Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 12

Abgabetermin Mittwoch, den 16.7.2003 vor der Vorlesung.

1. Ein Hidden-Markov-Modell mit 3 Zuständen und 3 Buchstaben hat die folgenden Sequenzen der Länge 20 erzeugt:

$$[a, a, a, b, b, b, b, b, b, b, b, c, c, a, b, b, b, b, b, b]$$
$$[b, b, c, c, c, c, a, a, a, b, b, c, c, a, a, a, b, c, c, a]$$
$$[a, b, c, c, a, b, b, b, b, b, b, c, c, c, a, a, b, c, c, c]$$
$$[b, b, b, c, c, a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, a, a, a, b]$$

   Finden Sie mit Hilfe des Baum-Welch-Algorithmus ein Hidden-Markov-Modell, das diese Sequenzen mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit reproduziert.

2. Zeigen Sie, daß für die zur euklidischen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ zugehörige Matrixnorm

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

   auf der Menge der symmetrischen Matrizen gilt

$$\|A\| = \lambda_{\max}(A)$$

   wobei $\lambda_{\max}$ den Betrag des größten Eigenwerts bezeichne.

   Hinweis: Extrema mit Nebenbedingungen.

3. Eine Nullstelle des kubischen Polynoms

$$f(z) = z^3 + 3qz - 2r \text{ mit } r, q > 0$$

   ist gegeben durch die reelle Wurzel

$$z = \left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

   Diese Formel ist numerisch ungünstig, da zwei Kubikwurzeln berechnet werden müssen und für $r \to 0$ Totalauslöschung auftritt. Geben Sie eine auslöschungsfreie Formel an, für die nur eine Kubikwurzel und eine Quadratwurzel berechnet werden muss.

4. Untersuchen Sie, welche der beiden folgenden Formeln zur Berechnung der Varianz von $x \in \mathbb{R}^n$ numerisch stabiler ist

$$Var\,(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$$
$$Var\,(x) = \frac{1}{n-1} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) - n\bar{x}^2 \right)$$

   wobei $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$ den Mittelwert bezeichnet. Veranschaulichen Sie Ihre Wahl außerdem an einem Zahlenbeispiel.

5. Zeigen Sie, daß bei Spaltenpivotsuche für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat\,(n \times n, \mathbb{R})$$

   für den Betrag des maximalen Pivotelements gilt

$$|\alpha_{\max}| = 2^{n-1}$$