wir $b = \frac{K_n + a_n}{2}$

2 Fälle:

1) Ist b obere Schranke von M , dann setzen wir

$$K_{n+1} = b, \quad a_{n+1} = a_n$$

2) b ist keine obere Schranke, dann existiert $a \in M$ mit $a > b$ und wir setzen

$$K_{n+1} = K_n, \quad a_{n+1} = a$$

Dann haben wir Folgen (K_n) monoton fallend beschränkt durch a_0 von unten.

2) (a_n) aus M monoton wachsend beschränkt

3) $\lim (K_n - a_n) = 0$

Sei $K = \lim K_n$. Dann gilt auch $\lim a_n = K$

K ist obere Schranke, denn für $c \in M$ beliebig gilt $K_n \geq c \Rightarrow K = \lim K_n \geq c$.

Für $\varepsilon > 0$ ist $K - \varepsilon$ keine obere Schranke, da

$\exists a_n \in M$ mit $a_n > K - \varepsilon$

also $K = \sup M$

□

10.4 Def.

Sei $M \neq \emptyset, \subset \mathbb{R}$ von unten beschränkt, dann heißt

$\inf M$ = größte untere Schranke

das Infimum von M .

Bsp.:

$$1)]a, b[\quad \sup(]a, b[) = b$$

$$\inf(]a, b[) = a$$

$$2) M = \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 < b\}, \quad b > 0 \text{ fest}$$

$$\inf M = -\sqrt{b}$$

$$\sup M = +\sqrt{b}$$

10.5 Def.

Etwas allgemeiner $M \subset \mathbb{R}$ beliebig.

$$\sup M = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } M \text{ von oben unbeschränkt} \\ \text{kleinste obere Schranke, falls } M \text{ von oben beschränkt ist} \\ -\infty, & \text{falls } M = \emptyset \end{cases}$$

Analog

$$\inf M = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } M \text{ nach unten unbeschränkt} \\ \text{größte untere Schranke} \\ \infty, & \text{falls } M = \emptyset \end{cases}$$

$$\sup M, \inf M \in]-\infty, \infty[$$

10.6 Def.

Eine Folge (an) reeller Zahlen heißt konvergent

gegen $+\infty$, wenn $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 : a_n > K \quad \forall n \geq n_0$

Bsp.:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n + \frac{1}{n} = \infty$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n + (-1)^n \cdot n) \text{ existiert nicht, da } a_n = \begin{cases} 2n & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

10.7. Def. (Limes superior, Limes inferior)

Sei (a_n) eine Folge.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k \mid k \geq n\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_k \mid k \geq n\}$$

Beispiel:

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$
$$\sup \{a_k \mid k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Allgemein: $\limsup (a_n)$ ist der größte Häufungspunkt von (a_n) , wenn endlich.

$\liminf (a_n)$ ist der kleinste Häufungspunkt.

10.8 Def.

Sei M eine beliebige Menge. M heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung

$$\tau: \mathbb{N} \rightarrow M \text{ gibt.}$$

τ heißt Abzählung.

Bsp.:

1) Jede endliche Menge ist abzählbar.

2) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, +1, -2, +2, \dots\}$$

$$\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\tau(n) = (-1)^n \cdot \begin{cases} n/2 & n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

3) Jede nichtleere Teilmenge einer abzählbaren Teilmenge ist abzählbar.

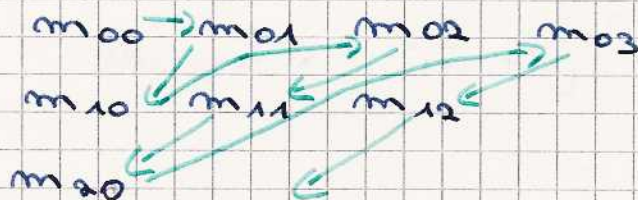
10.9 Satz

Seien $\mathcal{M}_k$ eine Familie von Teilmengen einer Menge M . Sind die $\mathcal{M}_k$ abzählbar, dann ist auch $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k$ abzählbar.

Beweis:

$$\text{Sei } \mathcal{M}_k = \{m_{k0}, m_{k1}, m_{k2}, \dots\}$$

Wir wollen $\bigcup \mathcal{M}_k$ abzählen, z.B. so:



$$m = \binom{a+1}{2} + b, \quad a \geq 0, 0 \leq b \leq a$$

$$\tau(m) = m_{b, a-b}$$

□

Lemma 10.10.

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

$$\mathcal{M}_k = \left\{ \frac{a}{k} \mid a \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z} \xleftarrow[\text{surjektiv}]{\text{injection}} \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$$

10.11 Satz (Kantor)

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis:

Reicht $[0, 1[$ ist überabzählbar

Angenommen nicht, dann $\exists \tau: m \rightarrow \tau(m) = c_n$ Abzählung. Sei

$$c_n = 0, c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nk} \dots$$

die Dezimalbruchentwicklung.

$$d = 0, d_1, d_2, \dots$$

$$d_k = \begin{cases} 5 & c_{kk} \neq 5 \\ 4 & c_{kk} = 5 \end{cases}$$

Also $d \neq c_n \quad \forall n$. Also T ist nicht surjektiv. $\square$

Lemma:

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überabzählbar.

Beweis:

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{abzählbar}}$$

Kapitel III

Reelle Funktionen

§ 11 Stetigkeit

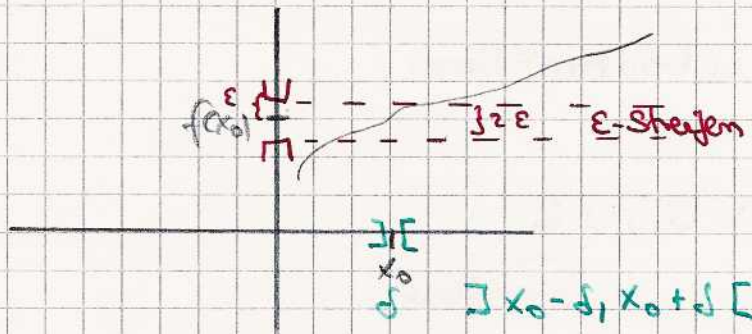
11.1 Def.

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

f heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$ wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

$$\forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$



f heißt stetig auf D , wenn es in jedem Punkt von D stetig ist.

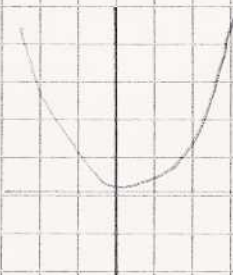
11.2 Beispiele

1) $f = \text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x$

Zu $x_0 \in \mathbb{R}$ bel. und $\varepsilon > 0$ können wir ein $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ wählen.

Dies hängt δ nicht von x_0 ab.

2) $f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$x_0 \in \mathbb{R}$ und x so daß $|x - x_0| < \delta$

Dann

Δ -Ungl.

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = \underbrace{|x + x_0|}_{\leq 2|x_0| + \delta} \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{< \delta}$$

$$< (2|x_0| + \delta) \cdot \delta < \varepsilon$$

$$\text{falls } \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right)$$

Dies hängt

$\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ von x_0 und ε ab.

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



f ist unstetig in $x_0 = 0$

denn für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\delta > 0$ gibt es x mit $|x| < \delta$ und $x > 0$

also $|f(x) - f(0)| = |1 - 0| = 1 \not< \frac{1}{2} = \varepsilon$

4) Die Funktion

$$\chi_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig, da in jedem δ -Intervall rationale und irrationale Zahlen liegen.

11.3 Satz

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, dann sind auch

1) $f + g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

stetig. Für $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ ist

$$\frac{1}{g}: D' \rightarrow \mathbb{R} \text{ def. } \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$$

ebenfalls stetig.

Beweis:

ist analog zu den entsprechenden Rechenregeln
für Grenzwerte aus § 7 $\square$

11.4 Idolellen.

Rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit
 p, q Polynome sind auf dem Definitionsbereich
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ stetig.

Beweis:

Idonstante Funktionen sind stetig, $f(x) = x$
ist stetig

$\Rightarrow$ Polynome sind stetig mit 1) und 2)

$\Rightarrow$ rat. Funktionen sind stetig mit 3) und 1)

11.5 Satz Folgenkriterium für Stetigkeit

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist in $x_0 \in D$
genau dann stetig, wenn für jede Folge (a_n) aus D
mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0) \quad \text{gilt.}$$

Mit anderen Worten: Für stetige Funktionen gilt

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

sofern die linke Seite existiert.

Beweis:

f sei stetig, (a_n) in D eine Folge mit
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

Wir wollen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$ zeigen.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta$ sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
 $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

zu $\delta > 0 \exists n_0$ sodass $|a_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_0$
 $\Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ 55

Sei f in x_0 nicht stetig.

Wir wollen eine Folge (a_n) konstruieren mit
 $\lim f(a_n) \neq f(x_0)$.

Wegen der Unstetigkeit $\exists \varepsilon > 0$ sodass
 $\forall \delta > 0$ es $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gibt
 und $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$

Betrachten $\delta = \frac{1}{n}$ und $x_n \in D$ so ein x .

Dann $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim x_n = x_0$,

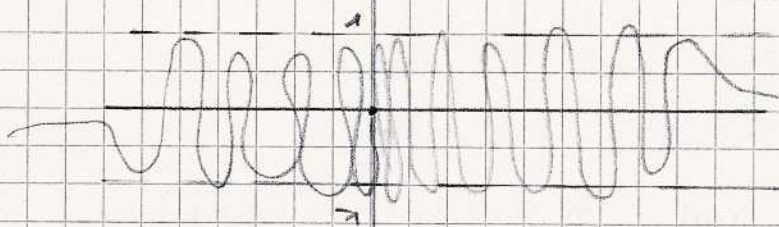
aber $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$ (fest)

$f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ $\square$

Bem.: Das Folgenkriterium ist nicht so gut
 geeignet, Stetigkeit nachzuweisen, aber gut
 für Unstetigkeit.

11.6 Beispiel

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$



f ist in $x_0 = 0$ nicht stetig.

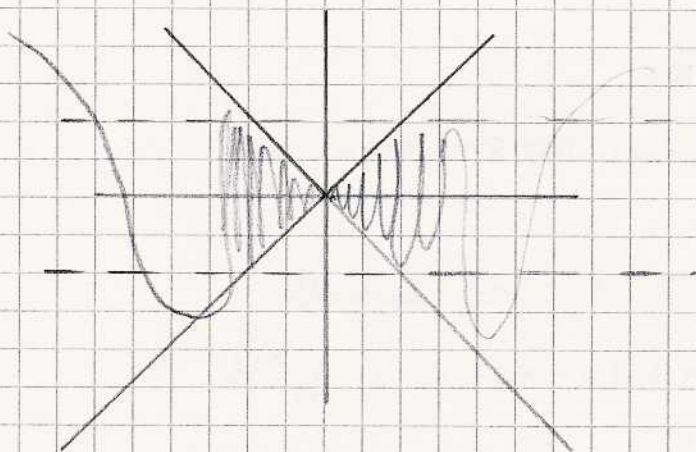
Betrachte $a_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2\pi n}$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f(a_n) = \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2} + 2\pi n}\right) = \sin \frac{2}{1 + 4\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Für } a'_n = \frac{1}{\frac{3}{2} + 2\pi n} : a_n \rightarrow 0 \text{ und } f(a'_n) = -1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$



f ist in $x_0 = 0$ stetig.

Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \varepsilon$, dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= |x \sin \frac{1}{x} - 0| \\ &= |x| \cdot \underbrace{|\sin \frac{1}{x}|}_{\leq 1} \leq |x| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall x$ mit $|x| < \delta$

11.7 Satz

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, mit $f(D) \subset E$

f sei stetig in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$.

Dann ist die Komposition

$$g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

in x_0 stetig.

Beweis:

Sei $(a_n) \subset D$ eine Folge mit $\lim a_n = x_0$

f stetig in $x_0 \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(x_0) = y_0$

g stetig $\Rightarrow \underbrace{g(f(a_n))}_{(g \circ f)(a_n)} \rightarrow g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$

□

11.8 Def (Grenzwert bei Funktionen)

56

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

und $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt, für den es wenigstens eine Folge (a_n) aus D gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
(Also $a \in D$ oder a ist Häufungspunkt von D)

Dann sagen wir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

falls für alle Folgen $(x_n) \in D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$$

gilt.

Analog definiert man $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$, indem man
 $x \nearrow a$ (von unten)
monoton steigende Folgen betrachtet.

Bsp.:

$$f(x) = \frac{p(x) \cdot r(x)}{q(x) \cdot r(x)}$$

und $a \in \{x \in \mathbb{R} \mid r(x) = 0, q(x) \neq 0\}$

Dann ist f in a zunächst nicht definiert

aber

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) \cdot r(x)}{q(x) \cdot r(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

und f läßt sich zu $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ fortsetzen

11.9 Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Insbesondere:

Ist $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann hat

f eine Nullstelle in $[a, b]$

Beweis:

Es reicht den Spezialfall zu zeigen, indem wir für einen Zwischenwert c f durch die Funktion $\pm(f-c)$ ersetzen.

Wir konstruieren Folgen $(a_n), (b_n)$, die gegen eine Nullstelle konvergieren.

Setzen $a_0 := a, b_0 := b$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$

a_n, b_n schon konstruiert.

Betrachte $\frac{a_n + b_n}{2}$ (Mittelwert)

Ist $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$, dann

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = b_n$$

Ist $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$, dann

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Intervall-
halbierung

Dann gilt: a_n und b_n sind monoton und beschränkt, also konvergent, und $\lim a_n = \lim b_n$, da $b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - a_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

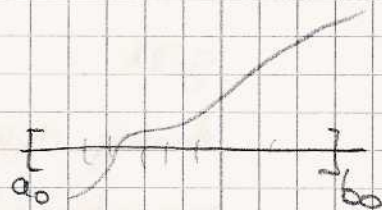
Ferner: $f(a_n) < 0, f(b_n) \geq 0$

Stetigkeit gibt

$$f(x_0) = \lim f(a_n) \leq 0, \quad f(x_0) = \lim f(b_n) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) = 0$$

□



11.10 Def.

57

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt,
wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert mit
 $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D.$

M heißt Schranke.

11.11 Satz

Jede auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall
Stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt,
und nimmt Maximum und Minimum an.

Beweis:

Sei $A = \inf \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$

$B = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$

Zunächst $A, B \in [-\infty, \infty]$ ∞ kann auch angenommen werden

Wollen zeigen $A, B \in \mathbb{R}$ und Werte werden
angenommen.

Sei $(x_n) \subset [a, b]$ eine Folge mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente
Teilfolge (x_{n_k}) und $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = d \geq a$,
 $d \in [a, b]$.

Nach der Stetigkeit von f folgt

$$f(d) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A,$$

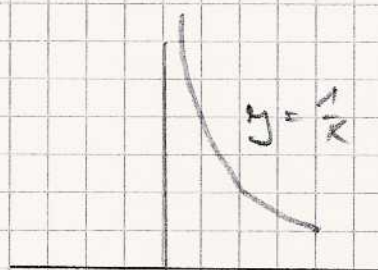
also in d wird das Minimum angenommen.
(Sup analog)

□

Bsp.:

Die Aussage ist falsch für offene Intervalle.

$$f:]0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$



ist nicht beschränkt.

11.12 Def (Monotonie, streng monoton)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

f heißt (streng) monoton wachsend, wenn

$$\text{für } a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) \underset{(<)}{\leq} f(b)$$

11.13 Satz

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine ... stetige Funktion. Dann ist $J := f(I)$ ein Intervall.

Ist f streng monoton, dann ist

$f: I \rightarrow J$ bijektiv und die

Umkehrfunktion $f^{-1}: J \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ ist

ebenfalls stetig und streng monoton.

Beweis:

J ist ein Intervall nach Zwischenwertsatz. Es ist

$f: I \rightarrow J$ ist injektiv wg. der strengen Monotonie, also bijektiv.

$f^{-1}: J \rightarrow I$ ist ebenfalls streng monoton.

Bleibt die Stetigkeit zu zeigen.

$\varphi = f^{-1}$ und $(y_n) \subset J$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

Wir müssen $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n) = \varphi(y_0)$ zeigen:

Sei $x_n = f(y_n)$. Angenommen x_n konvergiert nicht gegen x_0 , d.h. $\exists \varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) , so daß $|x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon$

Wir können annehmen, daß $(y_n) \subset [1, 3] \subset J$.

Wegen der Monotonie folgt $(x_n) \subset [a, b]$, wobei $[a, b] = f^{-1}([1, 3])$

Nach Bolzano-Weierstraß können wir durch Übergang zu einer Teilfolge annehmen, daß x_{n_k} konvergiert. Sei $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$.

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0 = f(x_0)$$

Wegen f injektiv $\Rightarrow \bar{x} = x_0$.

Dies widerspricht der Aussage $|x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon \Rightarrow |\bar{x} - x_0| \geq \varepsilon$

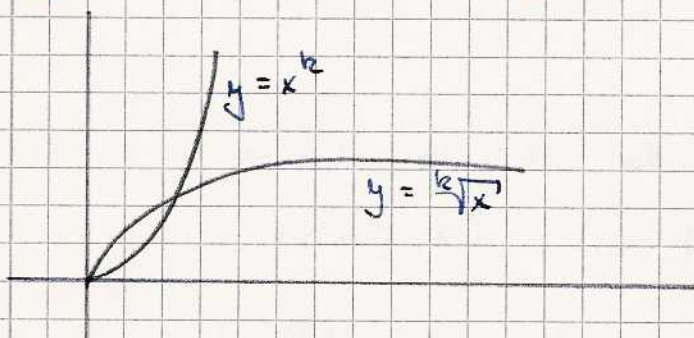
Beispiel:

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^k, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

f ist stetig und streng monoton

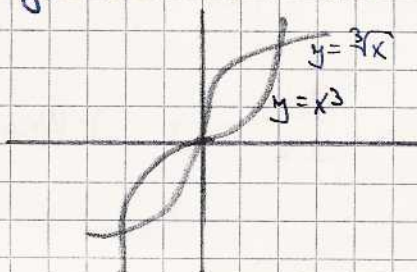
$$a > b \geq 0 \Rightarrow a^k > b^k \geq 0$$

$f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Umkehrfunktion $f^{-1} = \sqrt[k]{\cdot}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
 $y \mapsto \sqrt[k]{y}$ ist ebenfalls stetig

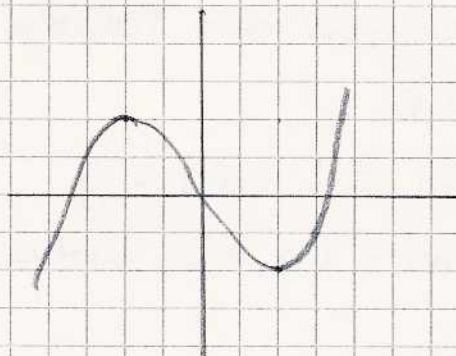


Bem.:

für k ungerade ist $x \mapsto x^k$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton



Bsp.: $y = x^3 - x$



§ 12 Differenzierbarkeit

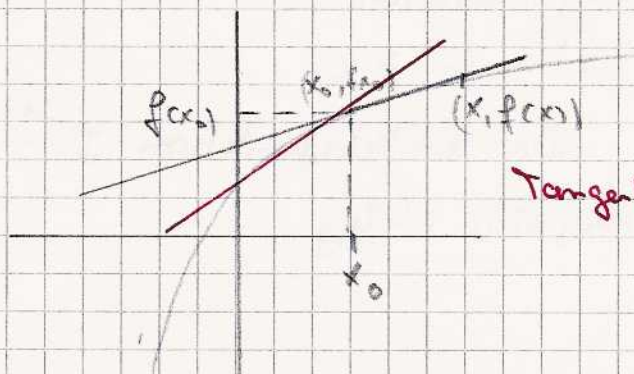
12.1 Def.

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall, $x_0 \in I$.

f heißt differenzierbar in x_0 , falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert



Tangente mit Steigung $f'(x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Steigung der Sekante durch
 $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$

$f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 .

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt Differenzenquotient

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{Differentialquotient}$$

1) $f = c$ eine konstante Funktion

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

$$\text{Also } f'(x_0) = 0$$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt diff'bar auf I , wenn f in allem $x_0 \in I$ diff'bar ist.

$f': I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \mapsto f'(x_0)$ heißt Ableitung von f .

$$c \text{ konstante } (c)' = 0$$

2) $f(x) = x$

$$\frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1, \quad (x)' = 1$$

3) $f(x) = x^2$

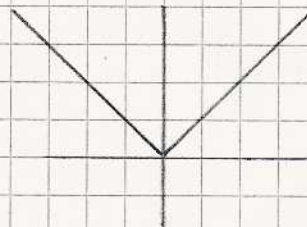
$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \stackrel{\text{3. binom. Formel}}{=} x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0$$

$$(x^2)' = 2x$$

4) $f(x) = |x|$

ist in $x_0 = 0$ nicht

diff'bar.



$$x > 0: \quad \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1 \rightarrow 1$$

$$x < 0: \quad \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1 \rightarrow -1$$

Aber es existiert

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

links- und
rechtsseitige
Ableitung.

12.13 Satz

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 diffbar $\Rightarrow f$ ist in x_0 stetig.

Beweis:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\Rightarrow \exists \eta, \delta_0$, sodass

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \eta \quad \forall x \in I \mid x - x_0 < \delta_0, x \neq x_0$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \eta \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$

für x mit $|x - x_0| < \delta$

$$\text{wobei } \delta = \min\left(\delta_0, \frac{\varepsilon}{\eta}\right)$$

□

(Stetigkeit ist schwächer als Diff'barkeit)

12.4 Satz (Rechenregeln)

Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, c eine Konstante.

Dann sind auch

1) $f + g$ 2) $c \cdot f$ 3) $f \cdot g$ diffbar mit Ableitung.

$$1) (f + g)' = f' + g'$$

$$2) (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

3) Produktregel (Leibnizregel)

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Ferner: Ist $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$, dann ist

$\frac{f}{g}: I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und diffbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

zu 3)

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) \cdot g(x) - \overbrace{f(x_0) \cdot g(x)}^{\text{eingesprochen}}}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{g'(x_0)}$$

$$= (f \cdot g)'(x_0)$$

zu 4) Grenzwert des Fall

$$\frac{1}{g} : \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}{g(x) - g(x_0)} \rightarrow \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$$\text{also } \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

$$\text{allgemein: } \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2}$$

$$= \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$$

12.5 Idiotenrollen

Rationale Funktionen sind in ihrem Def. Bereich diff'bar

12.6 Satz Exponentenregel

$m \in \mathbb{Z}$. Betrachte $f(x) = x^m$. Dann gilt:

$$(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

$$n=0 \quad x^0 = 1, \quad (1)' = 0 = 0 \cdot x^{-1} \quad \text{ok.}$$

Induktion $m \leadsto m+1$

$$\begin{aligned} (x^{m+1})' &= (x^m \cdot x)' = (x^m)' \cdot x + x^m \cdot (x)' \\ &= m x^{m-1} \cdot x + x^m \cdot 1 = (m+1) x^m \quad \text{ok.} \end{aligned}$$

negative Exponenten:

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}; \quad \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$= -m \cdot x^{-m-1}$$

$$\text{also } (x^{-n})' = -n \cdot x^{-n-1}$$

12.7. Satz Kettenregel

$f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar

und $f(I) \subset J$. Dann ist

$g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

sofern $f(x) \neq f(x_0)$. Für $x \rightarrow x_0$ gilt $f(x) \rightarrow f(x_0)$
wg. der Stetigkeit, also

$$\rightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Gibt es eine Nullfolge (h_n) mit $f(x_0 + h_n) = f(x_0)$
 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ 64

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_0 + h_n)) - g(f(x_0))}{h_n} = 0$$

und die Formel ist ebenfalls richtig. □

Beispiel:

$$1) g(x) = \frac{1}{x}, \quad f: I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{f}, \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Kettenregel:

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= \frac{1}{f(x_0)^2} \cdot f'(x_0) = -\frac{f'}{f^2}(x_0) \end{aligned}$$

genauso wie bei Quotientenregel.

$$2) f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = x^3$$

$$(g \circ f) = (x^2 + 1)^3$$

$$((x^2 + 1)^3)' = 3 \cdot (x^2 + 1)^2 \cdot 2x =$$

"

"

$$(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1)' = 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

12.8 Satz Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in x_0 , streng monoton
und $J = f(I)$. ^{Ist $f'(x_0) \neq 0$} Dann ist die Umkehrfunktion

$f^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$ in $y_0 = f(x_0)$ ebenfalls diffbar
und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Beweis der Formel, wenn diffbar.

Da $f \circ f^{-1} : J \rightarrow J = \text{id}_J$ diffbar ist,
folgt nach der Kettenregel

$$(\text{id}_J)' = 1 = f'(f^{-1}(y_0)) \cdot (f^{-1})'(y_0) \\ \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Beweis:

Da $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$
für x nahe x_0

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beispiel

$$g(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$$

g ist Umkehrfunktion von $f(x) = x^k$
 $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(x) = kx^{k-1}$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{x})^{k-1}} \\ = \frac{1}{k} \cdot x^{\frac{1-k}{k}} = \frac{1}{k} \cdot x^{\frac{1}{k}-1}$$

also

$$(x^{\frac{1}{k}})' = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1}$$

erfüllt die Exponentenregel

$k=3$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y = x^3$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

ist in $x_0 = 0$ nicht
diffbar

$$g'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

