Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker II
Abschlußklausur

Bearbeitungszeit 180 Minuten.
Bitte jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt bearbeiten und mit Namen versehen.

1. (a) Wann heißt eine Matrix $A \in Mat\,(n \times n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar?

   (b) Ist die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   diagonalisierbar?

   (c) Welche Gestalt hat die Jordansche Normalform von A?

2. Auf $\mathbb{R}\,[t] \subset C\,[-1,1]$ ist durch
   $$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f\,(t)\,g\,(t)\,dt$$
   ein Skalarprodukt gegeben.

   (a) Bestimmen Sie eine Basisdarstellung von $\langle\ ,\ \rangle$ auf dem Untervektorraum
   $$U = \left\langle 1, t, t^2 \right\rangle$$

   (b) Bestimmen Sie bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ eine Orthogonalbasis von U.

3. Berechnen Sie für die Kurve
   $$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ &f\,(t) = e^t\,(\cos\,(t)\,, \sin\,(t)) \end{aligned}$$
   die Bogenlänge von $f\,([0, 2\pi])$. In welchem Winkel schneidet die Kurve den Halbstrahl durch 0 und $f\,(t)$?

4. Bestimmen Sie das globale Minimum von
   $$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &f\,(x, y) = y^2 + x^4 - x^2 \end{aligned}$$
   und die Punkte (x, y), in denen es angenommen wird.

5. Zeigen Sie, daß sich

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = 1 + x + xy - e^y$$

in einer Umgebung von $(0, 0)$ lokal nach y auflösen läßt, und berechnen Sie die Taylorreihe der Auflösung $y = g(x)$ bis zum Grad 2.

6. Sei $0 < r < 1$ und

$$K_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

Integrieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)/2}$$

über K_r und zeigen Sie, daß $\lim_{r\to 0} \int_{K_r} f(x, y, z)\, dxdydz$ existiert.

7. (a) Seien X_1 und X_2 diskrete positive unabhängige Zufallsvariablen mit Erzeugendenfunktionen

$$f_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_j = n)\, t^n$$

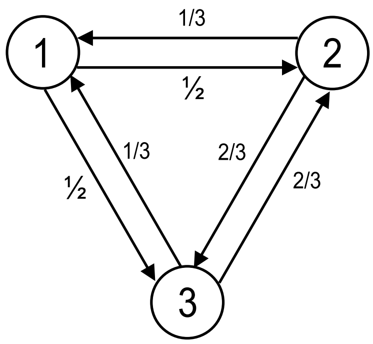
Welche Erzeugendenfunktion hat $X = X_1 + X_2$?

(b) Seien X_1 und X_2 unabhängig poissonverteilt mit Parametern λ_1 und λ_2, d.h.

$$P(X_j = n) = \frac{\lambda_j^n}{n!} e^{-\lambda_j}$$

Zeigen Sie $X = X_1 + X_2$ ist ebenfalls poissonverteilt.

8. Bestimmen Sie für die Markovkette mit 3 Zuständen



die Übergangsmatrix A und berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung.