Mathematik für Informatiker II

Übungsblatt 2

Abgabetermin Mittwoch, den 7.5.2003 vor der Vorlesung.

1. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $1, x, x^2, x^3$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums $U = R[x]_{\leq 3}$ bezüglich der Skalarprodukte

(a)

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) x^2 dx$$

(b)

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) (1 - x^2) dx$$

2. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\pi(f)$ von $f = x^2(x^2 - 1) \in R[x]_{\leq 4}$ auf U bezüglich der Skalarprodukte aus Aufgabe 1.a bzw 1.b, und fertigen Sie Zeichnungen von $f - \pi(f)$ an.

Hinweis zu 1 und 2: Man darf Maple verwenden.

3. Sei $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Zeigen Sie $\exists S \in SU(n)$, sodaß

$${}^t \bar{S} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalgestalt hat.

Hinweis: Folgen Sie dem Beweis für symmetrische Matrizen.

4. Zeigen Sie, daß die Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

positiv definit sind.

5. Sei A eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie die Existenz einer symmetrischen Matrix B mit

$$B^2 = A$$