Mathematik für Informatiker I
Prof . Dr. F.-O. Schreyer, Janko Böhm
Musterlösung Eingangstest

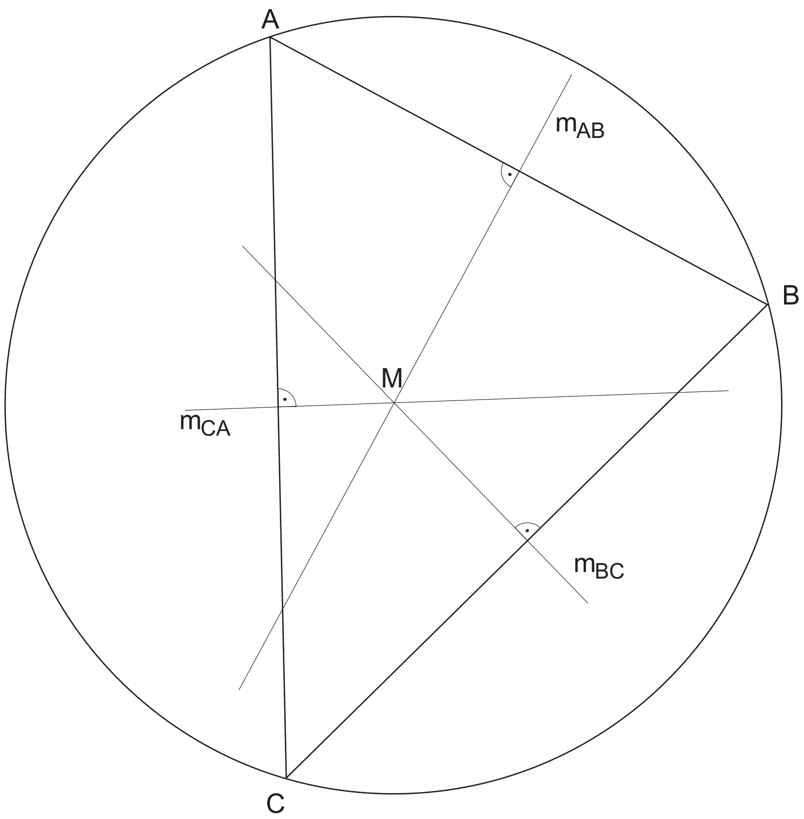
Aufgabe 1

Zeigen Sie: Durch 3 Punkte in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau 1 Kreis.

Lösung:

Seien Punkte A, B, C in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, gegeben. Diese bilden ein Dreieck ABC. Sei m_{AB} die Mittelsenkrechte der Seite AB, m_{BC} die Mittelsenkrechte der Seite BC, m_{CA} die Mittelsenkrechte der Seite CA. m_{AB} ist die Menge der Punkte, die von A und B den selben Abstand haben, m_{BC} ist die Menge der Punkte, die von B und C den selben Abstand haben. m_{AB} und m_{BC} schneiden sich in genau einem Punkt M, der dann von A und B und C gleich weit entfernt ist. Somit liegen A, B, C auf dem Kreis um M mit Radius $\overline{MA}$.

Außerdem liegt M auch auf m_{CA}, da er von A und C gleich weit entfernt ist, also sehen wir auch, daß sich alle 3 Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{BC}, m_{CA} genau in M schneiden. Da M eindeutig bestimmt ist, als der Punkt der gleich weit von A, B und C entfernt ist, ist auch der Kreis eindeutig bestimmt.



Aufgabe 2

Berechnen Sie den Abstand der windschiefen Geraden im $\mathbb{R}^3$

$$l_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$l_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Lösung:
Wir schreiben

$$l_1(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 + t_1 \cdot v_1$$

$$l_2(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_2 + t_2 \cdot v_2$$

Sind P_1 und P_2 die beiden eindeutig bestimmten Punkte auf l_1 und l_2 mit minimalem Abstand, dann hat die Verbindungsgerade von P_1 und P_2 die Richtung

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem für t_1, t_2 und s

$$b_1 + t_1 \cdot v_1 + s \cdot n = b_2 + t_2 \cdot v_2 \tag{1}$$

Dann ist der Abstand der Geraden $\|s \cdot n\|$. Wir können (1) auch schreiben

$$b_2 - b_1 = t_1 \cdot v_1 - t_2 \cdot v_2 + s \cdot n \tag{2}$$

d.h. wir rechnen den Abstand des Punktes $b_2 - b_1$ von der von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene aus und man kann die entsprechende Formel verwenden oder wir lösen einfach das lineare Gleichungssystem (2):

$$t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\begin{array}{cccccc} & -t_2 & +s & = & -1 \\ t_1 & +t_2 & +s & = & 0 \\ t_1 & & -s & = & 1 \end{array}$$

also $s = -\frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{1}{3}$, $t_1 = \frac{1}{3}$ und damit ist der Abstand

$$\left\| -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Aufgabe 3

Diskutieren Sie die Funktion

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

(Nullstellen, Maxima, Minima, Wendepunkte, Asymptoten) und fertigen Sie eine qualitativ korrekte Skizze an.

Lösung:

Betrachte

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)}$$

- Symmetrieeigenschaften:

  f ist eine ungerade Funktion, also punktsymmetrisch zum 0-Punkt.

- Definitionsbereich:

  f ist für $x \neq -1, +1$ definiert.

- Nullstellen:

  f hat genau 1 Nullstelle $x = 0$.

- Ableitungen:

  Für $x \neq -1, +1$ ist

  $$f'(x) = \frac{(x^2-1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

  und

  $$f''(x) = 2x \frac{x^2+3}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

- Extremwerte und Wendepunkte:

  Die Nullstellen von f' sind $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$. $f''\left(-\sqrt{3}\right) < 0$ also hat f in $x = -\sqrt{3}$ ein lokales Maximum (y-Wert $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$), $f''\left(\sqrt{3}\right) > 0$ also hat f in $x = \sqrt{3}$ ein lokales Minimum (y-Wert $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$). Weiter ist $f''(0) = 0$ und f' ist negativ auf $[0, 1[$, also $x = 0$ ein Wendepunkt (y-Wert $f(0) = 0$).

- Polstellen, Asymtoten:

  f hat Polstellen in $-1, +1$. Grenzwerte:

  $$\lim_{x \overset{\leq}{\to} 1} f(x) = -\infty$$

  denn für $x = 1 - \varepsilon$ ist $x^3 > 0$ und $(x+1) > 0$ und $(x-1) > 0$. Ebenso

  $$\lim_{x \overset{\geq}{\to} 1} f(x) = \infty$$

Die Symmetrieeigenschaft liefert

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = -\infty$$

Wegen

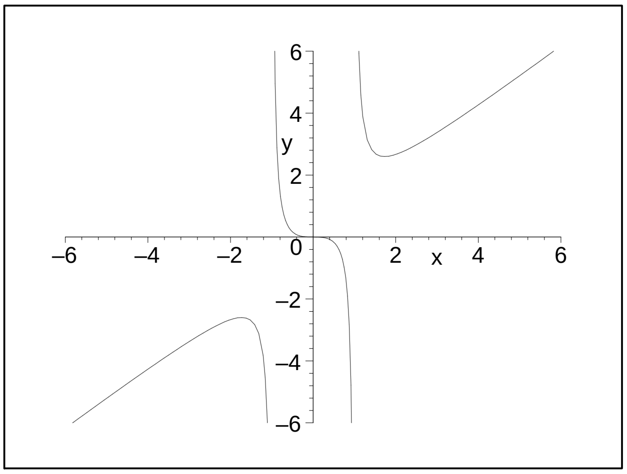
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

ist $y = x$ eine Asymptote für $x \to \infty$. Wir haben $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} > x$ für $x > 1$ (denn dann ist $x^2 - 1 > 0$, also ist $\frac{x^3}{x^2-1} > x$ äquivalent zu $x^3 > x^3 - x$), also nähert sich f der Asymptote $y = x$ von oben.

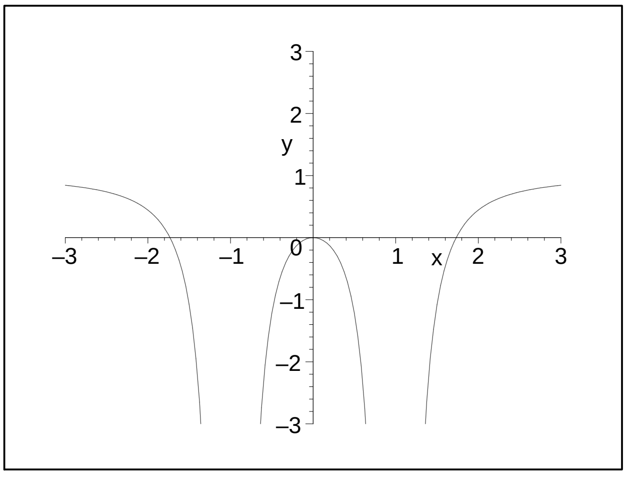
Aus der Symmetrie folgt, daß sich f für $x \to -\infty$ von unten der Asymptote $y = x$ nähert.

- Plots:

  Aus der obigen Argumentation erhält man folgenden Plot von f:



  Plot von f':



Aufgabe 4

Wie groß ist die durch die Graphen der Funktionen

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= x^3 - 3x \end{aligned}$$

eingeschlossene Fläche.

Lösung:

Sei $l(x) = x$ und $f(x) = x^3 - 3x$. Wir bestimmen zunächst die Schnittpunkte von l und f, d.h. wir lösen mit

$$F(x) := x - \left(x^3 - 3x\right) = -x^3 + 4x$$

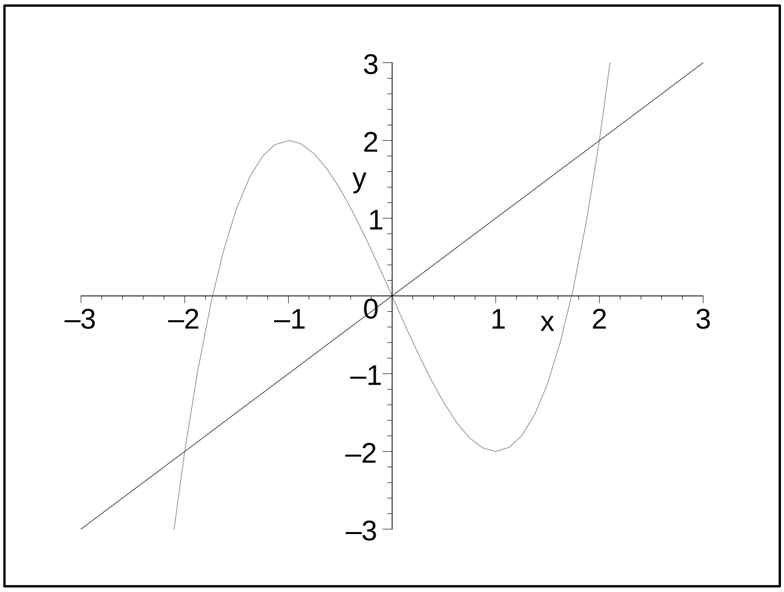
die Gleichung

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \text{ d.h.} \\ x\left(x^2 - 4\right) &= 0 \end{aligned}$$

d.h. die Schnittpunkte sind $x = -2, 0, 2$. Für $x \in [0, 2]$ ist $x > x^3 - 3x$. Um die von 0 bis 2 eingeschlossene Fläche zu erhalten, müssen wir $F(x)$ von 0 bis 2 integrieren. Da F ungerade ist, ist die zwischen -2 und 0 eingeschlossene Fläche, die selbe.

Die gesamte eingeschlossene Fläche ist also

$$2 \cdot \int_0^2 F(x)\,dx = 2\left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right]_0^2 = 2 \cdot 4 = 8$$



Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Lösung:
Mit der Gauss-Elimination bringen wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lccccccc} I. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ II. & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ III. & x_1 & + & 4x_2 & + & 9x_3 & = & 16 \end{array}$$

auf obere Dreiecksgestalt: Wir ziehen die $I.$ Zeile von der $II.$ und $III.$ ab (schreibe kurz $II - I$ und $III - I$) und erhalten:

$$\begin{array}{lccccccc} I. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ II'. & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ III'. & & & 3x_2 & + & 8x_3 & = & 15 \end{array}$$

nun noch $III' - 3 \cdot II'$

$$\begin{array}{lccccccc} I. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ II'. & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ III''. & & & & & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

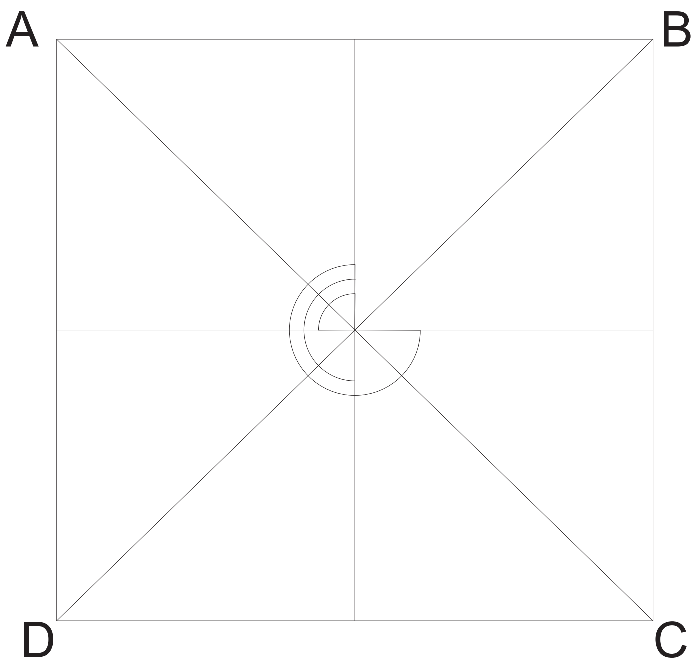
Nun lösen wir rückwärts auf:
Aus Zeile $III''.$ bekommen wir $x_3 = 3$.
Eingesetzt in die Zeile $II'.$ also $x_2 = 3 - 2 \cdot 3 = -3$.
Eingesetzt in die Zeile I also $x_1 = 1 - (-3) - 3 = 1$

Aufgabe 6

Sei q ein Quadrat. Wieviele Elemente enthält die Gruppe der Symmetrien von q.
Lösung:
Das Quadrat q hat folgende Symmetrien:

1. id: Die Identität: $(A, B, C, D) \longmapsto (A, B, C, D)$
2. r_{90}: Drehung um 90° (gegen den Uhrzeigersinn): $(A, B, C, D) \longmapsto (D, A, B, C)$
3. r_{180}: Drehung um 180° (gegen den Uhrzeigersinn): $(A, B, C, D) \longmapsto (C, D, A, B)$
4. r_{270}: Drehung um 270° (gegen den Uhrzeigersinn): $(A, B, C, D) \longmapsto (B, C, D, A)$
5. s_h: Spiegelung an der Horizontalen: $(A, B, C, D) \longmapsto (D, C, B, A)$
6. s_v: Spiegelung an der Vertikalen: $(A, B, C, D) \longmapsto (B, A, D, C)$
7. s_{AC}: Spiegelung an der Diagonalen AC: $(A, B, C, D) \longmapsto (A, D, C, B)$
8. s_{BD}: Spiegelung an der Diagonalen BD: $(A, B, C, D) \longmapsto (C, B, A, D)$

(Man bemerke, daß die Punktspiegelung gleich der Drehung um 180° ist).
Die Gruppe der Symmetrie des Quadrats hat also 8 Elemente.



Tatsächlich wird die Gruppe der Symmetrie des Quadrats erzeugt von r_{90} und s_h:

- $r_{180} = (r_{90})^2$
- $r_{270} = (r_{90})^3$
- $s_v = r_{270} \circ s_h \circ r_{90}$
- $s_{BD} = s_h \circ r_{90}$: $(A, B, C, D) \longmapsto (D, A, B, C) \longmapsto (C, B, A, D)$
- $s_{AC} = s_v \circ r_{90}$

Die Gruppentafel:

	id	r_{90}	r_{180}	r_{270}	s_h	s_v	s_{AC}	s_{BD}
id	id	r_{90}	r_{180}	r_{270}	s_h	s_v	s_{AC}	s_{BD}
r_{90}	r_{90}	r_{180}	r_{270}	id	s_{AC}	s_{BD}	s_v	s_h
r_{180}	r_{180}	r_{270}	id	r_{90}	s_v	s_h	s_{BD}	s_{AC}
r_{270}	r_{270}	id	r_{90}	r_{180}	s_{BD}	s_{AC}	s_h	s_v
s_h	s_h	s_{BD}	s_v	s_{AC}	id	r_{180}	r_{270}	r_{90}
s_v	s_v	s_{AC}	s_h	s_{BD}	r_{180}	id	r_{90}	r_{270}
s_{AC}	s_{AC}	s_h	s_{BD}	s_v	r_{90}	r_{270}	id	r_{180}
s_{BD}	s_{BD}	s_v	s_{AC}	s_h	r_{270}	r_{90}	r_{180}	id

Aufgabe 7

Wie groß ist die Chance 6 Richtige beim Lotto zu tippen.
Lösung:
Wir ziehen aus einer Urne mit $n = 49$ nummerierten Kugeln $k = 6$ Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge.
Betrachten wir zunächst das Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge:
Für die erste Kugel haben wir n Möglichkeiten für die zweite $n - 1$ usw., d.h. wir haben

$$n\,(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten.
Die gezogenen k Kugeln können wir auf $k!$ verschiedene Weisen anordnen. Also gibt es ohne Beachtung der Reihenfolge

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

viele verschiedene Möglichkeiten für das Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, beim Lotto also

$$\frac{49!}{(43)! \cdot 6!} = 13983816$$

Da alle diese Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind, ist die Wahrscheinlickeit, daß ein festgelegter Lottotip gezogen wird

$$\frac{1}{13\,983\,816} \approx 7.1511 \times 10^{-8}$$

Aufgabe 8

Seien x_1 und x_2 zwei Augenzahlen beim Würfeln. Wie groß ist der Erwartungswert der Funktion

$$|x_1 + x_2 - 7|$$

Lösung:
$X := |x_1 + x_2 - 7|$ ist eine Zufallsvariable, d.h. eine Abbildung, die jedem möglichen Paar von Augenzahlen eine relle Zahl zuordnet. Tatsächlich hängt X nur von der Augensumme $x_1 + x_2$ ab. Der Erwartungswert $E(X)$ ist die Summe über alle möglichen Werte x_i, die X annehmen kann, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$, daß X diesen Wert annimmt:

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i \cdot P(X = x_i)$$

in unserem Fall kann X die Werte $0, ..., 5$ annehmen, also

$$E(X) = \sum_{x=0}^{5} x \cdot P(X = x)$$

Wir bestimmen nun die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x)$. Da alle möglichen Paare von Augenzahlen gleichwahrscheinlich sind, müssen wir für jeden Wert $x = 0, ..., 5$ jeweils die Anzahl der Augenzahlpaare bestimmen, die diesen Wert liefern. Dazu stellen wir folgende Tabelle auf:

X	$x_1 + x_2$	Augenzahlpaare (x_1, x_2)	Anz.	Wsk.
0	7	$(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$	6	$\frac{6}{36}$
1	6, 8	$(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$ und $(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)$	10	$\frac{10}{36}$
2	5, 9	$(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$ und $(6,3), (5,4), (4,5), (3,6)$	8	$\frac{8}{36}$
3	4, 10	$(1,3), (2,2), (3,1)$ und $(6,4), (5,5), (4,6)$	6	$\frac{6}{36}$
4	3, 11	$(1,2), (2,1)$ und $(6,5), (5,6)$	4	$\frac{4}{36}$
5	2, 12	$(1,1)$ und $(6,6)$	2	$\frac{2}{36}$

also

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} \\ &= \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \approx 1.9444 \end{aligned}$$