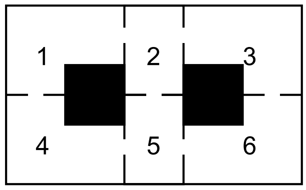
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 11

Abgabetermin Mittwoch, den 9.7.2003 vor der Vorlesung.

1. Betrachten Sie folgendes Labyrinth



in dem sich eine Maus bewegt. Befindet sich die Maus in Kammer j bleibt sie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dort und wechselt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2w_j}$ in die Kammer i, falls von Kammer j genau w_j Türen abgehen und eine davon in Kammer i führt. Stellen Sie die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,6}$ auf, zeigen Sie, daß der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} A^k$ existiert und bestimmen Sie diesen.

2. Sei
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
und $\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1,2,3} = A^k$. Zeigen Sie für $a_{3,1}^{(k)}$ die Rekursionsformel
$$a_{3,1}^{(k)} = \frac{3}{4} a_{3,1}^{(k-1)} + \frac{3}{16} a_{3,1}^{(k-2)} + \frac{1}{16} a_{3,1}^{(k-3)}$$
Aus welchem Satz der Vorlesung MfI 1 folgt eine n-stufige Rekursionsformel die Potenzen von $n \times n$-Matrizen?

3. In einer Fabrik arbeiten 5 Maschinen des gleichen Typs. Intakte Maschinen fallen pro Tag mit Wahrscheinlichkeit p aus. Maschinen, die am Anfang eines Tages defekt waren, sind bis zum nächsten Tag wieder repariert. Wir beschreiben das System durch die Anzahl x der zu Beginn eines Tages intakten Maschinen. Stellen Sie die Übergangsmatrix A zwischen den möglichen Zuständen des Systems auf, zeigen Sie die Existenz des Grenzwerts $\lim_{k\to\infty} A^k$ und berechnen Sie diesen.

4. Für eine kontinuierliche Zufallsvariable Z wurde folgende Stichprobe gezogen:

   .65,-.34,.14,-.23,-.21,.26,.77,.23,-.18,.11,.23,.19,.31,-.41,-.03,.21,.01,-.55,-.23,-.45,
   -.77,.56,.04,.42,.56,.15,-.17,-.34,-.43,-.72,.15,-.57,.18,-.48,-.14,.20,.22,.64,.26,.42,
   -.02,.79,-.75,-.20,-.71,.02,-.59,.69,-.35,-.01

   Führen Sie für die Zufallsvariable

   $$X = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } Z \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\\ 2 & \text{für } Z \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\\ 3 & \text{für } Z \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 4 & \text{für } Z \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array} \right\}$$

   einen χ^2-Verteilungstest zu der Annahme

   $$P(X=1) = \tfrac{1}{8} \quad P(X=2) = \tfrac{3}{8} \quad P(X=3) = \tfrac{3}{8} \quad P(X=4) = \tfrac{1}{8}$$

   und der Irrtumswahrscheinlichkeit 5% durch. Wie könnte die Dichte von Z aussehen?

5. Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße. Testen Sie anhand der Stichprobe

   2.53,.89,1.72,1.73,2.66,2.3,2.45,1.89,2.49,2.35

   die Hypothese $H_0 : \sigma = 0.5$ gegen $H_1 : \sigma \geq 0.5$ zur Irrtumswahrscheinlichkeit 1%.

Hinweis: Bestimmen Sie die Fraktile der χ^2-Verteilung mit der Maplefunktion
statevalf $[icdf, chisquare[n]](\alpha)$ aus dem Paket *stats*.