

Mathematik für Informatiker II

Übungsblatt 4

Abgabetermin Mittwoch, den 21.5.2003 vor der Vorlesung.

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von Gerschgorin, daß A invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, daß

$$\|A\|_2 \leq 7$$

2. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine 2-mal stetig differenzierbare reguläre Kurve.

(a) Zeigen Sie, daß für die Krümmung κ gilt

$$\kappa(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|^2} \left\| f''(t) - \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|^2} \sum_{j=1}^n f'_j(t) f''_j(t) \right\|$$

(b) Berechnen Sie die Krümmung von:

$$f_1(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

$$f_2(t) = (\cos 3t \cdot (3 + \cos 2t), \sin 2t, \sin 3t \cdot (3 + \cos 2t))$$

$$f_3(t) = (t, t^2, t^3)$$

3. Schreiben Sie ein Mapleskript, das einen Plot einer Raumkurve erstellt, und an einem gegebenen Parameterwert das begleitende Dreibein (T, N, B) aus Tangentialvektor T , Normalenvektor N und Binormalenvektor B einzeichnet.

Hinweis: Verwenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren.

4. Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = (e^{at} \cos(t), e^{at} \sin(t))$$

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge von f $(]-\infty, t])$ für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Gerade durch 0 und $f(t)$ und dem Tangentialvektor von f in $f(t)$.

5. Zeigen Sie, daß für Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ folgende Identitäten gelten:

(a) $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$

(b) $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle b, c \rangle \langle a, d \rangle$