Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Janko Boehm

Mathematik für Informatiker II
Übungsblatt 2

Abgabetermin Mittwoch, den 7.5.2003 vor der Vorlesung.

1. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $1, x, x^2, x^3$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums $U = R\,[x]_{\leq 3}$ bezüglich der Skalarprodukte

   (a)
   $$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p\,(x)\, q\,(x)\, x^2 dx$$

   (b)
   $$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p\,(x)\, q\,(x) \left(1 - x^2\right) dx$$

2. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\pi\,(f)$ von $f = x^2\,(x^2 - 1) \in R\,[x]_{\leq 4}$ auf U bezüglich der Skalarprodukte aus Aufgabe $1.a$ bzw $1.b$, und fertigen Sie Zeichnungen von $f - \pi\,(f)$ an.

   Hinweis zu 1 und 2: Man darf Maple verwenden.

3. Sei $A \in Mat\,(n \times n, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Zeigen Sie $\exists S \in SU\,(n)$, sodaß

   $${}^t\bar{S}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Diagonalgestalt hat.

   Hinweis: Folgen Sie dem Beweis für symmetrische Matrizen.

4. Zeigen Sie, daß die Matrizen

   $$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat\,(n \times n, \mathbb{R})$$

   positiv definit sind.

5. Sei A eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie die Existenz einer symmetrischen Matrix B mit
   $$B^2 = A$$