Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 1

Abgabetermin Mittwoch, den 30.4.2003 vor der Vorlesung.

1. Sei G die Automorphismengruppe des Würfels mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Zeigen Sie, daß man G als Untergruppe von $O(3)$ auffassen kann und geben Sie ein Element in jeder Konjugationsklasse C an:

C	$\lvert C \rvert$
id	1
Drehungen um Eckendiagonalen um $\pm 120°$	8
Drehungen um Kantenmittendiagonalenen um $180°$	6
Drehungen um Seitenmittendiagonalen um $180°$	3
Drehungen um Seitenmittendiagonalen um $\pm 90°$	6
Punktspiegelung = Drehspiegelung um $180°$	1
Drehspiegelungen um $\pm 60°$ mit Eckendiagonalen als Eigenraum	8
Spiegelungen an einer Ebene durch 2 Kanten	6
Spiegelungen an den Koordinatenebenen	3
Drehspiegelungen um $\pm 90°$ mit Koordinatenachsen als Eigenräume	6

2. Zeigen Sie: Die Automorphismengruppe des Würfels G wird von der Drehung $\alpha = (2, 3, 5, 4)$ um $90°$ und der Drehspiegelung $\beta = (1, 5, 3, 6, 2, 4)$ um $60°$ erzeugt, und diese erfüllen die Relationen $\alpha^4 = 1$, $\beta^6 = 1$, $(\alpha\beta)^2 = e$, $\left(\alpha^{-1}\beta^2\right)^2 = e$. Dabei bezieht sich die Nummerierung $1, ..., 6$ auf die übliche Nummerierung der Seiten eines Spielwürfels.

3. Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Wenn ja, berechnen Sie die Transformationsmatrix für die Diagonalform, wenn nein, geben Sie die Jordansche Normalform an.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Sei
$$T = \left\{ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid b_n \in \mathbb{C},\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \forall n \geq 0 \right\}$$
die Menge der Folgen vom Fibonacci-Typ. Zeigen Sie:
   (a) T ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.
   (b) die Indexshift-Abbildung $S : T \to T$, $(b_0, b_1, ...) \mapsto (b_1, b_2, ...)$ ist ein Endomorphismus, und bestimmen Sie die Matrixdarstellung von S bezüglich einer geeigneten Basis von T.
   (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von S, und leiten Sie damit die geschlossene Formel für die Fibonaccizahlen her.

5. Sei $A \in End(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: $A^2 = A$ genau dann, wenn A diagonalisierbar ist und die Eigenwerte sind in $\{0, 1\}$.

   Hinweis: Fassen Sie zunächst $A \in End(\mathbb{C}^n)$ auf, und verwenden Sie den Satz über die Jordansche Normalform.